參考資料

土木學會誌　第十五卷第十二號　昭和四年十二月

鋭頂堰の新公式

本文は Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure (Bd. 73, Nr. 24, 15. Juni 1929.) 所載の Rehbock 氏の論文を抄譯せるものである。

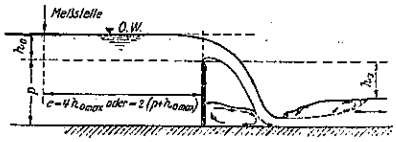
水平の鋭頂を有し nappe の起らない様な垂直の板堰は實驗室の模型試驗に於て流出量或は流込量測定の目的に對し最もよく適應するものである。此の場合堰長，堰高及溢流高を知りて流量を決定せむがためには一つの正確なる公式を必要とする。本論文に於て著者は斯界の權威者に依り近年發表せられたる 280 の流量測定結果と比較對照する事に依り著者が 1911 年より 1913 年の間に作成せる三つの流量公式は充分正確にして信頼するに足るものである事を示した。又著者は最近一つの新流量公式を作成したのである。然しこれは舊公式の不正確なるがためではなく新公式は前者に比し比較的簡單にして而も正確に計算し得る點に於て優れて居るためである。

鋭稜を有する溢流堰に對する從來の流量公式（第一圖）

從來此の種の流量公式は殆んど次の Poleni (1767) の基礎公式から出發して居る。

$$Q=\frac{2}{3}\mu_0\sqrt{2g}\,lh^{\frac{3}{2}}. \quad \ldots\ldots\ldots(1)$$

第一圖



こゝに　Q＝流量，μ_0＝流量係數，
g＝重力の加速度，l＝堰長，
p＝堰高，h_0＝溢流高（第一圖）の如く

堰から $e=4\,h_{0\,max.}$ 或は $e=2\,(p+h_{0\,max.})$ だけ上流に於て測定。

側面收縮のない堰の場合は，

$$Q=ql \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

こゝに q＝堰の單位幅に對する流量

從つて (1) 式は，

$$q=\frac{2}{3}\mu_0\sqrt{2g}\,h_0^{\frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

今　$q=1^m$ 幅の流量 ($m^3/sec.$)，$g=9.81\ m/sec^2.$ とせば米突法では次の公式を得。

$$q=2.953\ \mu_0 h_0^{\frac{3}{2}} \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

μ_0 は Poleni 氏の公式を誘導するに當つて凡ての誤差を相殺する係數である。導水渠の流速の影響を顧慮して Weisbach (1841) は μ_0 に次の如き値を與へた。

$$\mu_0=\mu\left[1+a\left(\frac{h_0}{p+h_0}\right)^2\right] \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

こゝに $\begin{cases}\mu=\text{無限大に堰が高い場合卽 } p=\infty \text{ と假定せる場合の } \mu_0 \text{ の極限値}\\ a=\text{或る常數}\end{cases}$

其の後 Bazin, Freese, 及 Schweizerische Ingenieur- und Architekten-Verein 等は夫々 Weisbach の上式を基礎として μ_0 の値を決定した。卽

Bazin (1888) の公式

$$\mu_0=\left(0.6075+\frac{0.0045}{h_0}\right)\left[1+0.55\left(\frac{h_0}{p+h_0}\right)^2\right] \cdots\cdots(6)$$

Freese (1890) の公式

$$\mu_0=\left(0.615+\frac{0.0021}{h_0}\right)\left[1+0.55\left(\frac{h_0}{p+h_0}\right)^2\right] \cdots\cdots(7)$$

Schweizerische Ingenieur- und Architekten-Verein. (1924) の公式

$$\mu_0=0.615\left(1+\frac{1}{1000\,h_0+1.6}\right)\left[1+0.5\left(\frac{h_0}{p+h_0}\right)^2\right] \cdots(8)$$

著者も亦此の Weisbach の公式を基礎とする正確なる流量公式の發見に永年努力して來たが是は失敗に歸し次の如き異つた形の式を導く事に依て始めて成功したのである。

$$\mu_0=\mu+a\,\frac{h_0}{p} \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

此の形の μ_0 に對し著者は 1911, 1912, 1913 に三つの公式を發表した。

Rehbock の舊公式

$$(1911)\qquad \mu_0=0.605+\frac{1}{1100\,h_0}+\frac{h_0}{12\,p}$$

$$(1912)\qquad \mu_0=0.605+\frac{1}{1050\,h_0}+0.08\,\frac{h_0}{p}$$

$$(1913)\qquad \mu_0=0.605+\frac{1}{1000\,h_0}+0.08\,\frac{h_0}{p} \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

是等の公式は互に大同小異のものではあるが最後の公式 (1913) が最も簡單で且つ新らしい研究でもあり恐らく最も正確なものであらう。

直線式の係數を有する著者の新公式

著者の舊公式は (6), (7), (8) 等の公式と同じくディメンションが統一されて居ない缺點があり，又 p と h_0 から μ_1 を計算し圖表とする場合**第五圖**に見る如く双曲線となり計算が頗る煩雜となる。此の缺點を除去するために著者は最近 Poleni 氏の基礎公式と多少形の異つた新基礎公式を作成した。卽眞正の溢流高 h_0 に對し補助溢流高 h_e を導入せるものである。h_e の大さは，

$$h_e = h_0 + \overset{m}{0.0011} \qquad \text{(11)}$$

h_e は若し量水標の零點を堰頂より $\overset{m.m}{1.1}$ だけ下に取れば觀測所に於て直接に讀取る事が出來る。

Rehbock (1928) の新基礎公式

$$q = 2.953\,\underline{\mu_0}\,h_e^{\frac{3}{2}} = \rho_0\,h_e^{\frac{3}{2}} \qquad \text{(12)}$$

上式に於て $\underline{\mu_0}$ 或は ρ_0 の値は直線形を採る。卽

$$\underline{\mu_0} = a' + b'\frac{h_e}{p} \qquad \text{(13)}$$

$$\rho_0 = a + b\frac{h_e}{p} \qquad \text{(14)}$$

而して a', b' 及 a, b の値は觀測に依る計量値と公式から計算せる數値との偏差の平均卽次式の $\underline{\Delta\mu_0}$ 或は $\Delta\rho_0$ を最小となす樣に決められなければならぬ。

$$\underline{\Delta\mu_0} = \frac{q}{2.953\,h_e^{\frac{3}{2}}} - \left(a' + b'\frac{h_e}{p}\right) \qquad \text{(15)}$$

$$\Delta\rho_0 = \frac{q}{h_e^{\frac{3}{2}}} - \left(a + b\frac{h_e}{p}\right) \qquad \text{(16)}$$

これは圖式的にも又最小自乘法に依り解析的にも決定する事が出來る。著者は Karlsruhe に於ける實驗の外**第四表**左欄に見る如き Schoder & Turner 以下諸大家の 280 の測定値を適用して次の數値を確定した。

$$\begin{cases} a' = 0.6035 \\ b' = 0.0813 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1.782 \\ b = 0.240 \end{cases}$$

是等の値を (12) 式に代入する事に依り著者の新流量公式を得。

Rehbock (1929) の新流量公式

$$q=2.953\left(0.6035+0.0813\frac{h_e}{p}\right)h_e^{\frac{3}{2}} \quad\cdots\cdots(17)$$

$$q=\left(1.782+0.24\frac{h_e}{p}\right)h_e^{\frac{3}{2}} \quad\cdots\cdots(18)$$

$$Q=\rho_0 l h_e^{\frac{3}{2}}=\left(1.782+0.24\frac{h_e}{p}\right)l\,h_e^{\frac{3}{2}} \quad\cdots\cdots(19)$$

又信頼すべき二つの測定値を夫々 q_1, p_1, h_1 及 q_2, p_2, h_2 とせば a, b は次式からも計算出來る譯である。

$$a=\frac{q_1 h_1 h_2^{\frac{5}{2}}-q_2 p_2 h_1^{\frac{5}{2}}}{p_1 h_1^{\frac{3}{2}} h_2^{\frac{5}{2}}-p_2 h_1^{\frac{5}{2}} h_2^{\frac{3}{2}}} \quad\cdots\cdots(20)$$

$$b=p_1 p_2\frac{q_1 h_2^{\frac{3}{2}}-q_2 h_1^{\frac{3}{2}}}{p_2 h_1^{\frac{5}{2}} h_2^{\frac{3}{2}}-p_1 h_1^{\frac{3}{2}} h_2^{\frac{5}{2}}} \quad\cdots\cdots(21)$$

次に E. Prandtl は著者の舊公式 (1911-1913) に於ける第二項及新公式に於ける h_e の値の第二項卽 (11) 式の第二項の形に就ては確かに水の毛細管現象から來るものに違ひないとの推定を下し，此の項は毛細管の水の上昇高に依りて表示すべきものであるとし，次の如く說明して居る。卽彼に依れば平坦壁に於ける水の毛細管上昇高は，

$$h'=\sqrt{\frac{K}{\gamma}}=0.00267^{m} \quad\cdots\cdots(22)$$

こゝに $\begin{cases} K=70.7\ dyn./cm. & \text{の値を有する毛細管常數} \\ \gamma= & \text{水の單位重量} \end{cases}$

從つて公式 (10) は，

$$\mu_0=0.605+0.375\frac{h'}{h_0}+0.08\frac{h_0}{p} \quad\cdots\cdots(23)$$

又同樣な方法に依り公式 (18) は，

$$q=\left[1.782+0.24\left(\frac{h_0+0.41\,h'}{p}\right)\right](h_0+0.41\,h')^{\frac{3}{2}} \quad\cdots\cdots(24)$$

又是を概算的に，

$$q=\left[1.782+0.24\frac{h_0}{p}\right](h_0+0.41\,h')^{\frac{3}{2}} \quad\cdots\cdots(25)$$

此の說明は科學的で非常に面白いものであると考へるが未だ充分に信頼出來る程度にまで研究されて居ない。

不等布流速の場合の公式

著者の新公式 (18) は亦導水渠の水が不規則な流速分布をなす場合にも應用する事が出來る。そのためには眞正の堰高 p の代りに補助堰高 p_e を使用しなければならぬ。

$$p_e=p\frac{\alpha_n}{\alpha_a} \quad\cdots\cdots(26)$$

こゝに $\begin{cases}\alpha_n=\text{等布流速の場合の速頭調整値 (Geschwindigkeitshöhen-Ausgleichswert.)}\\ \alpha_a=\text{不等布流速の場合の}\quad ,, \qquad ,,\end{cases}$

若し等布流速の場合に對し $\alpha_n=1.05$ とせば公式 (18) は次の形となる。

$$q=\left(1.782+0.228\ \alpha_a\frac{h_e}{p}\right)h_e^{\frac{3}{2}} \quad\cdots\cdots(27)$$

次に不等布流速の場合導水渠の全幅を測定個所に於て或る數に區分し各區分點の流速を觀測して是を w とし是等の平均流速を μ とせば α_a の値は次の式に依つて計算出來る。

$$\alpha_a=\frac{\int_0^F(w^3\,dF)}{Q\,u^2} \quad\cdots\cdots(28)$$

若し流速分布線が大體に於て直線的變化をなすものと假定せば α_a は亦概算的に次の式に依ても計算出來る。

$$\alpha_a=1+\left(\frac{w_{max.}-w_{min.}}{2\,u}\right)^2 \quad\cdots\cdots(29)$$

然し煩雜なる流速測定，計算及其の結果の不正密等を考ふれば不等布流速の溢流堰は流量測定法として不適當なるは論を待たない所である。

著者の諸公式の精密度

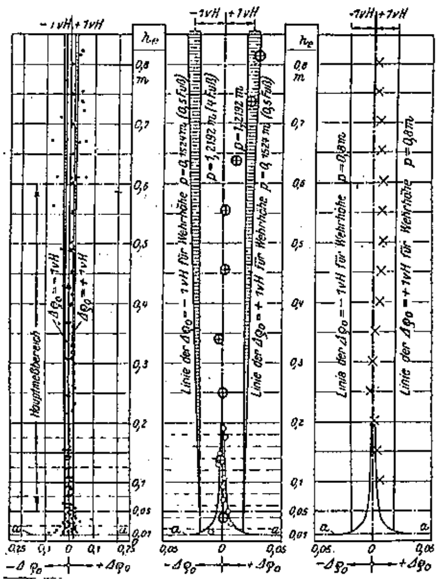
第二圖は著者の新公式に於ける ρ_0 の値が如何に正確なものであるかを示すために

$$\Delta\rho_0=\frac{q}{h_e^{\frac{3}{2}}}-\left(1.782+0.24\ \frac{h_e}{p}\right) \quad\cdots\cdots(30)$$

なる公式に依り**第四表**左欄に見る如き諸大家の 280 の觀測値と公式からの計算値との偏差 $\Delta\rho_0$ を計算し之れを横距とし補助溢流高 h_e を縦距として圖表にしたものである。此の圖に於て陰影を施せる面積の外側の限界線は堰高が 0.1524^m ($\frac{1}{2}$ 呎) の如き最も低い堰に對する ±1% の偏差限界を示し内側の限界線は堰高が 1.2192^m (4 呎) の如き最も高い堰に對する ±1% の偏差限界を示す。是に依て見るも偏差は殆んど ±1% 以下に收る事を知る。**第三圖**は尙解りよく說明するため溢流高を 10^{cm} 置きに區分し各區分内に於ける偏差の重心を求め⊕印で示したものである。**第二表**は此の場合の測定値と公式値との平均偏差を示す。尙

0.2^{m} 以下の溢流高に就ては 2^{cm} 置きに區分し重心點を○印で示す。**第一表**は此の場合の平均偏差を示す。次に堰高，堰長及流量を一定とし補助溢流高 h_e を $0.1^{\mathrm{mm.}}$ だけ過大或は過小に取りたる場合 $\Delta\rho_0$ の値は如何に變化するかを下部の 2 曲線で表してある。偏差が殘りなく此の曲線內に收ると言ふ事實から見て計量値の正密程度並に新公式の信頼すべき程度を充分に察知する事が出來ると思ふ。又此の圖の上部を見るに溢流高が 0.6^{m} 以上の場合は平均偏差が大となり重心線は急に 0.6^{m} の所で折れて居る，これは斯の如き高い溢流高に對しては Schoder & Turner の觀測は過大の計量値を與へたものであると言ふ原因に歸せなければならぬ。又此の事實は測定時の導水方法及計量水槽の大さ不充分等から推して明らかである。此の

第二圖　　第三圖　　第四圖



第　一　表

Nr.	untere Grenze	obere Grenze	Mittlere Abweichungen der Meß-werte von den Formelwerten
	der Ersatz-überfall-höhen h_e m		vH
1	0,01	0,02	— 0,54
2	0,02	0,04	+ 0,42
3	0,04	0,06	+ 0,28
4	0,06	0,08	+ 0,07
5	0,08	0,10	+ 0,04
6	0,10	0,12	+ 0,10
7	0,12	0,14	— 0,21
8	0,14	0,16	— 0,11
9	0,16	0,18	+ 0,15
10	0,18	0,20	+ 0,04
1 bis 10	Absolutes Mittel d. Abweichungen		0,20

第　二　表

Nr.	untere Grenze	obere Grenze	Mittlere Abweichungen der Meß-werte von den Formelwerten
	der Ersatz-überfall-höhen h_e m		vH
1	0,01	0,10	+ 0,06
2	0,10	0,20	— 0,09
3	0,20	0,30	+ 0,01
4	0,30	0,40	— 0,18
5	0,40	0,50	+ 0,08
6	0,50	0,60	+ 0.09
1 bis 6	Absolutes Mittel d. Abweichungen		0,08

點に於ては Amsteg に於ける水利聯盟 (Eidgenössichen Amt für Wassewirtschaft in Amsteg) の鋭稜を有せる溢流堰に依る測定は恐らくかゝる大溢流高の場合の測定中最も正確なるものゝ一つであつて三つの異つた測定方法に依つても Check せられて居り其測定結果は充分信頼するに足るものである。**第四圖**は此の測定結果を使用し**第三圖**と同樣の方法に依り 5^{cm} 置きの區分に就て重心點（×印）を出したものであつて是に依て見るも 0.6^{m} 以上の溢流高の

第三表

Formel	Arithmetisches Mittel der Abweichungen		Mittel der absoluten Abweichungen	
	$\Delta\mu_0 = \mu_0' - \mu_0$	$\Delta\mu_0$ in vH von μ_0 vH	$\Delta\mu_0 = \mu_0' - \mu_0$	$\Delta\mu_0$ in vH von μ_0 vH
Rehbock 1911 . .	— 0,0004	— 0,06	0,0009	0,14
„ 1912 . .	+ 0,0013	+ 0,20	0,0016	0,25
„ 1913 . .	+ 0,0012	+ 0,18	0,0016	0,24
„ 1929 . .	+ 0,0017	+ 0,26	0,0018	0,27
Schweiz. Ing. und Arch. Ver. 1924 .	— 0,0025	— 0,37	0,0026	0,39

第四表

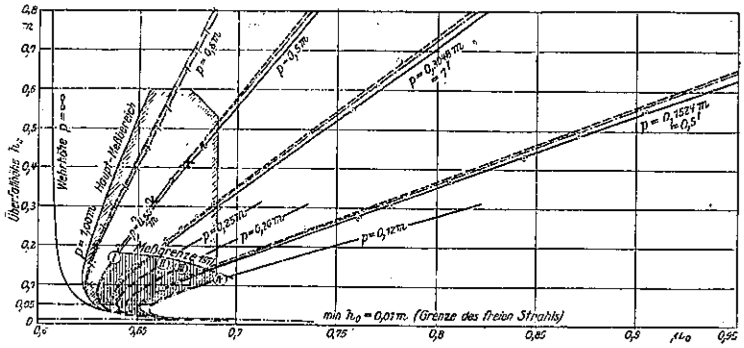
Nr.	Name des Beobachters	Wehrhöhe p m	Grenzen der Überfallhöhen h_0 m	Art der Mittelbildung	Absolute und arithmetische Mittel der Abweichungen der Meßwerte von den Formelwerten vH — Vergleich mit sämtlichen 280 vorliegenden Eichungen: Anzahl	Formel (8) Schw. Ing. u. Arch. Ver. vH	Formel (10) Rehbock 1913 vH	Formel (18) Rehbock 1929 vH	Vergleich mit den 163 Eichungen innerhalb der Grenzen d. Schweiz. Ing. u. A.-V.: Anzahl	Formel (8) Schw. Ing. u. Arch. Ver. vH	Formel (10) Rehbock 1913 vH	Formel (18) Rehbock 1929 vH
1	*Schoder* und *Turner*	0,1524 m (½ Fuß)	$h_{0_{min}} = 0{,}0104$ $h_{0_{max}} = 0{,}6096$	Arithmet. Absolut	28	+ 3,46 3,68	+ 0,46 0,81	+ 0,34 0,71	—	— —	— —	— —
2	*Schoder* und *Turner*	0,2286 m (¾ Fuß)	$h_{0_{min}} = 0{,}0104$ $h_{0_{max}} = 0{,}7102$	Arithmet. Absolut	35	+ 0,64 1,27	— 1,27 1,27	— 1,37 1,37	—	— —	— —	— —
3	*Schoder* und *Turner*	0,3048 m (1 Fuß)	$h_{0_{min}} = 0{,}0104$ $h_{0_{max}} = 0{,}7205$	Arithmet. Absolut	32	+ 1,35 1,79	— 0,06 0,54	+ 0,03 0,56	17	+ 0,14 0,78	— 0,26 0,43	— 0,22 0,42
4	*Schoder* und *Turner*	0,4572 m (1½ Fuß)	$h_{0_{min}} = 0{,}0108$ $h_{0_{max}} = 0{,}7349$	Arithmet. Absolut	30	+ 1,40 1,70	+ 0,58 0,75	+ 0,62 0,75	18	+ 0,24 0,87	+ 0,08 0,33	+ 0,15 0,38
5	*Lindquist*	0,5000 m	$h_{0_{min}} = 0{,}1242$ $h_{0_{max}} = 0{,}4517$	Arithmet. Absolut	10	— 0,57 0,66	— 0,03 0,27	+ 0,01 0,27	10	— 0,57 0,66	— 0,03 0,27	+ 0,01 0,27
6	*Schaffernak*	0,5600 m	$h_{0_{min}} = 0{,}0288$ $h_{0_{max}} = 0{,}3082$	Arithmet. Absolut	17	+ 0,37 0,45	+ 0,46 0,56	+ 0,56 0,61	17	+ 0,37 0,45	+ 0,46 0,56	+ 0,56 0,61
7	*Schoder* und *Turner*	0,6094 m (2 Fuß)	$h_{0_{min}} = 0{,}0139$ $h_{0_{max}} = 0{,}7542$	Arithmet. Absolut	28	+ 0,54 1,04	+ 0,10 0,52	+ 0,18 0,49	20	— 0,23 0,56	— 0,17 0,28	— 0,08 0,28
8	*J. O. Jones*	0,7620 m (2½ Fuß)	$h_{0_{min}} = 0{,}0116$ $h_{0_{max}} = 0{,}4134$	Arithmet. Absolut	25	+ 0,51 0,94	+ 0,02 1,33	+ 0,14 1,38	20	+ 0,79 1,11	+ 0,74 0,94	+ 0,87 1,02
9	Eidgen. Amt für Wasserwirtschaft	0,8000 m	$h_{0_{min}} = 0{,}1000$ $h_{0_{max}} = 0{,}8000$	Arithmet. Absolut	15	— 0,37 0,39	+ 0,18 0,24	+ 0,26 0,27	15	— 0,37 0,39	+ 0,18 0,24	+ 0,26 0,27
10	*Schoder* und *Turner*	0,9144 m (3 Fuß)	$h_{0_{min}} = 0{,}0107$ $h_{0_{max}} = 0{,}8135$	Arithmet. Absolut	30	+ 0,91 1,24	+ 0,42 0,63	+ 0,53 0,70	23	+ 0,19 0,67	+ 0,26 0,53	+ 0,41 0,60
11	*Schoder* und *Turner*	1,2192 m (4 Fuß)	$h_{0_{min}} = 0{,}0109$ $h_{0_{max}} = 0{,}8226$	Arithmet. Absolut	30	+ 0,96 1,13	+ 0,50 0,69	+ 0,64 0,78	23	+ 0,40 0,63	+ 0,50 0,61	+ 0,66 0,72
			Gesamtmittel d. Abweichungen	Arithmet. Absolut	280	+ 1,02 1,44	+ 0,08 0,75	+ 0,14 0,78	163	+ 0,17 0,69	+ 0,24 0,49	+ 0,33 0,53

場合にも偏差は急激に増加するものでない事は明かである。**第三表**は亦此の Amsteg に於ける水利聯盟の測定結果を適用し著者の公式との偏差と Schweizerische Ingenieur- und Architekten-Verein (1924) の公式との偏差とを比較せるものである。

第四表は Schoder & Turner 以下近代著名研究家の観測せる 280 或は 163 の測定結果を

選び是と公式 (8), (10) 及 (18) との偏差を比較せるものである。 **第五圖**は基礎公式 (1) の μ_0 の値を著者の公式に依て計算し是を曲線を以て表せるものと觀測に依て決定せる値と

第 五 圖



Zu

Grundformel: $Q=\frac{2}{3}\mu_0\sqrt{2g}\,l\,h_0^{3/2}$

A. Formelwerte nach *Rehbock*:

a) Formel 1911: $\mu_0=0{,}605+\frac{1}{1100\,h_0}+\frac{h_0}{12\,p}$

b) " 1912: $\mu_0=0{,}605+\frac{1}{1050\,h_0-3}+0{,}08\frac{h_0}{p}$

c) " 1918: $\mu_0=0{,}605+\frac{1}{1000\,h_0}+0{,}08\frac{h_0}{p}$

d) " 1929: $\mu_0=\left[0{,}6035+0{,}0813\frac{h_0}{p}+\frac{0{,}00009}{p}\right]\left[1+\frac{0{,}0011}{h_0}\right]^{3/2}$

aus $Q=\left[1{,}782+0{,}24\frac{h_e}{p}\right]l\,h_e^{3/2}$, worin $h_e=h_0+0{,}0011$ m

h_0 und p in m

B. Durch Messung bestimmte μ_0'-Werte:

× Meßwerte des Eidg. Amtes für Wasserwirtschaft 1926
⊙ " von *Schoder* und *Turner* 1927
⊛ " von *Lindquist* 1926
✛ " " Dr. *Böß*, 1924

を比較對照せるものである。是に依て見るも著者の舊公式も新公式も互に正密程度に於ては大差なき事が解る。要するに著者の新流量公式 (18) は計算至極簡單にして而も正密度に於ても遺憾なしと言ふ事が出來る。

(橋本 憲明 抄譯)