

# 論 說 報 告

土木學會誌 第十五卷第十一號 昭和四年十一月

## DER EINGELENKBOGEN

von Shichiro Miura, Mitglied.

### Hauptsache.

Von der verschiedenen Arten der Gelenkbogen ist der Eingelenkbogen sowohl in der Ausführung als in theoretischen Abhandlungen am wenigsten berücksichtigt worden. Infolge der Gelenks im Scheitel sind die Querschnitte in der Nähe des Scheitels für die Wirkungen der Temperatur und der Nachgiebigkeit der Widerlager nicht so empfindlich wie beim eingespannten Bogen. Gegenüber dem Drei- und Zweigelenkbogen ergibt sich Ersparnis an Gelenken und ist das Widerlager bei Ausführung in Beton oder Eisenbeton monolithisch verbunden mit dem Bogen. Dieser Umstand hat den Verfasser bewogen, den bis jetzt vernachlässigten Eingelenkbogen in statischer und wirtschaftlicher Hinsicht eingehend zu untersuchen.

### Bezeichnungen

- $\delta_{ab}$ : Verschiebung eines Punktes  $a$  im Sinne einer in  $a$  angreifenden Kraft  $X_a = -1$  infolge  $X_b = -1$ ,
- $\delta_{ba}$ : desgleichen Verschiebung von  $b$  im Sinne von Kraft  $X_b = -1$  infolge  $X_a = -1$ ,
- $\delta_{aa}$ : Verschiebung des Punktes  $a$  im Sinne der in  $a$  angreifenden Kraft  $X_a = -1$  infolge  $X_a = -1$ ,
- $\delta_{bb}$ : desgleichen Verschiebung von  $b$  im Sinne von Kraft  $X_b = -1$  infolge  $X_b = -1$ ,
- $\delta_{at}$ : Verschiebung des Punktes  $a$  des Hauptsystems im Sinne der in  $a$  angreifenden Kraft  $X_a = -1$  infolge der Temperaturänderung,
- $A, B$ : Auflagerwiderstand,
- $E$ : Elastizitätsmodul,
- $f$ : Bogenpfeil,
- $F$ : die Fläche eines Bogenquerschnittes mit einer in der Bogenebene liegenden Hauptträgheitsachse,
- $g$ : gleichmässig verteilte ständige Last auf den  $lfd.m$ ,
- $H$ : Horizontalschub,
- $J$ : Trägheitsmoment bezogen auf die zur Bogenebene senkrechte Schwerachse,
- $J_s$ : dasjenige im Scheitel,
- $J_k$ : dasjenige im Kämpfer,
- $M_a$ : Moment infolge des Zustandes  $X_a = -1$ ,
- $M_b$ : Moment infolge des Zustandes  $X_b = -1$ ,
- $N_a$ : Normalkraft infolge des Zustandes  $X_a = -1$ ,
- $N_b$ : Normalkraft infolge des Zustandes  $X_b = -1$ ,

- $M$ : Moment in Querschnitt  $(x,y)$  des Bogens,  
 $N$ : Achsialkraft in Querschnitt  $(x,y)$  des Bogens,  
 $M_0$ : Moment eines einfachen Balkens für den fraglichen Momentenpunkt,  
 $H, M'$ : Grössen  $H, M$  infolge Wärmeänderung allein,  
 $M_l$ : Einspannungsmoment des linken Auflagers,  
 $M_r$ : Einspannungsmoment des rechten Auflagers,  
 $l$ : Spannweite des Bogens,  
 $l_1$ : Hälfte der Spannweite,  
 $d_s$ : Länge des kleinen Stäbchens des Bogens,  
 $\varphi$ : Neigungswinkel der Bogenachse in Querschnitt  $(x,y)$   
 $\varphi_k$ : Neigungswinkel der Bogenachse im Kämpfer,  
 $\psi$ : Pfeilverhältnis der Bogenachse,  
 $\sigma$ : zulässige Beanspruchung des Baustoffs in  $t$  auf das  $qm$ ,  
 $\varepsilon$ : linear Ausdehnungskoeffizient,  
 $p$ : gleichmässig verteilte Verkehrslast auf den  $lfd.m.$ ,  
 $Q$ : Querkraft in Querschnitt  $(x,y)$ ,  
 $W$ : Widerstandsmoment,

Weite Bezeichnungen, die nur vorübergehend Verwendung finden, sind in den einzelnen Abschnitten erklärt.

## Einleitung

In neuerer Zeit wird der Eingelenkbogen namentlich in Eisenbetonbau als Ersatz des beiderseitig eingespannten Bogens häufig angewendet, da er diesem gegenüber weniger empfindlich in Bezug auf Temperaturschwankungen und Verschiebungen der Widerlager ist.

Hinsichtlich des Einflusses der Temperatur oder der sonstigen Zusatzkräfte, die durch Verschieben der Kämpfer oder durch achsiale Verkürzung des Bogens hervorgerufen werden, verhält sich der Zweigelenkbogen, wenigstens was die Beanspruchung im Bogenscheitel betrifft, nicht günstiger als der gelenklose Bogen, so dass die Mehrkosten der Gelenkanordnung kein entsprechendes Äquivalent in dem Freihalten des Gewölbes von diesem Zusatzkräften finden.

Die infolge Wärmewirkung, ungünstigen Verhältnisse im Scheitel des gelenklosen Bogens beseitigen wir durch Einschieben eines Scheitelgelenks. Dagegen kann es unter Umständen nicht unpassend erscheinen, bloss im Scheitel ein Gelenk anzubringen nämlich dann, wenn bei sehr beschränkter

Bauhöhe die Gewölbstärke daselbst auf ein Minimum gebracht werden soll, während andererseits die Möglichkeit einer kräftigen Verstärkungen in den Kämpfern gegeben ist. Die Vorteile einer steifen Konstruktion gegenüber den Verkehrslasten verwenden sich in ebenso grosse Nachteile gegenüber den Wärmewirkungen.

Im ersten Kapitel wird ein Verfahren entwickelt werden, das es gestattet, die Einflusslinien für die Berechnung des Bogens in Frage kommenden statischen Grössen auf klare, übersichtliche und einfache Weise herzuleiten.

Wir beschränken uns auf den Fall eines symmetrischen Bogens, wie er in der Praxis in der Regel vorkommen wird.

Die hierbei angewandte Wahl der statisch unbestimmten Grössen wurde zuerst von Müller-Breslau empfohlen. Verfasser wird in nachfolgenden Untersuchungen zeigen, dass dasselbe Verfahren auch bei Eingelenkbogen in Verbindung mit einem statisch unbestimmten Hauptsystem angewandt, zu demselben Ziele führen wird.

Das Verfahren hat den Vorteil grosser Einfachheit und Genauigkeit und gewährt die Möglichkeit, den Einfluss der Querschnittsveränderung in kurzer übersichtlicher Weise zu berücksichtigen.

Im zweiten Kapitel ist die Berechnung des Eingelenkbogens entwickelt worden.

Durch Verwendung von Gelenken sollen gewisse, zum Teile nicht durch Berechnung feststellbare Einflüsse auf den gelenklosen Bogen, die zu Rissebildungen führen können, ausgeschaltet werden. Diese Einflüsse können erstens von der Ungleichartigkeit der Baustoffe und zweitens von den Wärmeänderungen herrühren. Durch Einführung von Gelenken werden diese Einflüsse beseitigt und man erhält ausserdem ein klares Bild von der Spannungsverteilung in den einzelnen Bogenquerschnitten.

Im dritten Kapitel sollen zunächst die bisher aufgestellten Formeln für die Wälzgelenke gegeben werden und dann die Versuche über die Wirkungsweise der Wälzgelenke hergeleitet werden.

Das vierte Kapitel enthält den wirtschaftlichen Vergleich der beiden Bogenarten: Gelenkloser- und Eingelenkbogen.

---

### Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel. Allgemeine Untersuchung der zweifach statisch unbestimmte vollwandige Eingelenkbogen.		Seite
A). Es sei $J \cos \varphi = J_s = \text{Konst.}$ gesetzt. ....		6
1. Das Rechnungsverfahren bei Einzellasten .....		6
I. Berechnung der Werte $X_a$ und $X_b$ .....		6
II. Berechnung des Wertes $M_i$ .....		18
III. Berechnung des Wertes $M_r$ .....		19
IV. Berechnung des Wertes $H$ .....		19
V. Berechnung der Werte $A$ und $B$ .....		20
VI. Berechnung des Wertes $M_m$ .....		20
a) Die Last $1 t$ steht links von $m$ .....		21
b) Die Last $1 t$ steht rechts von $m$ , aber noch auf der linken Bogenhälfte .....		22
c) Die Last $1 t$ steht gerade im Scheitelgelenk.....		23
d) Die Last $1 t$ steht auf der rechten Bogenhälfte .....		24
VII. Berechnung des Wertes $Q_m$ .....		25
VIII. Einflusslinie für die Normalkraft $N$ . .....		26
2. Das Rechnungsverfahren bei gleichmässig verteilter Belastung. ....		27
I. Volle Belastung .....		28
II. Einseitige Belastung mit $p/lfd.m.$ .....		29
3. Die Wirkung von Temperaturänderungen .....		30
B) Es sei $J \cos \varphi$ veränderlich und Berücksichtigung der Normalkräfte. ....		32
1. Berechnung der Werte $X_a$ und $X_b$ .....		32
2. Berechnung des Wertes $M_i$ .....		40
3. Berechnung des Wertes $M_r$ .....		40
4. Berechnung des Wertes $H$ .....		41
5. Berechnung der Werte $A$ und $B$ . .....		41
6. Die Wirkung von Temperaturänderungen .....		42
Zweites Kapitel. Die Berechnung des Eingelenkbogens. ....		43
1. Allgemeins .....		43
2. Rechnerische Ermittlung der Stützlinie .....		43
3. Die Bogenform für das Strassnersche Gesetz .....		50

4. Abschätzung der Gewölbestärken .....	53
5. Die Berechnung des Brückengewölbes .....	54
Fall I. Bogenform $y=f\zeta^2$ .....	54
1). Allgemeins .....	54
2). Ermittlung von $X$ -Linie .....	55
3). Ermittlung von $Y$ -Linie .....	57
4). Die Einflusslinien für die Momente .....	58
5). Die Wirkung der gleichmässig verteilten Verkehrslast $p$ $t/m$ .....	59
Fall II. Bogenform $y=\frac{f}{m-1}[\cosh \zeta k-1]$ .....	63
1). Das genaue Verfahren .....	63
2). Das Näherungsverfahren .....	64
Drittes Kapitel. Die Wälzgelenke aus Eisenbeton. ....	66
1. Allgemeins .....	66
2. Berechnungsweise der Gelenke aus Beton und Eisenbeton ....	67
I. Berechnung nach Köpcke .....	67
II. Berechnung nach Barkhausen .....	68
III. Berechnung nach Hertz .....	69
IV. Querzugspannungen in Gelenke .....	71
3. Wirkung der Wälzgelenke .....	76
I. Scheitelsenkung und Drehwinkel .....	77
a) Ausweichen der Widerlager .....	77
b) Temperaturänderung und Schwindung .....	78
c) Scheitelsenkung unter der ständigen Last .....	79
d) Scheitelsenkung unter der Verkehrslast .....	80
II. Gesamtwinkeländerung im Scheitel .....	80
Viertes Kapitel. Die wirtschaftliche Zweckmässigkeit des Eingelenkbogens. 82	
1. Ermittlung der Gewölbestärke .....	82
I. Berechnung der Randspannungen .....	82
II. Ermittlung der Gewölbestärke in Sechstel neben dem Scheitel .....	84
III. Ermittlung der Gewölbestärke im Kämpfer .....	86
2. Der wirtschaftliche Vergleich der beiden Bogenarten: gelenkloser- und Eingelenkbogen .....	87
I. Die Betonkosten des Wölbmaterials .....	87

II.	Die Kosten der Gelenke .....	89
3.	Rechnungsbeispiele .....	90
I.	Die Strassenbrücke (Mandaibashi) über die Shinanogawa in Niigata .....	90
II.	Die Strassenbrücke (Muko-O-Hashi) über die Mukogawa ..	92
III.	Die Strassenbrücke (Ebisu-bashi) über die Dotonbori gawa in Osaka. ....	94

### Erstes Kapitel.

#### Allgemeine Untersuchung der zweifach statisch unbestimmte vollwandige Eingelenkbogen.

A). Es sei  $J \cos \varphi = J_s = \text{Konst.}$  gesetzt.  
(ein Parabelbogen).

##### 1. Das Rechnungsverfahren bei Einzellasten.

###### I. Berechnung der Werte $X_a$ und $X_b$ .

Wir machen zunächst die vereinfachende Annahme  $J \cos \varphi = J_s = \text{Konst.}$ , eine Annahme, die für den ersten Rechnungsgang stets zulässig ist. Der Einfluss der Normalkräfte kann als unwesentlich vernachlässigt werden. Das System ist zweifach statisch unbestimmt, da im ganzen 6 unbekannte Stützenwiderstände vorhanden sind, denen 3 Gleichgewichtsbedingungen und eine statische Bedingung (das Biegemoment für das Scheitelgelenk muss = 0 sein) gegenüberstehen (Abb. 1).

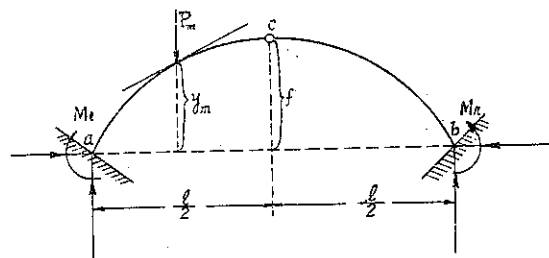


Abb. 1.

Wir ersetzen jede Einspannung durch ein Gelenk und das Einspan-

nungsmoment und führen als statisch unbestimmte Grössen die Summe bzw. Differenz der Einspannungsmomente ein (**Abb. 2**).

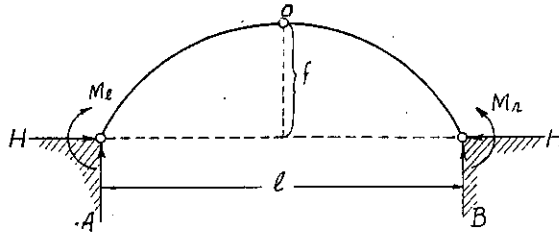


Abb. 2.

Demgemäss ist

$$M_l + M_r = X_a$$

$$M_l - M_r = X_b$$

wobei  $M_l$  und  $M_r$  mit den in **Abb. 1** angedeuteten Pfeilen als positiv eingeführt werden.

Hieraus ergibt sich

$$M_l = \frac{X_a + X_b}{2}$$

und

$$M_r = \frac{X_a - X_b}{2}.$$

Von Maxwell wurde nachgewiesen, dass

$$\delta_{ab} = \delta_{ba}.$$

Die Gleichung besagt: Die Verschiebung des Punktes  $a$  in der Richtung der Krafteinheit in  $a$  infolge der Krafteinheit in  $b$  ist gleich der Verschiebung des Punktes  $b$  in der Richtung der Krafteinheit in  $b$  infolge der Krafteinheit in  $a$ .

$$\delta_{ab} = \int M_b M_a \frac{ds}{EJ} = \int \frac{M_b M_a dx}{EJ \cos \varphi} = \int \frac{M_b M_a dx}{EJ_s} \quad (1)$$

$$EJ_s \delta_{ab} = \int M_a M_b dx = 0.$$

Denn die Momente  $M_a$  für zwei symmetrisch zum Scheitel gelegene Punkte sind gleich gross und haben gleiches Vorzeichen, während die Momente  $M_b$  zwar auch gleich gross sind, aber verschiedenes Vorzeichen haben. Das Integral über alle Produkte  $M_a M_b dx$  ist daher = 0. Nach Maxwellschen Satz ist dann auch  $\delta_{ba} = \delta_{ab} = 0$ .

(1) Verg. Kirchhoff, Statik der Bauwerke Bd. II Seite 158.

Setzt man  $X_a$  und  $X_b=0$ , so werden auch  $M_l$  und  $M_r=0$ ; woraus man erkennt, dass das statisch bestimmte Hauptsystem aus einem Dreigelenkbogen besteht (**Abb. 3**)

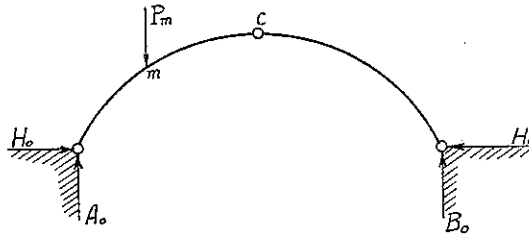


Abb. 3.

Für ein zweifach statisch unbestimmtes Tragwerk lauten die allgemeinen Elastizitätsgleichungen:

$$1 \cdot \delta_a = \sum P_m \delta_{ma} - X_a \delta_{aa} - X_b \delta_{ab} + \delta_{at} - L_a$$

$$1 \cdot \delta_b = \sum P_m \delta_{mb} - X_a \delta_{ba} - X_b \delta_{bb} + \delta_{bt} - L_b$$

In diesen Gleichungen bedeuten:

$L_a$ : virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte im statisch bestimmten Hauptsystem, infolge des Belastungszustandes  $X_a=1$ .

$L_b$ : virtuelle Arbeit der Auflagerkräfte im statisch bestimmten Hauptsystem, infolge des Belastungszustandes  $X_b=1$ .

Für alle Paare konjugierten Achsen werden die Elastizitätsgleichungen voneinander unabhängig und lassen sich in der Form darstellen:

$$X_a = \frac{\sum P_m \delta_{ma} + \delta_{at} - L_a}{\delta_{aa}}$$

$$X_b = \frac{\sum P_m \delta_{mb} + \delta_{bt} - L_b}{\delta_{bb}},$$

und für die Wirkung der Einzellast  $P_m$  in  $m$  allein, unter Beachtung von

$$\delta_{ab}=0; \quad \delta_{at}, \delta_{bt}=0; \quad L_a, L_b=0$$

erhalten wir

$$X_a = P_m \frac{\delta_{ma}}{\delta_{aa}}$$

$$X_b = P_m \frac{\delta_{mb}}{\delta_{bb}}.$$

Multiplizieren wir Zähler und Nenner mit  $E J_s$ , so erhalten wir



$$X_a = P_m \frac{E J_s \delta_{ma}}{E J_s \delta_{aa}},$$

worin  $\delta_{ma}$  die Verschiebung des Punktes  $m$  in Richtung der in  $m$  angreifenden Kraft  $P_m$  infolge des Zustandes  $X_a = -1$  ist und

$$\delta_{aa} = \int \frac{M_a^2 dx}{E J_s}.$$

Ferner ist

$$X_b = P_m \frac{E J_s \delta_{mb}}{E J_s \delta_{bb}}$$

worin  $\delta_{mb}$  die Verschiebung des Punktes  $m$  in Richtung der in  $m$  angreifenden Kraft  $P_m$  infolge des Zustandes  $X_b = -1$  ist.

Weiter ist

$$\delta_{bb} = \int \frac{M_b^2 dx}{E J_s}.$$

Für die Berechnung der Einflusslinien ist  $P_m = It$  zu setzen, sodass man als Gleichungen der Einflusslinien für  $X_a$  und  $X_b$  erhält:

$$X_a = 1 \frac{E J_s \delta_{ma}}{E J_s \delta_{aa}}$$

$$X_b = 1 \frac{E J_s \delta_{mb}}{E J_s \delta_{bb}}.$$

Wir berechnen zunächst die Verschiebungen  $E J_s \delta_{ma}$  und brauchen zu diesem Zweck die Momentenfläche infolge der Belastung des statisch unbestimmten Hauptsystems mit  $X_a = -1$ . Zu diesem Zweck ist  $X_b = 0$  zu setzen, da auf das Hauptsystem nur  $X_a = -1$  wirken soll.

Da ferner

$$M_l = \frac{X_a + X_b}{2}$$

und

$$M_r = \frac{X_a - X_b}{2}$$

so erhält man für  $X_b = -1$  die Werte

$$M_{l_a} = -\frac{1}{2}$$

und

$$M_{r_a} = -\frac{1}{2}.$$

Diese Momente sind also mit dem umgekehrten Pfeilsinn der wirklichen Momente  $M_i$  und  $M_r$  anzubringen (**Abb. 4**).

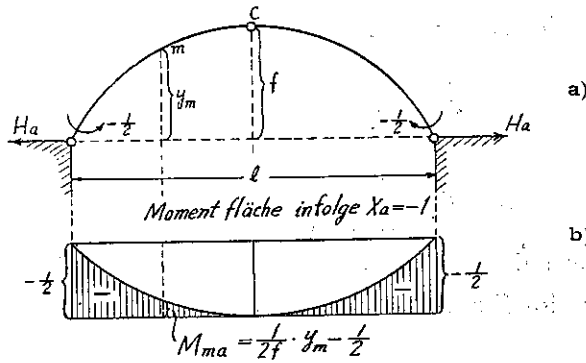


Abb. 4.

Infolge dieser Belastung werden die senkrechten Auflagerdrücke  $= 0$ , während sind  $H_a = \frac{1}{2f}$  (mit dem nach aussen gerichteten Pfeilsinn) mittels der Bedingung "das Biegemoment für das Scheitelgelenk muss  $= 0$  sein" ergibt.

Das Biegemoment für einen beliebigen Punkt  $m$  ist bestimmt mittels der Gleichung

$$\begin{aligned} M_{ma} &= H_a y_m - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2f} y_m - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Für das Scheitelgelenk  $c$  ist zu setzen  $y_m = f$ , so dass

$$M_{ca} = \frac{1}{2f} f - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Die Momentenfläche hat mithin die in **Abb. 4, b** dargestellte Form. Sämtliche Momente sind negativ.

Zwecks Bestimmung der senkrechten Verschiebungen  $EJ_s \delta_{ma}$  benutzen wir das Verfahren der  $w$ -Gewichte. Wir denken uns den kontinuierlich gekrümmten Bogen durch einem Stabzug  $0, 1, m-1, m, m+1, c, \dots$  ersetzt (**Abb. 5**), also durch einem Stabzug mit steifen Knotenpunktverbindungen, der nur im Punkt  $c$  durch ein Gelenk unterbrochen ist.

Die  $w$ -Gewichte  $w_{1a}, w_{(m-1)a}, w_{ma}, w_{(m+1)a}$  und die auf der andern Seite anzubringenden entsprechenden  $w$ -Gewichte sind dann nach der allgemeinen

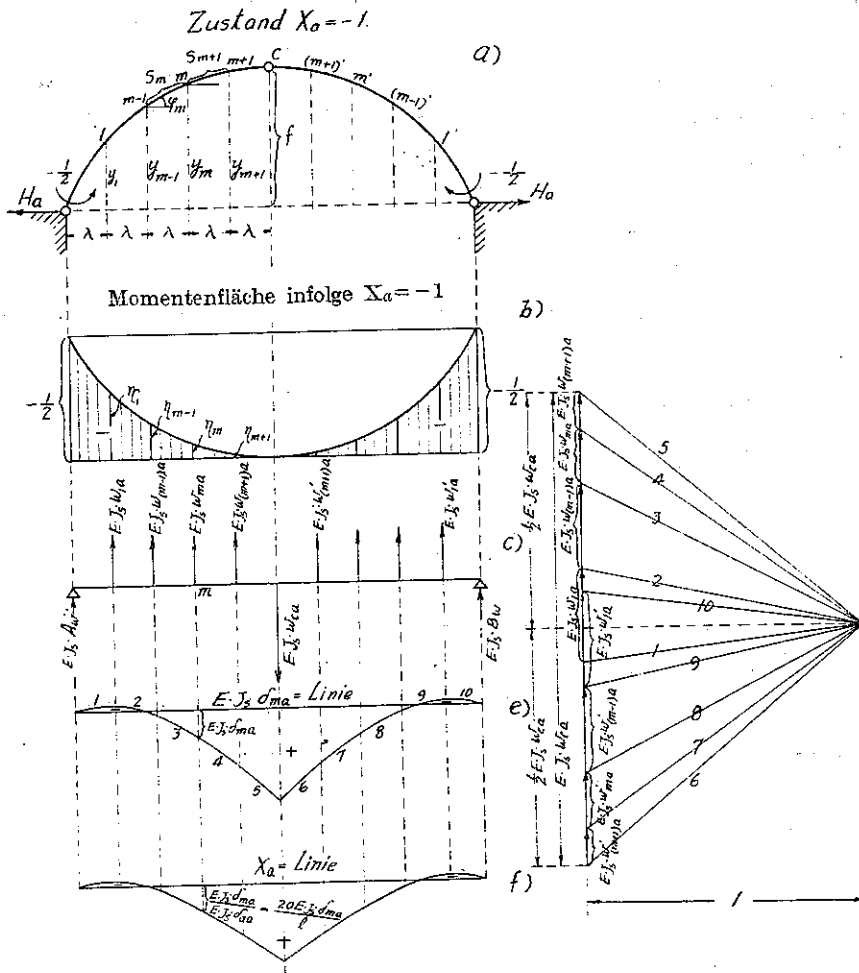


Abb. 5.

für Stabzüge mit steifen Knotenpunktverbindungen geltenden Formel zu berechnen.

$$w_{ma} = \Delta \vartheta_{ma} = \frac{M_{(m-1)a} + 2 M_{ma}}{6 E J_m} S_m + \frac{M_{(m+1)a} + 2 M_{ma}}{6 E J_{m+1}} S_{m+1} \quad (1)$$

Worin  $\Delta \vartheta_{ma}$  die Winkeländerung des Polygonwinkels  $\vartheta_m$  im Punkt  $m$  infolge  $X_a$  ist,

$S_m, S_{m+1}$ , die Länge der Stäbe,

(1) vergl. Kirchhoff, Statik der Bauwerke Bd. II Seite 21 u. 29.

$M_{(m-1)a}$ ,  $M_{ma}$ ,  $M_{(m+1)a}$  die Momente an den Stabenden  $m-1$ ,  $m$  und  $m+1$  sind.

Wir wählen den stellvertretenden Stabzug zweckmässig so, dass die Horizontalprojektionen der Stäbe konstant  $=\lambda$  sind. Dann gibt für den Stab  $S_m$  die Beziehung  $S_m = \frac{\lambda}{\cos \varphi}$ , dann wird,

$$w_{ma} = \frac{M_{(m-1)a} + 2 M_{ma}}{6 E J_m \cos \varphi_m} \lambda + \frac{M_{(m+1)a} + 2 M_{ma}}{6 E J_{m+1} \cos \varphi_{m+1}} \lambda.$$

Da ferner voraussetzungsgemäss das Trägheitsmoment konstant angenommen ist, so ist

$$J_m = J_{m+1} = J$$

und  $J \cos \varphi_m = J \cos \varphi_{m+1} = J \cos \varphi = J_s$ ,

somit ergibt sich

$$w_{ma} = \frac{M_{(m-1)a} + 2 M_{ma}}{6 E J_s} \lambda + \frac{M_{(m+1)a} + 2 M_{ma}}{6 E J_s} \lambda.$$

Benutzt man für diese  $w$ -Gewichte die Polweite "1", so erhält man für die Verschiebungen  $\delta_{ma}$  als Seillinie der  $w$ -Kräfte.

Benutzt man für die  $E J_s$  fachen  $w$ -Gewichte ebenfalls die Polweite "1" (**Abb. 5, d**), so erhält man demgemäss die Verschiebungen  $E J_s \delta_{ma}$ .

Aus der Momentenfläche des Zustandes  $X_a = -1$  (**Abb. 5, b**) erhält man die Momente

$$M_{(m-1)a} = -\eta_{m-1}, \quad M_{ma} = -\eta_m$$

und  $M_{(m+1)a} = -\eta_{m+1}$ .

Setzt man diese Werte in die für  $w_{ma}$  aufgestellte Formel ein, so ergibt sich

$$w_{ma} = -\frac{\eta_{m-1} + 4 \eta_m + \eta_{m+1}}{6 E J_s} \lambda,$$

mithin ist  $E J_s w_{ma} = -(\eta_{m-1} + 4 \eta_m + \eta_{m+1}) \frac{\lambda}{6}$ .

Die  $E J_s$  fachen  $w$ -Gewichte haben sich mithin als negativ ergeben, sind also mit nach oben gerichtetem Pfeil einzuführen.

Für das dem Gelenkpunkt  $c$  entsprechende  $w$ -Gewicht muss eine andere Formel benutzt werden, da hier die Voraussetzung einer steifen Knotenpunktverbindung nicht mehr zutrifft, wie sie für die übrigen  $w$ -Gewichte

Bedingung war. Wir benutzen zu diesem Zweck die sogenannte Sehnens-Formel.

Längenänderung einer Stabzugsehne.

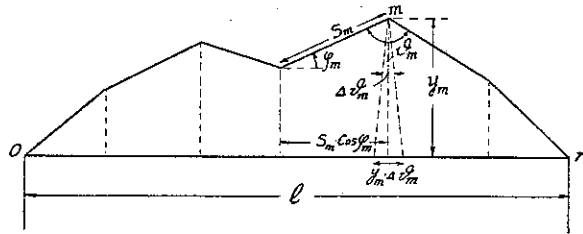


Abb. 6.

Die Längenänderung der zwei Knoten  $o$  und  $n$  eines Stabzuges verbindenden Sehne setzt sich zusammen aus den Längenänderungen  $\Delta s$  und Winkeländerungen  $\Delta \vartheta$ . Da die Projektion einer Längenänderung auf Richtung der Sehne gleich  $\Delta S_m \cos \varphi_m$  ist, so liefert die Änderung der Stablänge den Beitrag

$$\Delta l_1 = \Delta S_m \cos \varphi_m,$$

während die Vergrößerung von  $\vartheta_m$  und  $\Delta \vartheta_m$  erzeugt für sich allein  $\Delta l_2 = y_m \Delta \vartheta_m$ .

Im ganzen entsteht daher:

$$\Delta l = \Sigma \Delta l_1 + \Sigma \Delta l_2 = \Sigma \Delta S \cos \varphi + \Sigma y \Delta \vartheta$$

Da 
$$\Delta S \cos \varphi = \frac{\Delta S}{S} S \cos \varphi = \frac{\sigma}{E} S \cos \varphi$$

so wird 
$$\Delta l = \Sigma \frac{\sigma}{E} S \cos \varphi + \Sigma y \Delta \vartheta$$

worin 
$$\sigma = \pm \frac{N}{F}$$

wenn  $N$  die Normalkraft des betreffenden Stabes bedeutet. Das positiv Vorzeichen gilt für Zug-, das negativ für Drucknormalkräfte.

Bei der Ableitung der Formel wird keinerlei Voraussetzung über die Art des Stabzuges gemacht. Sie wird daher sowohl für Stabzüge mit gelenkigen als auch mit starren Knotenpunkten gültig sein.

Das erste Glied auf der rechten Seite dieser Formel berücksichtigt den Einfluss der Normalkräfte, der als unwesentlich vernachlässigt werden kann. In dem zweiten Glied ist  $\Delta \vartheta = w$ , also bereits bekannt. (Für den vorliegenden Fall, Zustand  $X_a = -1$  ist  $\Delta \vartheta_{ma} = w_{ma}$ ).

Da ferner unter der Annahme starrer Widerlager  $\Delta l = 0$ , so gilt die Beziehung

$$0 = \sum y_m w_{ma}.$$

Mit Bezug auf den vorliegenden Stabzug muss daher sein

$$0 = y_1 w_{1a} + y_{m-1} w_{(m-1)a} + y_m w_{ma} + y_{m+1} w_{(m+1)a} + f w_{ca} \\ + y'_{(m+1)a} w'_{(m+1)a} + y'_m w'_{ma} + \dots$$

Da wegen der Symmetrie

$$y'_{m+1} = y_{m+1}, \quad y'_m = y_m \quad \text{usw., ferner}$$

$$w'_{(m+1)a} = w_{(m+1)a}, \quad w'_{ma} = w_{ma} \quad \text{usw., so folgt}$$

$$0 = 2 y_1 w_{1a} + 2 y_{m-1} w_{(m-1)a} + 2 y_m w_{ma} + 2 y_{m+1} w_{(m+1)a} + f w_{ca}.$$

Zu dieser Formel ist nur  $w_{ca}$  unbekannt, so dass man erhält

$$w_{ca} = -\frac{2}{f} (y_1 w_{1a} + y_{m-1} w_{(m-1)a} + y_m w_{ma} + y_{m+1} w_{(m+1)a})$$

$$\text{bezw. } EJ_s w_{ca} = -\frac{2}{f} (y_1 EJ_s w_{1a} + y_{m-1} EJ_s w_{(m-1)a} + y_m EJ_s w_{ma} \\ + y_{m+1} EJ_s w_{(m+1)a}).$$

Der Klammerausdruck erstreckt sich also nur über *eine* Bogenhälfte, sodass man allgemein schreiben kann:

$$EJ_s w_{ca} = -\frac{2}{f} \sum_0^{\frac{l}{2}} y EJ_s w_a.$$

Die Gewichte  $EJ_s w_a$  sind hierin nach der auf Seite 12 entwickelten Formel bekannt. Das Gewicht  $EJ_s w_a$  hat sich mithin also *positiv* ergeben, da alle unter dem  $\Sigma$ - Zeichen stehenden Gewichte  $EJ_s w_a$  *negativ* sind, muss daher mit dem umgekehrten Pfeilsinne der übrigen  $w$ -Kräfte eingesetzt werden, also mit dem Pfeil nach unten.

Nunmehr denken wir uns einen einfachen Balken mit diesen Gewichten  $EJ_s w_a$  belastet (**Abb. 5, c**). Das mit der Polweite "1" (**Abb. 5, d**) zu diesen  $EJ_s$ -fachen  $w$ -Kräften gezeichnete Seilpolygon liefert die gesuchten Verschiebungen  $EJ_s \delta_{ma}$  (**Abb. 5, e**).

Man achte hierbei darauf, dass die Polweite "1" in demselben Massstab dargestellt wird, in welchen die  $EJ_s$ -fachen  $w$ -Kräfte aufgetragen sind. Die Verschiebungen  $EJ_s \delta_{ma}$  sind dann im Massstab der Systemzeichnung abzugreifen.

Rechnerisch erhält man  $EJ_s \delta_{ma}$  als Moment für den Punkt  $m$  des mit

den  $EJ_s w_a$ -Kräften belasteten Balkens (**Abb. 5, c**).<sup>(1)</sup>

Demgemäss ergibt sich

$$EJ_s \delta_{ma} = EJ_s A_w 3\lambda + EJ_s w_{1a} 2\lambda + EJ_s w_{(m-1)a} \lambda.$$

Hierin ist

$$A_w = \frac{w'_{1a} + 2w'_{(m-1)a} + 3w'_{ma} + 4w'_{(m+1)a} - 5w_{ra} + 6w_{(m+1)a} + \dots + 9w_{1a}}{10}.$$

Zur Bestimmung der  $X_a$ -Linie ist noch der Werte  $EJ_s \delta_{aa}$  zu bestimmen.

Man erhält

$$\begin{aligned} EJ_s \delta_{aa} &= \int_0^l M_a^2 \cdot dx = \int_0^l \left( \frac{1}{2f} y - \frac{1}{2} \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^l \left( \frac{y}{f} - 1 \right)^2 dx \\ &= \frac{1}{20} l. \end{aligned}$$

Dividiert man sämtliche gefundenen Verschiebungen  $EJ_s \delta_{ma}$  einzeln durch  $EJ_s \delta_{aa} = \frac{l}{20}$ , so ergibt sich mittels der Beziehung

$$X_a = 1 \frac{EJ_s \delta_{ma}}{EJ_s \delta_{aa}}$$

die Einflusslinie für die statisch unbestimmte Grösse  $X_a$  (**Abb. 5, f**).

Wir gehen nunmehr über zur Berechnung der Einflusslinie für  $X_b$ .

Für diese gilt die Gleichung

$$X_b = 1 \frac{EJ_s \delta_{mb}}{EJ_s \delta_{bb}}.$$

Die in dieser Gleichung vorkommenden Verschiebungen sind aus dem Zustand  $X_b = -1$  zu bestimmen, der in **Abb. 7** dargestellt ist.

Da

$$M_l = \frac{X_a + X_b}{2} \quad \text{und} \quad M_r = \frac{X_a - X_b}{2}$$

so erhält man für

$$X_b = -1 \quad M_{l_b} = -\frac{1}{2}$$

und

$$M_{r_b} = -\left(-\frac{1}{2}\right) = +\frac{1}{2}.$$

<sup>(1)</sup> vergl. Kirchhoff, Statik der Bauwerke, Bd. 2, Seite 29.

Ein Horizontalschub wird durch diese Belastung nicht hervorgerufen. Da nämlich  $A_b = B_b = \frac{1}{l}$ , wie sich mittels einer Momentengleichung für einen Auflagerpunkt ergibt, so würde man durch die Bedingung "das Biegemoment für das Scheiteltgelenk muss=0 sein" die Gleichung erhalten

$$H_b f + A_b \frac{l}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad \text{oder mit } A_b = \frac{1}{l}:$$

$$H_b f + \frac{1}{l} \frac{l}{2} - \frac{1}{2} = 0, \quad \text{woraus } H_b f = 0.$$

Da ferner  $f$  nicht=0 ist, muss  $H_b = 0$  sein.

Somit ergibt sich die in **Abb. 7, b** dargestellte Momentenfläche. Am linken Auflager ist das Moment  $-\frac{1}{2}$ , am rechten  $+\frac{1}{2}$ , im Gelenk 0. Im übrigen verläuft die Momentenlinie geradlinig.

Für die Punkte 1,  $m-1$ ,  $m$ ,  $m+1$ ..... ergeben sich die Momente

$$\begin{aligned} M_{1b} &= -\zeta_1 \\ M_{(m-1)b} &= -\zeta_{m-1} \\ M_{mb} &= -\zeta_m \\ M_{(m+1)b} &= -\zeta_{m+1}. \end{aligned}$$

Für die entsprechenden Punkte der andern Bogenhälfte werden die Momente ebensogross, erhalten aber das entgegengesetzte Vorzeichen, sind also positiv. Für die Gewichte  $EJ_s w_{mb}$  der linken Bogenhälfte erhält man demgemäss nach Seite 12

$$EJ_s w_{mb} = -(\zeta_{m-1} + 4\zeta_m + \zeta_{m+1}) \frac{\lambda}{6}.$$

Für die rechte Bogenhälfte ergibt sich sinngemäss

$$EJ_s w'_{mb} = +(\zeta_{m-1} + 4\zeta_m + \zeta_{m+1}) \frac{\lambda}{6}.$$

Für die linke Bogenhälfte sind also die  $EJ_s$ -fachen  $w$ -Gewichte mit dem nach oben gerichteten Pfeil und für die rechte Bogenhälfte mit dem nach unten gerichteten Pfeil anzubringen.

Ferner ergibt sich

$$EJ_s w_{cb} = -\frac{2}{f} \sum_0^{\frac{l}{2}} y EJ_s w_b.$$

Da ferner die Gewichte  $w_b$  für zwei symmetrisch gelegene Punkte gleich



gross sind, aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, so wird

$$\sum_0^{\frac{l}{2}} y w_b = 0$$

mithin auch

$$\sum_0^{\frac{l}{2}} y E J_s w_b = 0,$$

somit

$$E J_s w_{cb} = -\frac{2}{f} \sum_0^{\frac{l}{2}} y E J_s w_b = 0.$$

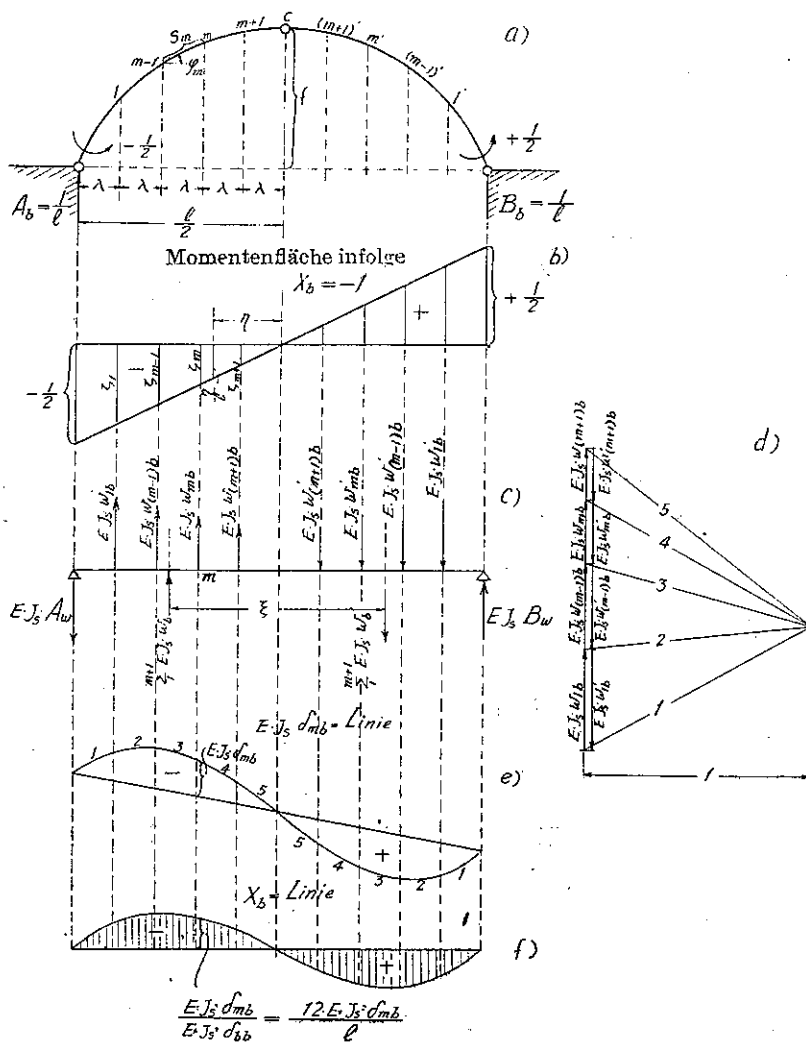


Abb. 7.

Wir belasten jetzt wieder wie beim Zustand  $X_a = -1$  einen einfachen Balken mit den Gewichten  $EJ_s w_b$  (**Abb. 7, c**) und zeichnen zu diesen Gewichten mit der Polweite "1" (**Abb. 7, d**) das Seilpolygon, aus dem dann unmittelbar die Verschiebungen  $EJ_s \delta_{mb}$  entnommen werden können (**Abb. 7, e**). Die  $EJ_s \delta_{mb}$ -Linie ist mithin antisymmetrisch. In der Mitte, also im Gelenk, ist die Verschiebung = 0.

Für die linke Bogenhälfte erhält man nach oben gerichtete, für die rechte Bogenhälfte nach unten gerichtete Verschiebungen.

Rechnerisch findet man nach **Abb. 7, c**,

$$EJ_s \delta_{mb} = -EJ_s A_w \cdot 3\lambda + EJ_s w_b \cdot 2\lambda + EJ_s w_{(m-1)b} \lambda,$$

worin 
$$EJ_s A_w = -\frac{\xi}{l} \sum_1^{m+1} EJ_s w_b.$$

Zur Berechnung von  $EJ_s \delta_{bb}$  benutzen wir die Formel

$$EJ_s \delta_{bb} = \int M_b^2 dx.$$

Für einen beliebigen, von der Mitte des Bogens im Abstände  $x$  befindlichen Querschnitt ist

$$M_b = -\frac{x}{l},$$

sodass 
$$\int M_b^2 dx = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x^2}{l^2} dx = \frac{l}{12}$$

$$EJ_s \delta_{bb} = \frac{l}{12}.$$

Nunmehr ist

$$X_b = 1 \frac{E J_s \delta_{mb}}{E J_s \delta_{bb}} = \text{Gleichung der } X_b\text{-Linie.}$$

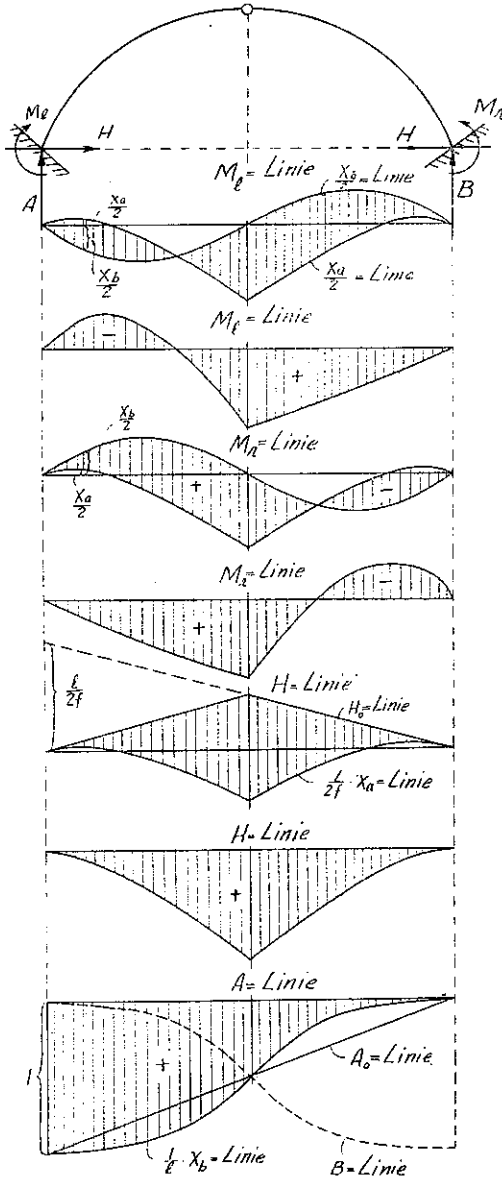
Dividiert man daher jede Ordinate der  $EJ_s \delta_{mb}$ -Linie einzeln durch  $EJ_s \delta_{bb} = \frac{l}{12}$ , so erhält man die  $X_b$ -Linie (**Abb. 7, f**).

Nach Ermittlung der Einflusslinie für die statisch unbestimmten Grössen  $X_a$  und  $X_b$  können nunmehr leicht die Einflusslinien für alle übrigen in Betracht kommenden statischen Grössen abgeleitet werden.

## II. Berechnung des Wertes $M_i$ .

Wir benutzen die Formel  $M_i = \frac{X_a + X_b}{2}$ . Man erhält daher die  $M_i$ -Linie durch Addition der halben Ordinaten der  $X_a$ -Linie und der  $X_b$ -Linie.

Demgemäss hat die  $M_t$ -Linie die in **Abb. 8** dargestellte Form. In **Abb.**



**8, c** sind die gefundenen Ordinaten der  $M_t$ -Linie von einer Wagerechten abgetragen.

**III. Berechnung des Wertes  $M_t$ .**

Da  $M_t = \frac{X_a - X_b}{2}$ , so

erhält man die  $M_t$ -Linie durch Subtraktion der halben Ordinaten der  $X_b$ -Linie von den halben Ordinaten der  $X_a$ -Linie.

Demgemäss aht die  $M_t$ -Linie die in **Abb. 9** dargestellte Form. In **Abb. 9, b** sind wieder die Ordinaten der  $M_t$ -Linie von der Wagerechten abgetragen.

**IV. Berechnung des Wertes  $H$ .**

Wir benutzen die Formel

$$H = H_0 - H_a X_a - H_b X_b^{(1)}$$

Nach Seite 16 ist  $H_0 = 0$ , sodass man die

(1) nach der allgemein für eine beliebige statische Grösse  $Y$  eines zweifach statisch unbestimmten Systems geltenden Formel  $Y = Y_0 - Y_a X_a - Y_b X_b$ , worin  $Y$  die wirkliche Spannkraft  $Y_0$ ,  $Y_a$  und  $Y_b$  die Spannkraften eines statisch bestimmten Systems. Vergl. H. Müller-Breslau, Die Graphische Statik der Baukonstruktionen, Bd. II, I Abt. 5 Aufl., S. 18.

einfache Formel erhält:

$$H = H_0 - H_a X_a$$

worin ist  $H_0$  der wagerechte Schub am linken Auflager infolge Belastung des statisch unbestimmten Hauptsystems mit den Kräften  $P$ .

Berücksichtigt man ferner, dass  $H_a = -\frac{1}{2f}$  als nach aussen gerichteter Schub (gegenüber dem nach innen gerichteten Schub  $H_0$ ) negativ ist, so folgt

$$H = H_0 + \frac{1}{2f} X_a.$$

Die  $H_0$ -Linie ist bekanntlich ein Dreieck mit der Spitze unter dem Gelenk. Die Geraden des Dreiecks schneiden von den Auflagersenkrechten die Ordinaten  $\frac{l}{2f}$  ab.

Zu dieser  $H_0$ -Linie ist dann die mit  $\frac{1}{2f}$  multiplizierte  $X_a$ -Linie zu addieren. Man erhält demgemäss die in **Abb. 10** dargestellte Form der  $H$ -Linie. In **Abb. 10, b** sind die gefundenen Ordinaten der  $H$ -Linie von einer Wagerechten abgetragen.

#### V. Berechnung der Werte $A$ und $B$ .

Wir benutzen die Formel

$$A = A_0 - A_a X_a - A_b X_b.$$

Hierin ist  $A_a = 0$  (vergl. Seite 10), sodass

$$A = A_0 - A_b X_b.$$

Da  $A_b = -\frac{1}{l}$  (Seite 16), so folgt

$$A = A_0 - \frac{1}{l} X_b.$$

Von den Ordinaten der  $A_0$ -Linie sind daher die mit  $\frac{1}{l}$  multiplizierten Ordinaten der  $X_b$ -Linie abzuziehen. Man erhält somit die in **Abb. 11** dargestellte Form der  $A$ -Linie.

Die  $B$ -Linie ist das Spiegelbild der  $A$ -Linie (in **Abb. 11** punktiert eingezeichnet).

#### VI. Berechnung des Wertes $M_m$ .

Für die Berechnung der  $M_m$ -Linie lässt sich folgendes einfaches Verfahren entwickeln. Wir untersuchen den Einfluss der wandernden Last  $1 t$  für

verschiedene Laststellungen.

a) Die Last  $l$  steht links von  $m$  (Abb. 12).

Aus den bekannten Einflusslinien für  $H$ ,  $M_l$  und  $M_r$  ergeben sich die Werte  $H=1\eta_H$  (Abb. 12, d),  $M_l=-1\eta_{M_l}$  (Abb. 12, b),  $M_r=+1\eta_{M_r}$  (Abb. 12, c).

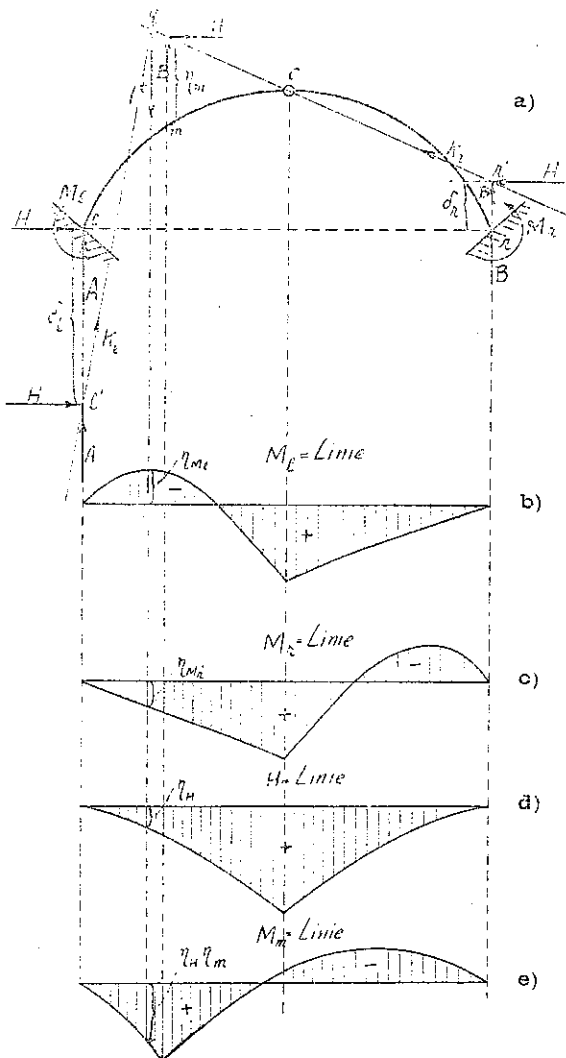


Abb. 12.

Die durch  $l$  hervorgerufenen Kämpferdrucke  $K_l$  und  $K_r$  sind die resultierenden aus  $H$ ,  $A$  und  $M_l$  bzw.  $H$ ,  $B$  und  $M_r$ . Zerlegen wir den Kämpferdruck  $K_l$  senkrecht unter dem Einspannungspunkt  $l$  im Punkt  $l'$  wieder in  $A$  und  $H$ , so muss  $H\delta_l = M_l$  sein.

Da für die vorliegende Laststellung  $M_l$  negativ ist, so muss der Punkt  $l'$  unterhalb Punkt  $l$  liegen, weil dann das Einspannungsmoment  $M_l = -H\delta_l$  ist. Aus der Bedingung  $H\delta_l = M_l$  erhält man sodann

$$\delta_l = \frac{M_l}{H} = \frac{\eta_{M_l}}{\eta_H}$$

Entsprechend muss sein  $H\delta_r = M_r$ .

Hier ist  $M_r$  aber positiv ( $= +1\eta_{M_r}$ ).

Denken wir uns also im Punkt  $r'$  im Abstand  $\delta_r$  oberhalb von  $r$  den Kämpfer-

druck  $K_r$  wieder zerlegt in  $H$  und  $B$ , so muss  $H\delta_r = M_r$  sein. Der Punkt  $r'$  muss oberhalb von  $r$  liegen, damit das Einspannungsmoment  $H\delta_r$  positiv

wird. Aus der Bedingung  $H \delta_r = M_r$  folgt dann

$$\delta_r = \frac{M_r}{H} = \frac{\eta_{M_r}}{\eta_H}.$$

Nach Festlegung der Punkte  $l'$  und  $r'$  kann dann zunächst die Richtung von  $K_r$  bestimmt werden, da  $K_r$  infolge der unbelasteten rechten Bogenhälfte durch das Scheitelgelenk gehen muss. Da sich ferner  $K_l$ ,  $K_r$  und  $l t$  in einem Punkt schneiden müssen, so muss durch den Schnittpunkt von  $K_r$  und  $l t$ , d.h. durch den Punkt  $q$ , auch der Kämpferdruck  $K_l$  gehen, wodurch die Richtung von  $K_l$  ebenfalls bestimmt ist.

Nunmehr ermitteln wir das Moment infolge der vorliegenden Laststellung von der *rechten* Seite aus, indem wir senkrecht über  $m$  den Kämpferdruck  $K_r$  wieder zerlegen in  $H$  und  $B$ , wobei  $B$  durch den Momentenpunkt geht. Wir erhalten sodann

$$M_m = +H \eta_m + \eta_B \eta_m.$$

Der Abstand  $\eta_m$  wird aus der Zeichnung abgegriffen. Senkrecht unter der Last  $l t$  wird dieser Wert als Ordinate aufgetragen, ist mithin Einflussordinate für  $M_m$  (**Abb. 12, e**).

Dasselbe Verfahren wird dann für eine genügende Anzahl weiterer Laststellungen links vom Punkt  $m$  wiederholt. Man erkennt noch, dass das Auftragen von  $\delta_l$  und Einzeichnen von  $K_l$  überflüssig war, da die Richtung von dem zu zerlegenden Kämpferdruck  $K_r$  bereits durch  $\delta_r$  und das Scheitelgelenk festlag.

b) Die Last  $l t$  steht rechts von  $m$ , aber noch auf der linken Bogenhälfte (**Abb. 13**).

Wie bei der vorigen Laststellung werden bestimmt

$$H = 1 \eta_H \quad (\text{Abb. 13, b})$$

$$M_l = -1 \eta_{M_l} \quad (\text{Abb. 13, c})$$

$$M_r = +1 \eta_{M_r} \quad (\text{Abb. 13, d}).$$

Alsdann ist wieder

$$\delta_l = -\frac{\eta_{M_l}}{H} = -\frac{\eta_{M_l}}{\eta_H}$$

und

$$\delta_r = \frac{\eta_{M_r}}{H} = \frac{\eta_{M_r}}{\eta_H},$$

womit die Punkte  $l'$  und  $r'$  bestimmt sind.

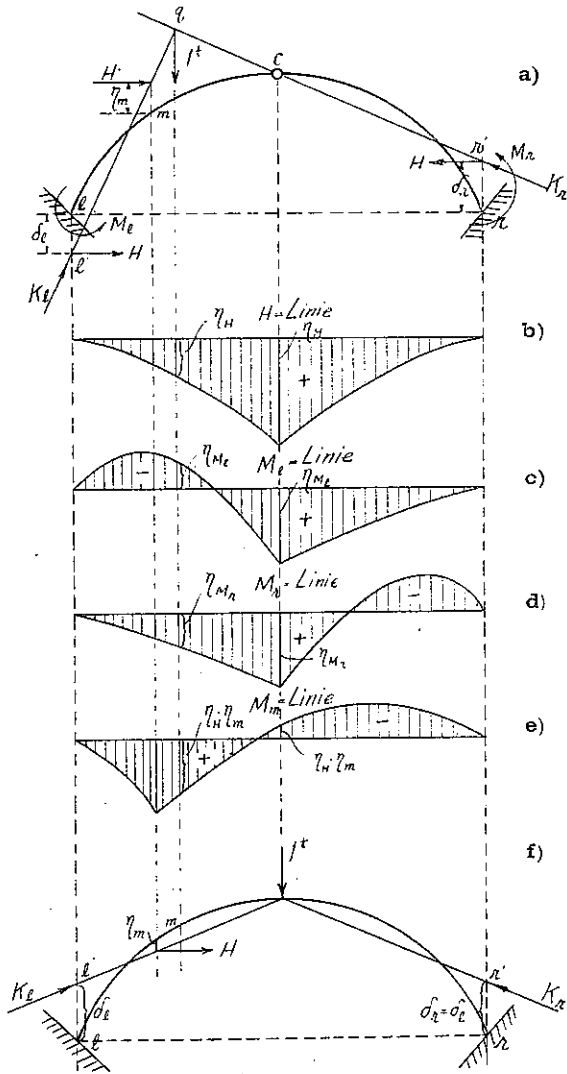


Abb. 13.

Der Kämpferdruck  $K_r$  muss wieder durch das Scheitelgelenk gehen, da die rechte Bogenhälfte immer noch unbelastet ist (**Abb. 13, a**).

Ausserdem müssen sich  $K_l$  und  $K_r$  im Punkte  $q$  schneiden, womit auch die Richtung von  $K_l$  bestimmt ist. Nunmehr wird senkrecht über  $m$   $K_l$  in  $H$  und  $A$  zerlegt und von links abgetrennten Teil aus gefunden

$$M_m = +H \eta_m + \eta_H \eta_m.$$

Dieser Wert wird dann senkrecht unter der Last  $1t$  als Ordinate aufgetragen (**Abb. 13, e**).

Im vorliegenden Fall mussten die Richtungen der beiden Kämpferdrucke  $K_l$  und  $K_r$  eingezeichnet werden im Gegensatz zu der unter **a**) besprochenen Belastung, wo die Kenntnis der Richtung von  $K_r$  genügte.

**c**) Die Last  $1t$  steht gerade im Scheitelgelenk (**Abb. 13, f**).

In diesem Fall sind  $\eta_{M_l}$  und  $\eta_{M_r}$  gleich gross, und zwar beide positiv, so dass

$$\delta_l = \delta_r = \frac{\eta_{M_l}}{\eta_H}.$$

Beide müssen also oberhalb von  $l$  bzw.  $r$  abgetragen werden. Da  $K_l$  und  $K_r$  infolge der beiden unbelasteten Trägerhälften durch das Scheitelgelenk

gehen und sich mit der Last  $1 t$  in einem Punkt schneiden müssen, so erkennt man, dass die drei Kräfte sich gerade im Scheitelgelenk schneiden müssen. Da ferner im vorliegenden Fall  $K_i$  unterhalb von  $m$  wirkt, so erhält man vom links abgetrennten Teil aus

$$M_m = -H \eta_m = -\eta_H \eta_m.$$

Dieser Wert wird senkrecht unter der Last  $1 t$ , d.h. also senkrecht unter der Last  $1 t$ . d.h. also senkrecht unter dem Scheitelgelenk als *negative* Ordinate

nach oben abgetragen, da für die vorigen Laststellungen die positiven Momente nach unter abgetragen waren (Abb. 13, e).

d) Die Last  $1 t$  steht auf der rechten Bogenhälfte (Abb. 14).

In diesem Fall wird

$$H = 1 \eta_H \quad (\text{Abb. 14, b})$$

$$M_i = +1 \eta_{M_i} \quad (\text{Abb. 14, c})$$

$$M_r = -1 \eta_{M_r} \quad (\text{Abb. 14, e})$$

mithin

$$\delta_i = \frac{\eta_{M_i}}{\eta_H}$$

und

$$\delta_r = -\frac{\eta_{M_r}}{\eta_H}.$$

Also ist  $\delta_i$  oberhalb von  $l$  und  $\delta_r$  unterhalb von  $r$  aufzutragen. Da jetzt die linke Trägerhälfte unbelastet ist, muss  $K_i$  durch das Scheitelgelenk gehen. Mit Hilfe dieser Bedingung ist die Richtung von  $K_i$

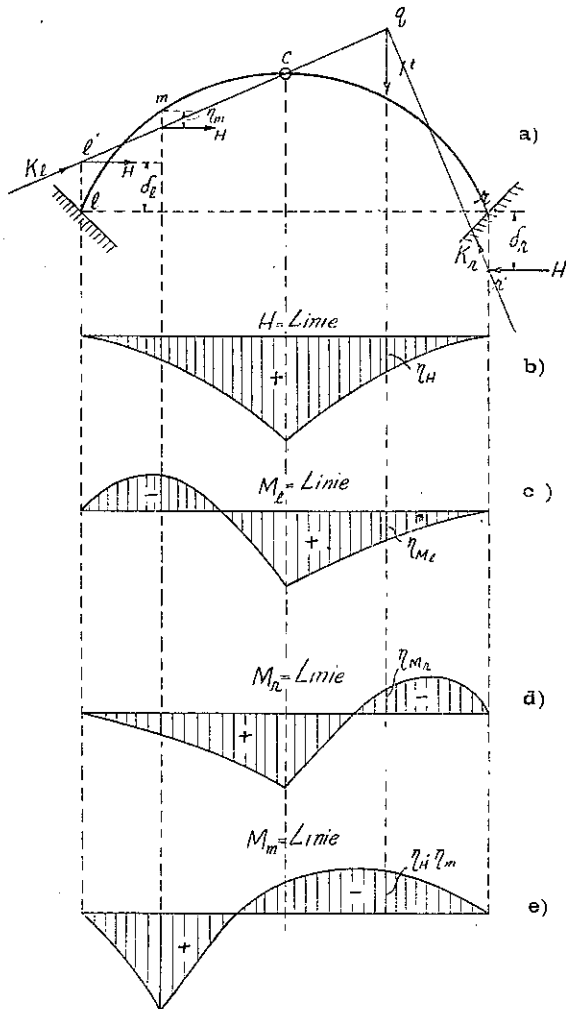


Abb. 14.



bekannt.

$K_r$  muss sich dann mit  $1t$  und mit  $K_l$  in einem Punkt schneiden. Das Einzeichnen von  $K_r$  ist im vorliegenden Fall wieder überflüssig. Man zerlegt dann wieder  $K_l$  senkrecht unter  $m$  in  $H$  und  $A$  und findet von *links* abgetrennten Teil aus

$$M_m = -H \eta_m.$$

Auch dieser Wert ist wieder senkrecht unter der Last  $1t$  als Ordinate, im vorliegenden Fall also wieder nach oben, abzutragen.

Wiederholt man die hier geschilderten Verfahren für eine genügende Anzahl von weiter Laststellungen und verbindet dann die so gefundenen Ordinaten durch eine Kurve miteinander, so entsteht die Einflusslinie für das Moment  $M_m$ .

#### VII. Berechnung des Wertes $Q_m$ .

Für die Brechnung der Einflusslinie für die Querkraft  $Q_m$  entwickeln wir folgendes Verfahren: Wir untersuchen wieder den Einfluss der wandernden Last  $1t$  für verschiedene Laststellungen, die wir teils links, teils rechts vom Punkt  $m$  wirken annehmen.

a)  $1t$  wirke rechts von  $m$  (**Abb. 15**).

Man erkennt aus dem links abgetrennten Teil, dass

$$\begin{aligned} Q_m &= +A \cos \varphi - H \sin \varphi \\ &= \sin \varphi (A \operatorname{ctg} \varphi - H). \end{aligned}$$

Für alle rechts von  $m$  wirkenden Lasten ist die  $Q_m$ -Linie mithin die Differenz der mit  $\operatorname{ctg} \varphi$  multiplizierten  $A$ -Linie und der  $H$ -Linie. Die resultierende Einflusslinie erhält den Multiplikator  $\sin \varphi$  (**Abb. 15, b**).

b)  $1t$  wirke links von  $m$  (**Abb. 16**).

Aus dem rechts abgetrennten Teil ergibt sich

$$\begin{aligned} Q_m &= -B \cos \varphi - H \sin \varphi \\ &= \sin \varphi (-B \operatorname{ctg} \varphi - H). \end{aligned}$$

Demgemäss erhält man für alle Lasten links von  $m$  die  $Q_m$ -Linie durch Addition der  $B \operatorname{ctg} \varphi$ -Linie und der  $H$ -Linie, und zwar gilt das negative Vorzeichen. Auch für diese Teile der Einflusslinie gilt der Multiplikator  $\sin \varphi$  (**Abb. 16, b**). In **Abb. 16, c** sind die gefundenen Ordinaten der Einflusslinie von einer Wagerechten aus abgetragen.

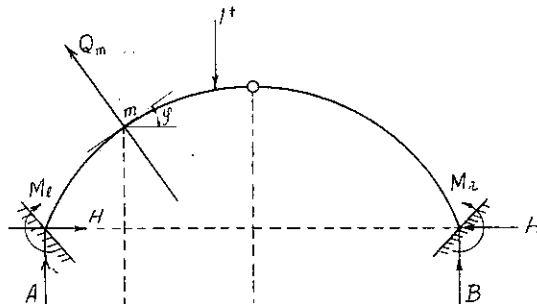


Abb. 15

a)

b)

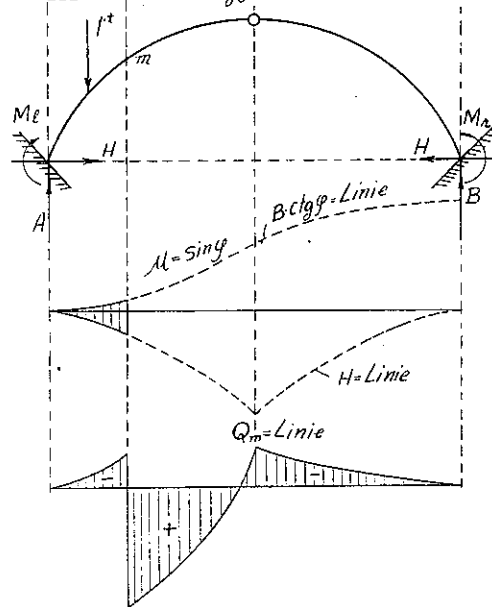


Abb. 16

a)

b)

c)

### VIII. Einflusslinie für die Normalkraft $N$ .

Wir verfahren ähnlich wie bei der Einflusslinie für die Querkraft  $Q_m$ .

a)  $1t$  steht rechts von  $m$  (Abb. 17).

Für diesen Fall ergibt sich aus dem links abgetrennten Teil die Normalkraft

$$\begin{aligned} N &= -(A \sin \varphi + H \cos \varphi) \\ &= -\cos \varphi (A \operatorname{tg} \varphi + H). \end{aligned}$$

Für alle rechts von  $m$  befindlichen Lasten ist mithin die  $N$ -linie die Summe der  $A \operatorname{tg} \varphi$ -Linie und der  $H$ -Linie, und zwar mit negative Vorzeichen. Der Multiplikator der resultierenden Einflusslinie ist  $\cos \varphi$  (Abb. 17, b).

b)  $1t$  wirke links von  $m$  (Abb. 18).

Für diesen Fall ist

$$N = -H \cos \varphi + B \sin \varphi = \cos \varphi (B \operatorname{tg} \varphi - H),$$

d.h. für alle Lasten links von  $m$  ist die Einflusslinie die Differenz der  $B \operatorname{tg} \varphi$ -Linie und der  $H$ -Linie. Der Multiplikator der resultierenden Einflusslinie ist wieder  $\cos \varphi$  (Abb. 18, b). In Abb. 18, c sind die den Laststellungen a) und b) entsprechenden Einflussflächen zusammenhängend aufgetragen.

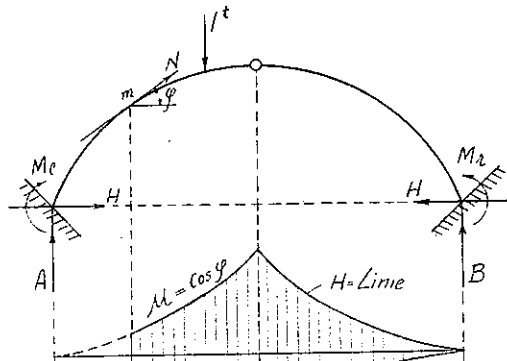


Abb. 17

a)

b)

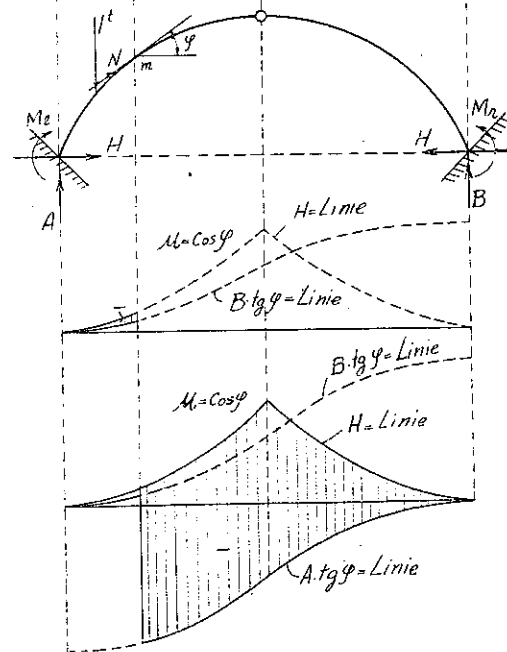


Abb. 18

a)

b)

c)

## 2. Das Rechnungsverfahren bei gleichmässig verteilter Belastung.

Ganz besonders einfach wird das Rechnungsverfahren bei gleichmässig verteilter Belastung, wie sie z.B. bei der Berechnung von Strassenbrücken vorliegen kann (Menschengedränge, Vergl. Abb. 19).

### I. Volle Belastung.

Die Belastung beträgt  $p/lfd.m.$  Wir ermitteln mit Hilfe der Einflusslinie für  $H$ ,  $A$  und  $M_i$  die Werte  $H=pF_H$

$$A=pF_A$$

$$\text{und } M_i=pF_{M_i},$$

worin  $F_H$ ,  $F_A$  und  $F_{M_i}$  die Flächeninhalte der Einflussflächen für  $H$ ,  $A$  und  $M_i$  sind (vergl. **Abb. 19 b, c, d**). Hierbei ist vorausgesetzt, dass diese drei Werte sich als positiv ergeben haben. Alsdann findet man für das Moment  $M_m$  vom links abgetrennten Teil aus

$$M_m = Ax_m - p \frac{x_m^2}{2} - Hy_m + M_i.$$

Im vorliegenden Fall wird das Moment  $M_m=0$  sich ergeben, da nach Voraussetzung der Bogen eine Parabel ist und für parabolische Bogen die Moment infolge gleichmässig verteilter Belastung  $=0$  werden.<sup>(1)</sup>

Für die Querkraft  $Q_m$  ergibt sich vom links abgetrennten Teil aus die Formel

$$Q_m = A - (px_m)\cos\varphi - H\sin\varphi$$

und für die Normalkraft  $N_m$  erhält man

$$N_m = -[(A - px_m)\sin\varphi + H\cos\varphi].$$

Damit sind sämtliche für die Berechnung der Spannungen im Bogen massgebenden statischen Grössen bekannt.

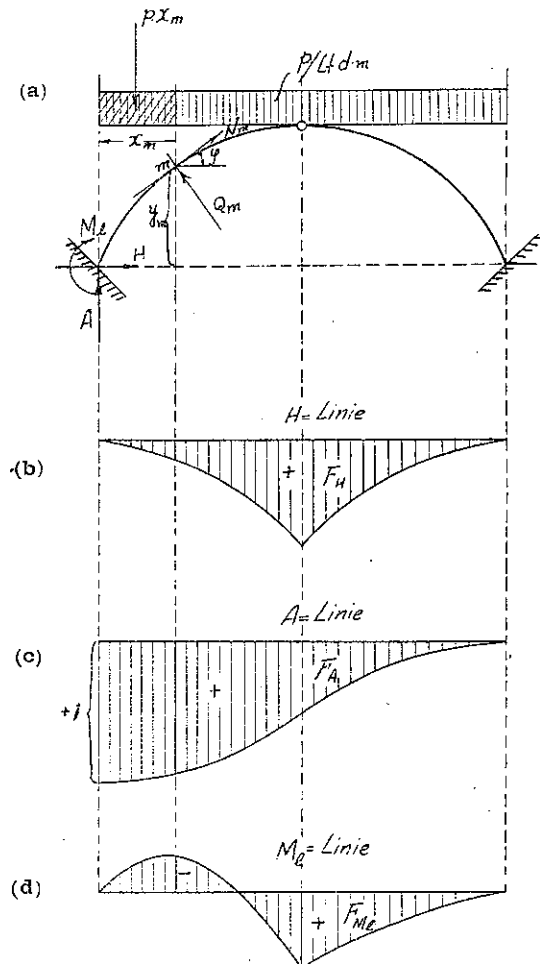


Abb. 19

(1) Vergl. Kirchhoff, Statik der Bauwerke, Bd. II. S. 535.

**II. Einseitige Belastung mit  $p/lfd.m$  (Abb. 20).**

Man ermittelt wieder wie unter **I** mit Hilfe der Einflusslinien für  $H$ ,  $A$  und  $M_i$  die werte

$$H = p F_H'$$

$$A = p F_A'$$

und  $M_i = p F_{M_i}'$ ,

worin  $F_H'$ ,  $F_A'$  und  $F_{M_i}'$  die Flächeninhalte der unter der Belastungsstrecke liegenden Einflussflächen für  $H$ ,  $A$  und  $M_i$  bedeuten (**Abb. 20 b, c, d**). Auch diese Werte haben sich als positiv ergeben. Alsdann ergibt sich

$$M_m = Ax_m + M_i - Hy_m,$$

ferner

$$Q_m = A \cos\varphi - H \sin\varphi$$

und

$$N_m = -(A \sin\varphi + H \cos\varphi).$$

Damit sind wieder sämtliche für die Spannungsermittlung massgebenden statischen Größen bekannt.

Handelt es sich um die Berechnung eines Eisenbetonbogens, so kann man genau den Einfluss des Eigengewichts folgendermassen ermitteln :

Man zerlegt den Bogen in einzelne Lamellen, deren Gewichte

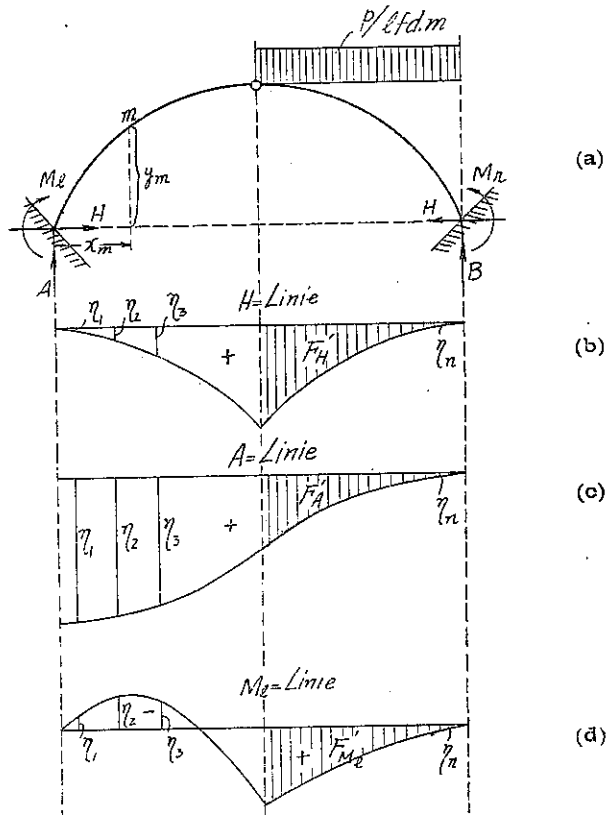


Abb. 20

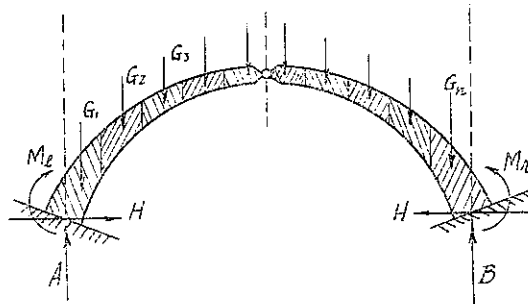


Abb. 21

als Einzelkräfte aufgefasst werden (vergl. **Abb. 21**) und ermittelt dann mit Hilfe der Einflusslinien für  $H$ ,  $A$  (bezw.  $B$ ),  $M_t$ ,  $M_m$ ,  $Q_m$  und  $N_m$  die entsprechenden statischen Grössen, die für die Spannungsermittlung in den einzelnen Querschnitten erforderlich sind. So ist z. B.

$$H = G_1\eta_1 + G_2\eta_2 + G_3\eta_3 + \dots + G_n\eta_n \dots \dots \dots (\text{Abb. 20, b}).$$

Entsprechend findet man aus der  $A$ -Linie

$A$ =die Summe aller  $G\eta$  (**Abb. 20, c**) usw.

Der Einfluss der Verkehrslast kann dann wieder, wie vorher entwickelt, mit Hilfe der Einflusslinien bezw. bei gleichmässig verteilter Last wie unter I und II (Seite 28 u. 29) entwickelt werden.

### 3. Die Wirkung von Temperaturänderungen.

$$X_{at} = \pm \frac{E J_s \delta_{at}}{E J_s \delta_{aa}},$$

worin unter der Annahme einer gleichmässigen Temperaturänderung des ganzen Bogens um  $t^\circ$

$$\delta_{at} = \int N_a \varepsilon t ds.$$

Hierin ist

$$\begin{aligned} N_a &= + H_a \cos\varphi \\ &= + \frac{1}{2f} \cos\varphi \quad (\text{vergl. Seite 10}) \\ ds &= \rho d\varphi \end{aligned}$$

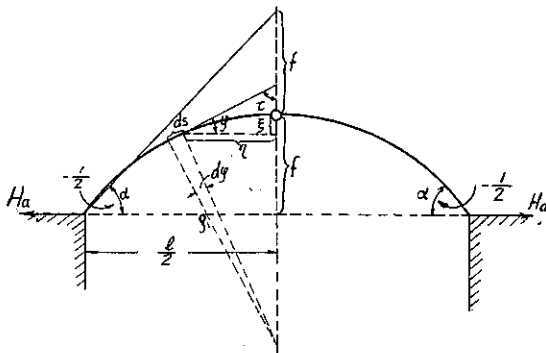


Abb. 22

wenn  $\varepsilon$  den Ausdehnungskoeffizient und  $\rho$  den Krümmungsradius der Schnittstelle bedeutet, für die die Normalkraft berechnet wurde.

Daher wird

$$\delta_{at} = \int \frac{1}{2f} \varepsilon t \rho \cos\varphi d\varphi.$$

Nach Hütte I, 23 Aufl., Seite 102 ist

$$\rho = \frac{p}{\sin^2\tau} = \frac{p}{\cos^2\varphi}$$

(worin  $2p$  der Parameter der Parabel)

$$\begin{aligned}\delta_{at} &= 2 \int_0^\alpha \frac{1}{2f} \varepsilon t \cos \varphi \frac{p}{\cos^3 \varphi} d\varphi \\ &= + \frac{1}{f} p \varepsilon t \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

Scheitelgleichung der Parabel ist

$$\eta^2 = 2p\xi$$

es ist dann für  $\eta = \frac{l}{2}$ ,  $\xi = f$  (**Abb. 22**)

$$\text{so ist } \frac{l^2}{4} = 2pf; \quad p = \frac{l^2}{8f}$$

$$\begin{aligned}\delta_{at} &= \frac{1}{f} \frac{l^2}{8f} \varepsilon t \operatorname{tg} \alpha \\ &= \frac{1}{8} \frac{l^2}{f^2} \varepsilon t \operatorname{tg} \alpha.\end{aligned}$$

$$\text{Mit } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2f}{l} = \frac{4f}{l},$$

$$\text{wird daher } \delta_{at} = \frac{1}{2} \frac{l}{f} \varepsilon t,$$

$$\text{daraus folgt } X_{at} = \pm \frac{\frac{1}{2} \frac{l}{f} \varepsilon t E J_s}{\frac{l}{20}}$$

$$\text{oder } X_{at} = \pm \frac{10 \varepsilon t E J_s}{f}.$$

Ferner ist

$$X_{bt} = \pm \frac{E J_s \delta_{bt}}{\delta_{bb}},$$

$$\delta_{bt} = \int N_b \varepsilon t ds.$$

Für einen Querschnitt links vom Scheitel ist  $N_b = -\frac{1}{l} \sin \varphi$ , für den symmetrisch gelegenen Querschnitt rechts vom Scheitel dagegen  $= +\frac{1}{l} \sin \varphi$ , so findet man

$$\begin{aligned}\delta_{at} &= \int N_b \varepsilon t ds \\ &= - \int_0^\alpha \frac{1}{l} \sin \varphi \varepsilon t ds + \int_0^\alpha \frac{1}{l} \sin \varphi \varepsilon t ds \\ &= 0\end{aligned}$$

d.h.  $X_{bc}=0$ .

So folgt die Gleichung (**Abb. 23**)

$$M_i^t = \frac{X_{at} + X_{bt}}{2} = \pm \frac{5 \varepsilon t E J_s}{f}, \quad M_r^t = \frac{X_{at} - X_{bt}}{2} = \pm \frac{5 \varepsilon t E J_s}{f}.$$

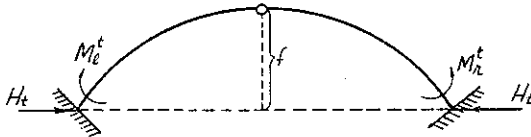


Abb. 23,

$A_t$  und  $B_t$  werden  $=0$ .

Das Moment für einen beliebigen Punkt  $m$  ist z. B. bei Erwärmung des Bogens

$$\begin{aligned} &= -H_t(f - \xi) + M_i^t \\ &= + \frac{5 \varepsilon t E J_s}{f^2} \xi. \end{aligned}$$

Zur Sicherheit setze man hierin statt  $J_s$  das grösste Trägheitsmoment  $J$  des Bogens ein.

### B) Es sei $J \cos \varphi$ veränderlich und Berücksichtigung der Normalkräfte.

Die meisten Bogenträger, die man praktisch zu untersuchen haben wird, haben kein unveränderliches Trägheitsmoment; wegen der gegen die Bogenkämpfer zunehmenden Längskraft wird sich eine ebenso veränderliche Querschnittsfläche ergeben.

#### 1. Berechnung der Werte $X_a$ und $X_b$ .

Es ist

$$X_a = P_m \frac{E J_s \delta_{ma}}{E J_s \delta_{aa}}$$

worin

$$P_m \delta_{ma} = \int M_0 M_a \frac{ds}{E J} + \int N_0 N_a \frac{ds}{E F}^{(1)}$$

Setzt man  $ds = \frac{dx}{\cos \varphi}$  und multipliziert Zähler und Nenner mit dem konstanten Wert  $J_s$ , wobei  $J_s$  ein konstantes Trägheitsmoment bedeutet, so wird

(1) vergl. Kirchhoff, Statik der Bauwerke Bd. II. Seite 158.



$$EJ_s P_m \delta_{ma} = \int M_0 M_a \frac{J_s}{J} \frac{dx}{\cos \varphi} + \frac{J_s}{F_s} \int N_0 N_a \frac{F_s}{F \cos \varphi} dx,$$

$F_s$  bedeutet hierin einen konstanten Querschnitt.

Setzt man  $\frac{M_a J_s}{J \cos \varphi} = \eta_a$  (vergl.  $M_a$ -fläche in **Abb. 4, b**),

$$N_0 = -H_0 \cos \varphi$$

und  $N_a = -H_a \cos \varphi$

so wird 
$$EJ_s P_m \delta_{ma} = \int M_0 \eta_a dx - \frac{J_s}{F_s} H_0 H_a \int \frac{F_s}{F} \cos \varphi dx.$$

Setzt man  $\frac{F_s}{F} \cos \varphi = w_f$

$$\int \frac{F_s}{F} \cos \varphi dx = \int w_f dx = F w_f.$$

Trägt man unter jedem Querschnitt den zugehörigen Wert  $w_f = \frac{F_s}{F} \cos \varphi$  als Ordinate auf und verbindet die Endpunkte dieser Ordinaten, so entsteht unregelmässige Fläche, die  $w_f$ -Fläche (**Abb. 24, b**).

Ferner berechnen wir den wagerechten Schub  $H_0$  infolge Belastung des statisch bestimmten Hauptsystems mit einer Kraft  $P_m$  (**Abb. 25**).

$$A_0 = \frac{1}{l} P_m \left( a + \frac{l}{2} \right)$$

$$H_0 = \frac{1}{2f} P_m \left( \frac{l}{2} - a \right)$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{J_s}{F_s} H_0 H_a \int \frac{F_s}{F} \cos \varphi dx \\ = & - \frac{J_s}{F_s} \frac{1}{2f} P_m \left( \frac{l}{2} - a \right) \frac{1}{2f} F w_f \\ & \text{(vergl. Seite 10)} \\ = & - \frac{J_s}{F_s} \frac{1}{4f^2} P_m \left( \frac{l}{2} - a \right) F w_f \\ = & - K_N P_m \left( \frac{l}{2} - a \right) \end{aligned}$$

worin

$$K_N = \frac{J_s}{F_s} \frac{1}{4f^2} F w_f; \text{ daher}$$

$$EJ_s P_m \delta_{ma} = \int M_0 \eta_a dx + P_m K_N \left( \frac{l}{2} - a \right).$$

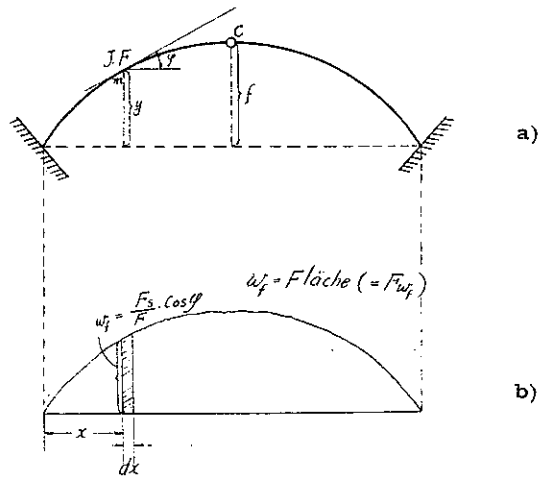


Abb. 24

Für die Berechnung der Einflusslinien ist  $P_m=1t$  zu setzen, so dass man erhält

$$EJ_s \delta_{ma} = \int M_0 \eta_a dx + K_N \left( \frac{l}{2} - a \right).$$

Nimmt man zunächst den Einfluss der Normalkräfte  $=0$  an, so ist

$$EJ_s \delta_{ma} = \int M_0 \eta_a dx$$

$EJ_s \delta_{ma}$  ist aber das Angriffsmoment für den Punkt  $m$  eines mit der  $\eta_a$ -Fläche belasteten geraden Balkens  $=M_{\eta_a}$ .

Zwecks Bestimmung der senkrechten Verschiebungen  $EJ_s \delta_{ma}$  benutzen wir das Verfahren der  $w$ -Gewichte.

Wenn die Stab-

stücke  $s$  unendlich klein werden, erhält man den stetig gekrümmten Stab und es wird :

$$S_m = S_{m+1} = ds, \quad J_m = J_{m+1} = J,$$

$$M_{m-1} = M_m = M_{m+1} = M = M_a,$$

und folgt

$$dw = \Delta d\vartheta = \frac{M_a}{EJ} ds = \frac{M_a dx}{EJ \cos \varphi}$$

oder

$$EJ_s \Delta w_a = \frac{M_a \Delta x J_s}{J \cos \varphi} = \eta_a \Delta x = \eta_a \lambda.$$

Für das dem Gelenkpunkt  $c$  entsprechende  $w$ -Gewicht muss eine andere Formel benutzt werden.

$$\Delta l = \sum \frac{\sigma}{E} \Delta s \cos \varphi + \sum y \Delta d\vartheta \quad (\text{vergl. Seite 13}),$$

da unter der Annahme starrer Widerlager  $\Delta l=0$ , so gilt die Beziehung

$$0 = \sum \frac{\sigma}{E} \Delta s \cos \varphi + \sum y \Delta d\vartheta,$$

setzen wir

$$\frac{\Delta x}{\cos \varphi} = \Delta s \quad \text{und} \quad \sigma = \frac{N}{F}$$

so wird

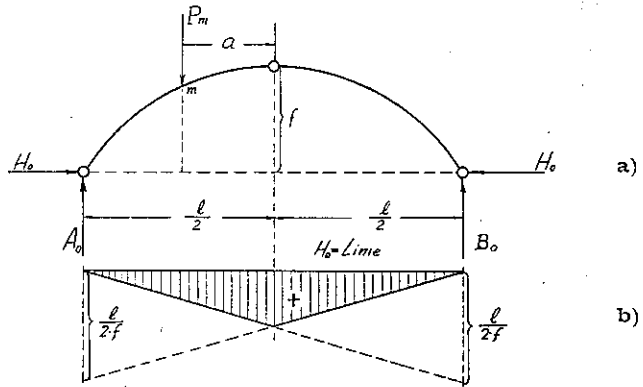


Abb. 25

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum \frac{N}{EF} \Delta x + \sum y \Delta d \vartheta \\
 &= \frac{1}{2f} \sum \frac{\cos \varphi}{EF} \Delta x + \sum y \Delta d \vartheta \\
 &= \frac{1}{2f} \frac{J_s}{F_s} \sum \frac{F_s \cos \varphi}{F} \Delta x + \sum y E J_s \Delta d \vartheta
 \end{aligned}$$

oder

$$\sum y E J_s \Delta d \vartheta = -\frac{1}{2f} \frac{J_s}{F_s} \sum \frac{F_s \cos \varphi}{F} \Delta x.$$

Da  $dw = \Delta d \vartheta$  ist

$$\begin{aligned}
 \sum y \Delta d \vartheta &= \sum y dw \\
 &= y_1 dw_{1a} + y_2 dw_{2a} + \dots + y_m dw_{ma} + y_{m+1} dw_{(m+1)a} \\
 &\quad + f dw_{ca} + y'_{m+1} dw'_{(m+1)a} + y'_m dw'_{ma} + \dots + y'_2 dw'_{2a} \\
 &\quad + y'_1 dw'_{1a}.
 \end{aligned}$$

Da wegen der Symmetrie

$$y'_{m+1} = y_{m+1}, \quad y'_m = y_m \text{ usw.},$$

ferner  $w'_{(m+1)a} = w_{(m+1)a}, \quad w'_{ma} = w_{ma} \text{ usw.},$

so folgt

$$\begin{aligned}
 \sum y dw &= 2y_1 dw_{1a} + 2y_2 dw_{2a} + \dots + 2y_m dw_{ma} \\
 &\quad + 2y_{m+1} dw_{(m+1)a} + f dw_{ca} \\
 \sum y E J_s dw &= 2 \sum_0^l y E J_s dw_a + f E J_s dw_{ca}.
 \end{aligned}$$

Daher wird

$$\begin{aligned}
 E J_s \Delta w_{ca} &= -\frac{1}{2f^2} \frac{J_s}{F_s} F_{w_f} - \frac{2}{f} \sum_0^l y E J_s \Delta w_a \\
 &= -\frac{1}{2f^2} \frac{J_s}{F_s} F_{w_f} - \frac{2}{f} [y_1 \eta_{1a} \lambda + y_2 \eta_{2a} \lambda + \dots + y_{m+1} \eta_{(m+1)a} \lambda]
 \end{aligned}$$

oder

$$E J_s \Delta w_{ca} = -\frac{1}{2f^2} \frac{J_s}{F_s} F_{w_f} - \frac{2\lambda}{f} [y_1 \eta_{1a} + y_2 \eta_{2a} + \dots + y_{m+1} \eta_{(m+1)a}],$$

nimmt man  $N=0$  an, so ist

$$E J_s \Delta w_{ca} = -\frac{2\lambda}{f} [y_1 \eta_{1a} + y_2 \eta_{2a} + \dots + y_{m+1} \eta_{(m+1)a}].$$

$\eta_a \lambda$  ist der Flächeninhalt eines Flächenstreifens der  $\eta_a$ -Fläche von der

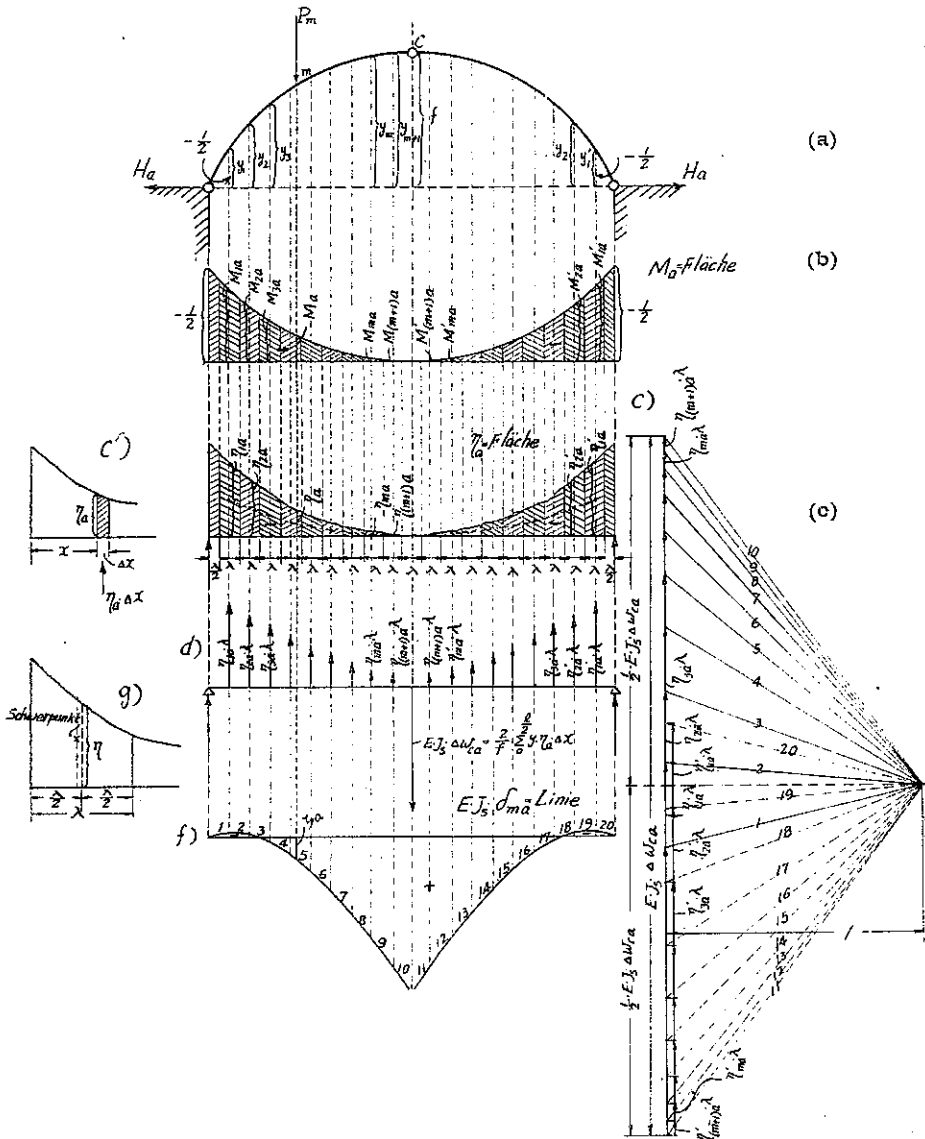


Abb. 26

Breite  $\lambda$ , die wir im Schwerpunkte der Teilbelastungsfläche angreifend denken; benutzt man für diese  $EJ_s \Delta w_a$ -Gewichte die Polweite "1", so erhält man für die Verschiebungen  $\delta_{m\ddot{a}}$  als Seillinie der  $EJ_s \Delta w_a$ -Kräfte ( $= M_{\eta_a}$ ) (Abb. 26, f).

Insgesamt ist daher

$$EJ_s P_m \delta_{m\alpha} = P_m M_{\eta\alpha} + P_m K_N \left( \frac{l}{2} - a \right)$$

$$\text{oder } EJ_s P_m \delta_{m\alpha} = P_m \left[ M_{\eta\alpha} + K_N \left( \frac{l}{2} - a \right) \right].$$

Ferner

$$\begin{aligned} \delta_{aa} &= \int \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \int \frac{N_a^2 ds}{EF} \\ &= \int \frac{M_a^2 dx}{EJ \cos \varphi} + \int \frac{H_a^2 \cos^2 \varphi dx}{EF \cos \varphi} \\ EJ_s \delta_{aa} &= \int M_a \frac{M_a J_s}{J \cos \varphi} dx + \frac{J_s}{F_s} \int H_a^2 \frac{F_s}{F} \cos \varphi dx \\ &= \int M_a \eta_a dx + \frac{J_s}{F_s} \frac{1}{4f^2} F_w \\ &= \int M_a \eta_a dx + K_N \quad (\text{Abb 26 b, u. c}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int M_a \eta_a dx &= \sum M_a \eta_a \lambda \\ &= (-\eta_{1a} \lambda)(-M_{1a}) + (-\eta_{2a} \lambda)(-M_{2a}) + \dots + (-\eta_{(m+1)a} \lambda)(-M_{(m+1)a}) \\ &\quad + (-\eta'_{(m+1)a} \lambda)(-M'_{(m+1)a}) + \dots + (-\eta'_{2a} \lambda)(-M'_{2a}) + (-\eta'_{1a} \lambda)(-M'_{1a}) \\ &= 2\lambda [\eta_{1a} M_{1a} + \eta_{2a} M_{2a} + \dots + \eta_{(m+1)a} M_{(m+1)a}], \end{aligned}$$

so ergibt sich

$$EJ_s \delta_{aa} = \sum M_a \eta_a \lambda + \frac{J_s}{F_s} \frac{1}{4f^2} F_w = K_M + K_N.$$

Dividiert man sämtliche gefundenen Verschiebungen  $EJ_s \delta_{m\alpha}$  einzeln durch  $EJ_s \delta_{aa}$ , so ergibt sich mittels der Beziehung

$$\begin{aligned} X_a &= P_m \frac{EJ_s \delta_{m\alpha}}{EJ_s \delta_{aa}} \\ &= P_m \frac{M_{\eta\alpha} + K_N \left( \frac{l}{2} - a \right)}{K_M + K_N} \end{aligned}$$

für die statisch unbestimmte Grösse  $X_a$ .

Ist die Polweite des Kraftecks = 1, so ist  $M_{\eta\alpha} = \zeta_\alpha$

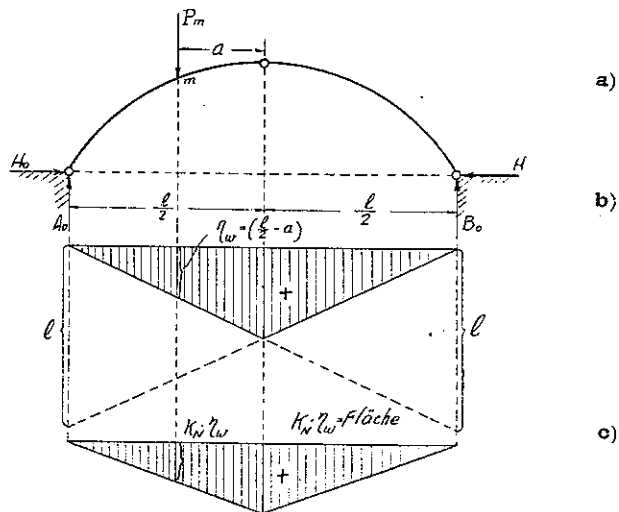


Abb. 27

(Abb. 26, f) und  $K_N\left(\frac{l}{2}-a\right)=K_N\eta_w$  (Abb. 27, c).

Daher 
$$X_a = P_m \frac{\zeta_a + K_N \eta_w}{K_M + K_N}.$$

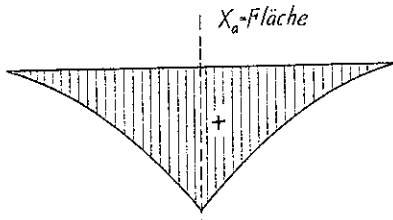


Abb. 28

Zur Berechnung der Einflusslinie für  $X_a$  setze man  $P_m=1$  t. (Abb. 28).

Wir gehen nunmehr über zur Berechnung der Einflusslinie für  $X_b$ . Es ist

$$X_b = 1 \frac{EJ_s \delta_{mb}}{EJ_s \delta_b},$$

$$\delta_{mb} = \int M_0 M_b \frac{ds}{EJ} + \int N_0 N_b \frac{ds}{EF}$$

$$EJ_s \delta_{mb} = \int M_0 M_b \frac{J_s dx}{J \cos \varphi} + \frac{J_s}{F_s} \int N_0 N_b \frac{F_s dx}{F \cos \varphi}.$$

$\int N_0 N_b \frac{F_s dx}{F \cos \varphi} = 0$ , da die Normalkräfte  $N_b$  links vom Scheitel positiv, rechts vom Scheitel negativ sind, ihre Beitrag zum  $\int N_0 N_b dx$  sich also aufheben. Setzt man  $\frac{M_0 J_s}{J \cos \varphi} = \eta_b$ , ( $M_b$ -Fläche in Abb. 7, b)

so wird

$$EJ_s \delta_{mb} = \int M_0 \eta_b dx.$$

Trägt die Werte  $\eta_b$  entsprechend der Veränderlichkeit von  $M_b$ ,  $J$  und  $\varphi$  von einer Wagerechten als Ordinaten ab, so entsteht die  $\eta_b$ -Fläche (Abb. 29, c).

Es kann analog dem  $\int M_0 \eta_a dx$  das Integral  $\int M_0 \eta_b dx$  als Moment  $M_{\eta_b}$  für den Punkt  $m$  eines mit der  $\eta_b$ -Fläche belasteten geraden Balkens gedeutet werden =  $1 \zeta_b$  (Abb. 30, d).

Zur Berechnung von

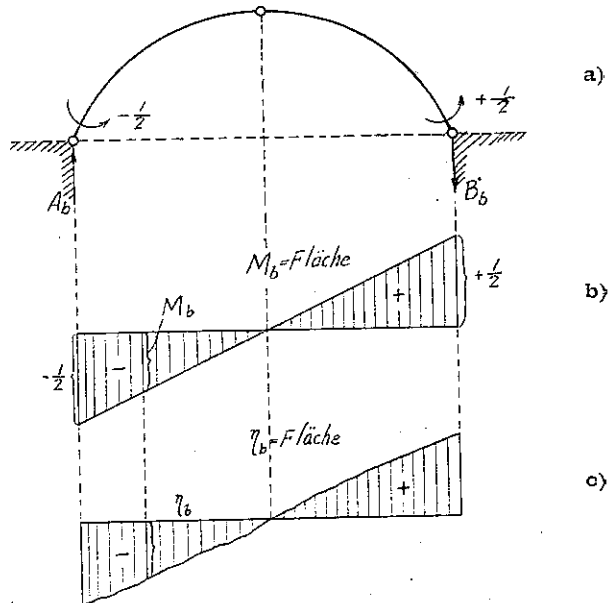


Abb. 29

$EJ_s \delta_{bb}$ , benutzen wir die Formel

$$\delta_{bb} = \int \frac{M_b^2 ds}{EJ} + \int \frac{N_b^2 ds}{EF}$$

Da die lotrechten Kräfte  $A_b$  und  $B_b$  nur sehr geringen Einfluss auf die Normalkräfte  $N_b$  haben, dürfen diese vernachlässigt werden.

Es wird alsdann

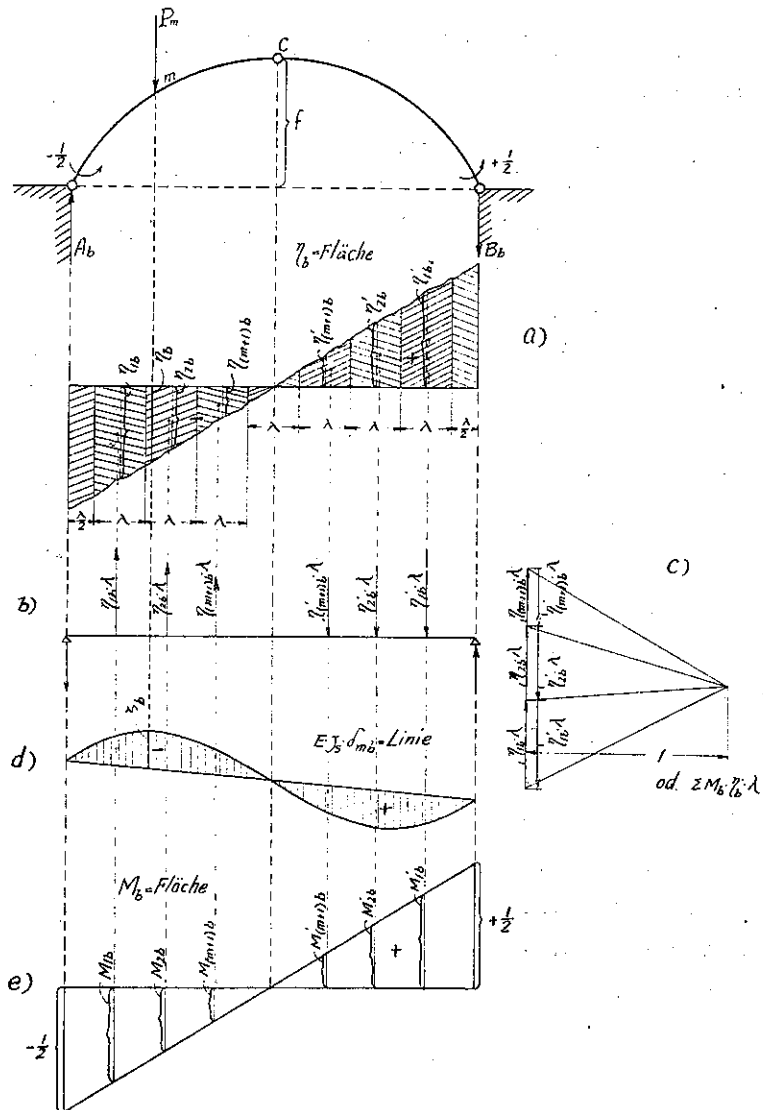


Abb. 30

$$EJ_s \delta_{bb} = \int M_b \frac{M_b J_s}{J \cos \varphi} dx$$

$$= \int M_b \eta_b dx$$

$\int M_b \eta_b dx$  kann analog dem  $\int M_a \eta_a dx$  als  $\sum M_b \eta_b \lambda$  gedeutet werden (vergl. Seite 37).

Es wird alsdann

$$\sum M_b \eta_b \lambda = 2\lambda [M_{1b} \eta_{1b} + M_{2b} \eta_{2b} + \dots + M_{(m+1)b} \eta_{(m+1)b}]$$

(Abb. 30, a u. e).

Nunmehr ist

$$X_b = 1 \frac{EJ_s \delta_{bb}}{EJ_s \delta_{bb}} = 1 \frac{M_{1b}}{\sum M_b \eta_b \lambda} = 1 \frac{\zeta_b}{\sum M_b \eta_b \lambda}$$

Wählt man dann die Polweite  $= \sum M_b \eta_b \lambda$ , so ergibt sich

$$X_b = 1 \zeta_b.$$

Nach Ermittlung der Einflusslinie für die statisch unbestimmten Größen  $X_a$  und  $X_b$  können nunmehr sämtliche übrigen Einflusslinien leicht abgeleitet werden.

## 2. Berechnung des Wertes $M_i$ .

Wir benutzen die Formel  $M_i = \frac{X_a + X_b}{2}$ . Man erhält daher die  $M_i$ -Linie durch Addition der halben Ordinaten der  $X_a$ -Linie und der  $X_b$ -Linie. In Abb. 31, c sind die gefundenen Ordinaten der  $M_i$ -Linie von einer Waagrechten abgetragen.

## 3. Berechnung des Wertes $M_r$ .

Da  $M_r = \frac{X_a - X_b}{2}$ , so

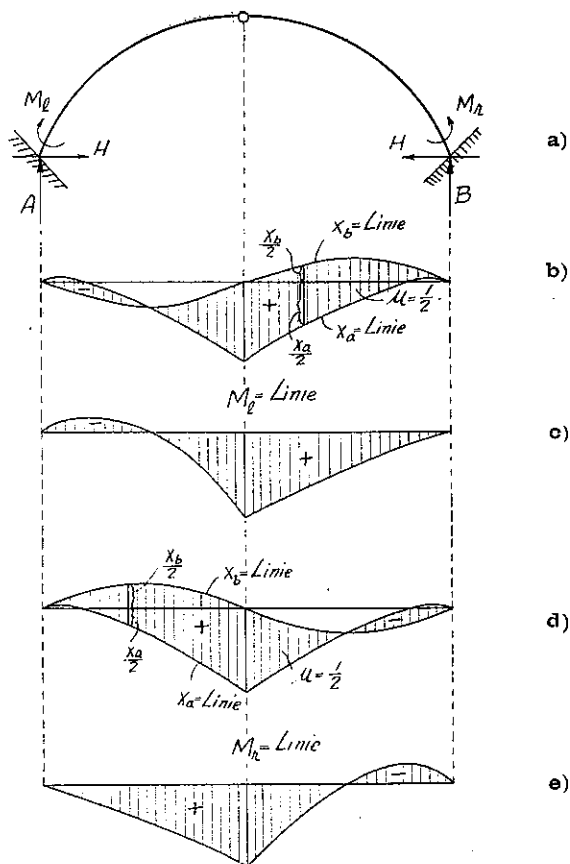


Abb. 31



erhält man die  $M_r$ -Linie durch Subtraktion der halben Ordinaten der  $X_b$ -Linie von der halben Ordinaten der  $X_a$ -Linie. In **Abb. 31, e** sind wieder die Ordinaten der  $M_r$ -Linie von der Wagerechten abgetragen.

#### 4. Berechnung des Wertes $H$ .

Wir benutzen die Formel

$$H = H_0 - H_a X_a - H_b X_b,$$

oder, da  $H_b = 0$  (Seite 16)

$$H = H_0 - H_a X_a.$$

Berücksichtigt man ferner, dass  $H_a = -\frac{1}{2f}$  als nach aussen gerichteten Schub negativ ist, so folgt

$$H = H_0 + \frac{1}{2f} X_a.$$

Die  $H_0$ -Linie ist ein Dreieck mit der Spitze unter dem Gelenk (**Abb. 25**). Zu dieser  $H_0$ -Linie ist dann die mit  $\frac{1}{2f}$  multiplizierte  $X_a$ -Linie addieren.

Man erhält demgemäss die in **Abb. 32, a** dargestellte Form der  $H$ -Linie. In **Abb. 32, b** sind die gefundenen Ordinaten der  $H$ -Linie von einer Wagerechten abgetragen.

#### 5. Berechnung der Werte $A$ und $B$ .

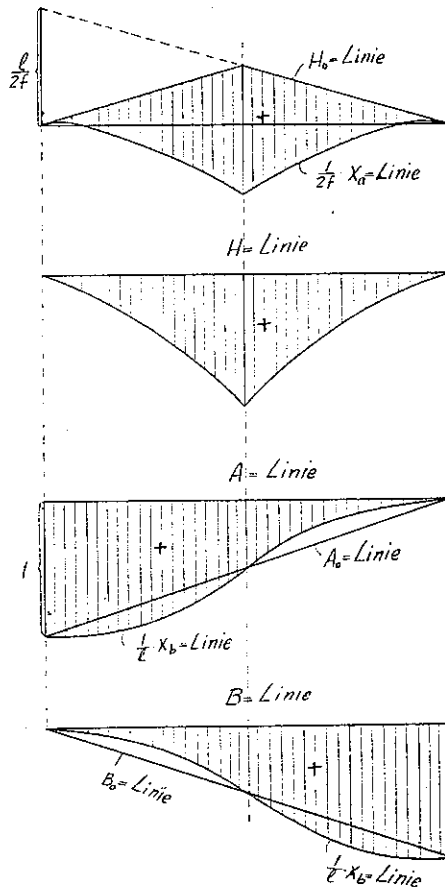
$$A = A_0 - A_a X_a - A_b X_b.$$

Hierin ist

$A_a = 0$ , so wird

$$A = A_0 - A_b X_b.$$

Da  $A_b = \frac{1}{l}$ , so folgt



**Abb. 32**

a)

b)

**Abb. 33**

a)

b)

$$A = A_0 - \frac{1}{l} X_b.$$

Die Einflussfläche für  $A$  entsteht daher durch Subtraktion der  $\frac{1}{l} X_b$ -Fläche von der  $A_0$ -Fläche (**Abb. 33, a**). Ebenso ist

$$\begin{aligned} B &= B_0 - B_a X_a - B_b X_b \\ &= B_0 - B_b X_b, \quad \text{da } B_a = 0 \text{ ist.} \end{aligned}$$

$$B_b = \frac{1}{l}, \text{ daher } B = B_0 - \frac{1}{l} X_b.$$

Die  $B$ -Linie ist daher das Spiegelbild der  $A$ -Linie (**Abb. 33, b**).

Nunmehr können die Einflusslinien für sämtliche übrigen statischen Größen leicht abgeleitet werden.

### 6. Die Wirkung von Temperaturänderungen.

$$X_{at} = \pm \frac{EJ_s \delta_{at}}{EJ_s \delta_{aa}}$$

$$\delta_{at} = + \frac{1}{2} \frac{l}{f} \epsilon t \quad (\text{vergl. Seite 31})$$

$$\begin{aligned} EJ_s \delta_{aa} &= \int M_a \eta_a dx \\ &= \sum M_a \eta_a \lambda \quad (\text{vergl. Seite 37}). \end{aligned}$$

Mithin

$$\begin{aligned} X_{at} &= \pm \frac{\frac{1}{2} \frac{l}{f} \epsilon t EJ_s}{\sum M_a \eta_a \lambda} \\ X_{bt} &= 0 \quad (\text{vergl. Seite 32}). \end{aligned}$$

Somit ist

$$M_i^t = \frac{X_{at} + X_{bt}}{2} = \pm \frac{\frac{l}{2} \epsilon t EJ_s}{4 \sum M_a \eta_a \lambda}$$

und

$$M_r^t = \frac{X_{at} - X_{bt}}{2} = \pm \frac{\frac{l}{2} \epsilon t EJ_s}{4 \sum M_a \eta_a \lambda}$$

Das Moment für das Scheiteltgelenk muss = 0 sein, somit

$$\begin{aligned} -H_i f + M_i^t &= 0 \\ H_i &= \pm \frac{l \epsilon t EJ_s}{4 f^2 \sum M_a \eta_a \lambda} \end{aligned}$$

Das Moment für einem beliebigen Punkt  $m$  ist z. B. bei Erwärmung des Bogens

$$\begin{aligned} &= -H_i(f-\xi) + M_i \quad (\text{vergl. Abb. 22}) \\ &= + \frac{letEJ_s}{4f^2 \sum M_a \eta_a \lambda} \xi. \end{aligned}$$

## Zweites Kapitel

### Die Berechnung des Eingelenkbogens.

#### 1. Allgemeins.

Ein Gewölbe kann mit der geringsten Stärke ausgeführt werden, wenn die Bogenachse mit der Mittellage sämtlicher, den verschiedenen Belastungsfällen entsprechenden Stützlinsen zusammenfällt oder wenigstens möglichst nahe mit ihr übereinstimmt.

Man nennt ein derartiges Gewölbe, bei welchem die Stützlinie infolge halber Verkehrslast die Mittellinie des Gewölbes ist, ein Stützliniengewölbe. Der Bogen trage ausser der ständigen Belastung eine gleichförmige Verkehrslast  $p$  für die Einheit der Spannweite  $l$ ; er sei so geformt, dass bei voller Belastung mit  $\frac{1}{2}p$  die Stützlinie mit der Bogenachse zusammenfällt. Für die folgenden Untersuchungen setzen wir daher voraus, dass das Gewölbe ein symmetrisches Stützliniengewölbe ist.

Es handelt sich bei Bestimmung der günstigsten Bogenform um die Ermittlung dieser Stützlinie, wobei wir  $l$  und  $f$  als durch die baulichen Verhältnisse gegeben ansehen können. Ist nämlich die Höhenlage der Fahrbahn und der Kämpfer festgelegt, so kann, unter entsprechender Annahme der Überschüttungshöhe im Gewölbescheitel und mit Wahl der Gewölbestärke, die Lage der Durchgangspunkte der Stützlinie im Scheitel und in den Kämpfern annähernd fixiert werden.

#### 2. Rechnerische Ermittlung der Stützlinie.

Im Nachfolgenden wird die Belastungslinie für Eigengewicht des Gewölbemauerwerkes und der Auffüllung als Parabel angenommen (Abb. 34). Die Annäherungsformeln werden für Melans Gesetz gegeben.

Sowohl die Verkehrs- als die Eigengewichtslasten (Gewicht des Gewölbe-

mauerwerkes, der Erdauffüllung und der Fahrbahndecke) werden durch Belastungsgleichwerte, welche zweckmässig in Raumeinheiten des Gewölbe-mauerwerkes auszudrücken sind, dargestellt.

Bezeichnet  $z_s$  die Höhe der Auffüllung am Scheitel, ferner  $\gamma_b$  das Einheitsgewicht des Betons und  $\gamma_e$  das der Überschüttungserde, so ist die auf Beton (Gewölbe) bezogene Belastungshöhe  $z_s' = z_s \frac{\gamma_e}{\gamma_b}$ . Desgleichen sind die überall gleiche Höhe der Fahrbahndecke  $u_s$  vom Einheitsgewicht  $\gamma_f$  auf die

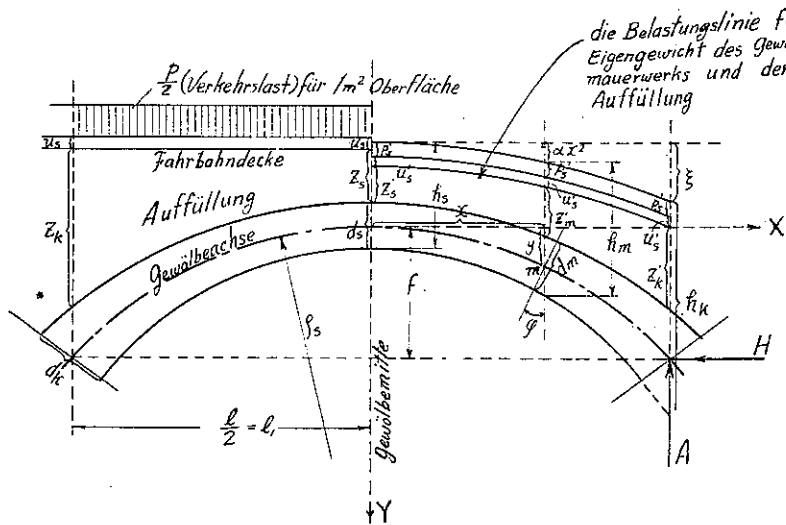


Abb. 34

Höhe  $u_s' = u_s \frac{\gamma_f}{\gamma_b}$  und die Auflast  $\frac{p}{2}$  ( $p$  Verkehrslast äquivalente gleichförmig verteilte Belastung für  $1 m^2$ ) für  $1 m^2$  auf die Höhe  $p_s' = \frac{p}{2\gamma_b}$  zurückzuführen. Die gesamte ermittelte Belastungshöhe am Scheitel ist dann

$$h_s = p_s' + u_s' + z_s' + d_s$$

worin  $d_s$  die Gewölbestärke im Scheitel bedeutet.

Wir nehmen an, dass die Gewölbestärke ändert sich vom Scheitel zum Kämpfer hin nach dem Gesetz  $d_m = d_s \sec \varphi$ .

Wird die Belastungslinie als Parabel angenommen, und die Belastungslinie von der Widerlagern gegen den Bogenscheitel um  $\xi$  ansteigen, so ist ihre Ordinate auf die Scheitelhorizontale bezogen

$$\frac{\xi}{l_1^2} x^2 = \alpha x^2.$$

Die Belastungshöhe im beliebigen Punkte  $m$  für die wagerechte Längeneinheit

$$\begin{aligned} h_m &= d_m \sec \varphi + z'_m + u'_s + p'_s \\ &= d_s \sec^2 \varphi + \left( z'_s + y - \frac{1}{2} d_s \operatorname{tg}^2 \varphi - \alpha x^2 \right) + u'_s + p'_s \\ &= d_s + z'_s + u'_s + p'_s + y + \frac{1}{2} d_s \operatorname{tg}^2 \varphi - \alpha x^2. \end{aligned}$$

Ersetzt man die Bogenachse näherungsweise durch eine Parabel, so ist

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi = \frac{2f}{l_1^2} x$$

und

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{4f^2}{l_1^4} x^2.$$

Man hat sonach

$$h_m = h_s + y + \left[ \frac{2f^2}{l_1^4} d_s - \alpha \right] x^2.$$

Wenn  $h_k$  die Belastungshöhe für die Längeneinheit im Kämpfer bezeichnet

$$h_k = h_s + f + \left[ \frac{2f^2}{l_1^4} d_s - \alpha \right] l_1^2$$

oder

$$h_k = h_s + f + \frac{2f^2}{l_1^2} d_s - \xi.$$

Wenn der Horizontalschub für das Gewölbe gleich  $H$  (in  $cbm$ ) und die Querkraft am Punkte  $m$  gleich  $Q_m$  ist, dann beträgt der Neigungswinkel der Resultierenden aus  $H$  und  $Q_m$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Q_m}{H}.$$

Das ist zugleich auch der Winkel der Gewölbeachse  $\frac{dy}{dx}$ .

Mithin ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q_m}{H}.$$

Weiter findet man

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{H} \frac{dQ_m}{dx}, \text{ und da } \frac{dQ_m}{dx} = h_m$$

auch 
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{h_m}{H}.$$

Damit ist die Differentialgleichung der Stützlinie gegeben.

Mit Ersetzung von  $h_m$  und mit Einführung der abkürzenden Bezeichnung

$$\frac{2f^2}{l_1^4} d_s - \alpha = \nu.$$

$$H \frac{d^2y}{dx^2} - (h_s + y + \nu x^2) = 0$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{y}{H} = \frac{1}{H} (h_s + \nu x^2).$$

Nunmehr ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = U$$

in der  $U$  eine Funktion von  $x$  bedeutet.

Man setze  $\frac{d^2}{dx^2} = D^2$ ;

dann erhält man

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{D^2 + n^2} U \\ &= \frac{1}{2in} \left\{ \frac{1}{D - in} U - \frac{1}{D + in} U \right\} \\ &= \frac{1}{2in} \left\{ e^{inx} \int U e^{-inx} dx - e^{-inx} \int U e^{inx} dx \right\}. \end{aligned}$$

So ist das Integral der gegebenen Gleichung:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2i\sqrt{-\frac{1}{H}}} \left\{ \frac{1}{H} e^{i\sqrt{-\frac{1}{H}} \cdot x} \int (h_s + \nu x^2) e^{-i\sqrt{-\frac{1}{H}} \cdot x} dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{H} e^{-i\sqrt{-\frac{1}{H}} \cdot x} \int (h_s + \nu x^2) e^{i\sqrt{-\frac{1}{H}} \cdot x} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{H}}} \frac{1}{H} \left\{ e^{\sqrt{\frac{1}{H}} \cdot x} \int (h_s + \nu x^2) e^{-\sqrt{\frac{1}{H}} \cdot x} dx \right. \\ &\quad \left. - e^{-\sqrt{\frac{1}{H}} \cdot x} \int (h_s + \nu x^2) e^{\sqrt{\frac{1}{H}} \cdot x} dx \right\} \end{aligned}$$

bezeichnet man  $\sqrt{\frac{1}{H}} = m$ , so ist

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} m \left[ e^{mx} \left\{ -\frac{h_s}{m} e^{-mx} - \frac{\nu}{m} e^{-mx} \left( x^2 + \frac{2x}{m} + \frac{2}{m^2} \right) + C_1 \right\} \right. \\ &\quad \left. - e^{-mx} \left\{ \frac{h_s}{m} e^{mx} + \frac{\nu}{m} e^{mx} \left( x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{2}{m^2} \right) - C_2 \right\} \right] \\ &= \frac{1}{2} m \left[ \frac{1}{m} \left\{ -h_s - \nu \left( x^2 + \frac{2x}{m} + \frac{2}{m^2} \right) \right\} + C_1 e^{mx} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{m} \left\{ h_s + \nu \left( x^2 - \frac{2x}{m} + \frac{2}{m^2} \right) \right\} + C_2 e^{-mx} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ -2 h_s - 2 \nu x^2 - \frac{4}{m^2} \nu \right\} + \frac{1}{2} m \left\{ C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \right\} \\ &= - \left\{ h_s + \nu x^2 + \frac{2}{m^2} \nu \right\} + \frac{1}{2} m \left\{ C_1 e^{mx} + C_2 e^{-mx} \right\}. \end{aligned}$$

Mithin

$$\begin{aligned} y &= - \left\{ h_s + \nu x^2 + 2H \nu \right\} + K_1 e^{x \sqrt{\frac{1}{H}}} + K_2 e^{-x \sqrt{\frac{1}{H}}} \\ &= K_1 e^{x \sqrt{\frac{1}{H}}} + K_2 e^{-x \sqrt{\frac{1}{H}}} - \nu x^2 - 2 \nu H - h_s. \end{aligned}$$

Aus der Bedingung, dass für  $x=0$  auch  $y=0$  ist und dass, symmetrische Belastung vorausgesetzt, für  $\pm x$  sich der gleiche Ordinatenwert ergeben muss, man findet die Integrationskonstanten

$$K_1 = K_2 = \nu H + \frac{h_s}{2}.$$

Daher wird

$$\begin{aligned} y &= \left( \nu H + \frac{h_s}{2} \right) \left( e^{\sqrt{\frac{1}{H}} x} + e^{-\sqrt{\frac{1}{H}} x} \right) - \nu x^2 - 2 \nu H - h_s \\ &= \left( \nu H + \frac{h_s}{2} \right) \left\{ e^{\sqrt{\frac{1}{H}} x} + e^{-\sqrt{\frac{1}{H}} x} - 2 \right\} - \nu x^2 \\ &= 2 \left( \nu H + \frac{h_s}{2} \right) \left\{ \text{Cosh } x \sqrt{\frac{1}{H}} - 1 \right\} - \nu x^2. \end{aligned}$$

Aus Formel der Hyperbelfunktion

$$\text{Cosh } x \sqrt{\frac{1}{H}} = 1 + \frac{x^2}{2} \frac{1}{H} + \frac{x^4}{24} \frac{1}{H^2} + \dots$$

Wir beschränken uns auf die ersten drei Glieder der Exponentialreihen,

so gelten folgende Gleichung

$$y = \left\{ \left( \nu H + \frac{h_s}{2} \right) \left( 1 + \frac{x^2}{12} \frac{1}{H} \right) \frac{1}{H} - \nu \right\} x^2$$

oder

$$y = \left\{ \frac{h_s}{2} \left( 1 + \frac{x^2}{12} \frac{1}{H} \right) + \nu \frac{x^2}{12} \right\} \frac{1}{H} x^2.$$

Auf den Kämpfer, gibt diese Gleichung

$$\begin{aligned} f &= \left\{ \frac{h_s}{2} \left( 1 + \frac{l_1^2}{12} \frac{1}{H} \right) + \nu \frac{l_1^2}{12} \right\} \frac{1}{H} l_1^2 \\ &= \frac{1}{H} \frac{l_1^2}{2} \left[ h_s \left( 1 + \frac{l_1^2}{12} \frac{1}{H} \right) + \nu \frac{l_1^2}{6} \right] \end{aligned}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \frac{\nu l_1^2}{6} &= \left( \frac{2f^2}{l_1^4} d_s - \frac{\xi}{l_1^2} \right) \frac{l_1^2}{6} \\ &= \frac{1}{6} \{ h_k - h_s - f \} \quad (\text{vergl. Seite 45}) \\ &= \lambda \end{aligned}$$

Mithin

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{H} \frac{l_1^2}{2} \left[ h_s \left( 1 + \frac{l_1^2}{12} \frac{1}{H} \right) + \lambda \right] \\ H &= \frac{l_1^2 (h_s + \lambda) + \sqrt{l_1^4 (h_s + \lambda)^2 + 8f \frac{l_1^4}{12} h_s}}{4f} \\ &= \frac{h_s l_1^2}{4f} \left[ \frac{h_s + \lambda}{h_s} + \sqrt{\left( \frac{h_s + \lambda}{h_s} \right)^2 + \frac{2}{3} \frac{f}{h_s}} \right]. \end{aligned}$$

Oder in anderen Form

$$H = C \frac{1}{8} \frac{h_s l_1^2}{f}$$

darin ist

$$C = 2 \left[ \frac{h_s + \lambda}{h_s} + \sqrt{\left( \frac{h_s + \lambda}{h_s} \right)^2 + \frac{2}{3} \frac{f}{h_s}} \right].$$

Es ist

$$\frac{\nu x^2}{12} = \left\{ \frac{2f^2}{l_1^4} d_s - \frac{\xi}{l_1^2} \right\} \frac{x^2}{12}$$



$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \frac{2f^2}{l_1^2} d_s - \xi \right\} \frac{x^2}{12 l_1^2} \\
 &= (h_k - h_s - f) \frac{x^2}{12 l_1^2} \\
 &= \frac{\lambda x^2}{2 l_1^2}
 \end{aligned}$$

damit erhält man als Gleichung der Ordinate der Bogenachse zu:

$$\begin{aligned}
 y &= \left[ \frac{h_s}{2} \left( 1 + \frac{x^2}{12} \frac{8f}{Ch_s l_1^2} \right) + \frac{\lambda}{2 l_1^2} x^2 \right] \frac{8f}{Ch_s l_1^2} x^2 \\
 &= \left[ \frac{h_s}{2} + \left( \frac{f}{3C} + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{x^2}{l_1^2} \right] \frac{8f}{Ch_s l_1^2} x^2
 \end{aligned}$$

oder

$$y = \frac{1}{C} \left[ 1 + \left( \frac{f}{3C} + \frac{\lambda}{2} \right) \frac{2}{h_s l_1^2} x^2 \right] \frac{4f}{l_1^2} x^2.$$

Für ein Gewölbe, das nicht voll überschüttet ist, sondern Sparöffnungen hat und bei dem sich die Fahrbahn nur in einzelnen Punkten auf den Bogen stützt, sind

$$h_s = p_s' + u_s' + d_s$$

und 
$$h_k = h_s + f + \frac{2f^2}{l_1^2} d_s - \xi.$$

Der Scheitelkrümmungshalbmesser der Stützlinie wird

$$\rho_s = \frac{H}{h_s} = C \frac{l_1^2}{8f}.$$

Tabelle der Werte C.

$\frac{h_k}{h_s}$	$\frac{f}{h_s} = 1$	2	3	4	5	6	7	8
1	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00	4.00
1.5	4.29	4.25	4.23	4.21	4.18	4.17	4.15	4.14
2.0	4.58	4.51	4.45	4.42	4.37	4.35	4.32	4.29
2.5	4.91	4.79	4.72	4.64	4.58	4.54	4.47	4.45
3.0	5.25	5.06	4.95	4.85	4.78	4.73	4.69	4.62
3.5	5.52	5.33	5.20	5.10	5.00	4.91	4.84	4.79
4.0	5.79	5.67	5.46	5.33	5.21	5.12	5.03	4.95
4.5	6.09	5.90	5.73	5.63	5.44	5.33	5.23	5.14
5.0	6.42	6.19	6.06	5.83	5.68	5.55	5.44	5.35
6.0	7.04	6.78	6.55	6.40	6.16	5.99	5.85	5.72

7.0	7.69	7.39	7.12	6.89	6.73	6.48	6.30	6.13
8.0	8.32	8.00	7.69	7.44	7.19	7.01	6.76	6.57
9.0	8.97	8.62	8.31	7.99	7.72	7.47	7.29	7.04
10.0	9.62	9.24	8.90	8.58	8.29	8.00	7.75	7.57

### 3. Die Bogenform für das Strassnersche Gesetz.

Die Gesetze, die sich der Wirklichkeit möglichst gut anpassen, sind bereits von Dr. Max, Ritter, Vieser, Dr. Farber und Strassner aufgestellt worden. Das Gesetz Strassners schliesst sich an die günstigste Gewölbeform, was Materialverbrauch anbelangt, bis auf 4.5 % an, ohne dass in irgendeinem Schnitte die Spannungen überschritten würden.

Die Achse massiver Bogentragwerke wird gewöhnlich nach einer, von der Drucklinie für ständige Last oder ständige Last +  $\frac{1}{2}$  Verkehrslast wenig abweichenden Kurve gebildet. Wenn schon das Gewölbege wicht (die Belastung) und die Gewölbeachse gegenseitig voneinander abhängig sind, so lässt sich dennoch, wie in folgenden gezeigt wird, die Gewölbeachse nach einer verhältnismässig einfachen Formel unmittelbar bestimmen. (Vergl. Strassner, Neuere Methoden. Bd. II).

$\alpha$ ) Formgebung der Gewölbeachse.

Es sei für die Längeneinheit:

$g_s$ : das Gewölbege wicht am Scheitel

$g_k$ : „ „ „ „ Kämpfer

$g$ : „ „ „ im Abstände  $x$  vom Scheitel.

Das Gewölbege wicht wächst vom Scheitel nach den Kämpfer zu stetig an. Die Belastungsfläche setzt sich im wesentlichen aus einem Rechteck von der Höhe  $g_s$  und einem der Bogenordinate  $y$  proportionalen Teil  $\nu y$  zusammen (**Abb. 35**).

Die Beziehung lautet im Punkte  $(x, y)$

$$g = g_s + \nu y$$

im Kämpfer

$$g_k = g_s + \nu f$$

woraus

$$\nu = \frac{g_k - g_s}{f}$$

daher folgt

$$g = g_s \left[ 1 + \frac{y}{f} \left( \frac{g_k}{g_s} - 1 \right) \right],$$

wenn  $\frac{g_k}{g_s} = m$  gesetzt wird

$$g = g_s \left[ 1 + \frac{y}{f} (m - 1) \right].$$

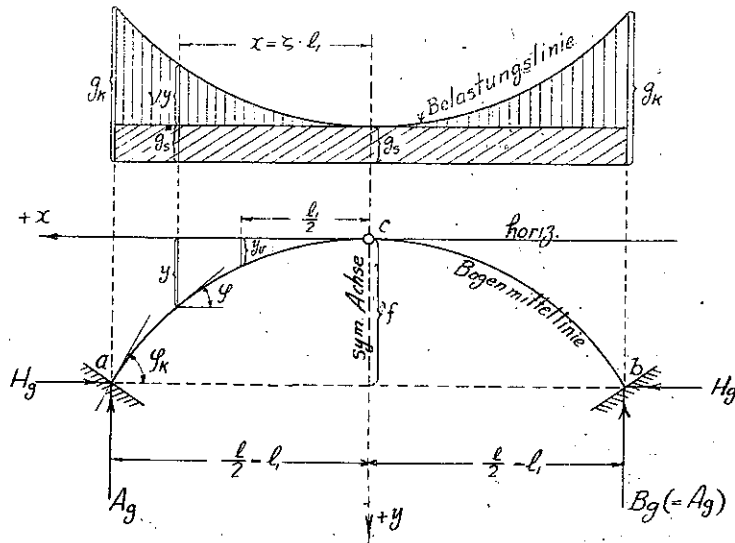


Abb. 35.

Die Differentialgleichung der Stützlinie lautet:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{g}{H_g}$$

oder in anderer Form

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} = \frac{g_s}{H_g} l_1^2 + k^2 y \quad \text{wenn } k^2 = \frac{m-1}{f} \frac{g_s}{H_g} l_1^2.$$

Die Lösung dieser Gleichung ergibt sich

$$y = \frac{f}{m-1} [\text{Cosh } \zeta k - 1] \quad (\text{vergl. Tabelle I})$$

worin

$$\text{Cosh } \zeta k = \frac{e^{\zeta k} + e^{-\zeta k}}{2}.$$

Damit die Kämpferbedingung  $y=f$  erfüllt ist, muss

$$\text{Cosh } k = m, \quad k = \text{Ar Cosh } m = \text{lgn } (m + \sqrt{m^2 - 1}).$$

$$\text{Aus } k^2 = \frac{m-1}{f} \frac{g_s}{H_g} l_1^2$$

folgt die Bogenkraft  $H_g$  aus ständiger Last zu:

$$H_g = \frac{m-1}{f} \frac{g_s l_1^2}{k^2} = k g_s \frac{l_1^2}{f} \quad (\text{vergl. Tabelle II}).$$

Die lotrechte Auflagerkraft  $A_g$  wird:

$$\begin{aligned} A_g &= \int_0^{l_1} g dx = l_1 \int_0^1 g_s \left[ 1 + \frac{y}{f} (m-1) \right] d\zeta \\ &= g_s l_1 \int_0^1 \text{Cosh } \zeta k d\zeta \\ &= g_s l_1 \frac{\text{Sinh } k}{k} \\ &= k g_s l_1 \quad (\text{vergl. Tabelle II}). \end{aligned}$$

Der Winkel  $\varphi$ , den die an die Schnittstelle gelegte Bogentangente bildet mit der Wagerechten, ergibt sich durch Differentiation der Gleichung für die Bogenachse:

$$\text{tg}^2 \varphi = \frac{f^2 k^2}{l_1^2 (m-1)^2} \text{Sinh}^2 \zeta k$$

oder  $\left( \frac{l}{f} \right)^2 \text{tg}^2 \varphi = \frac{4k^2}{(m-1)^2} \text{Sinh}^2 \zeta k \quad (\text{vergl. Tabelle III}).$

und  $\text{tg} \varphi_k = \frac{2k \sqrt{m^2 - 1}}{m-1} \frac{f}{l} \quad (\text{vergl. Tabelle II}).$

Die Ordinate  $y_v$  im Gewölbeviertel berechnet sich auf Grund der Gleichung zu

$$y = \frac{f}{m-1} [\text{Cosh } \zeta k - 1],$$

für das Gewölbeviertel

$$\zeta = \frac{1}{2}, \quad y = y_v$$

$$y_v = \frac{f}{2 + \sqrt{2(m+1)}} \quad (\text{vergl. Tabelle III}),$$

daraus folgt

$$m = \frac{1}{2} \left( \frac{f}{y_v} - 2 \right)^2 - 1, \quad \text{tg} \varphi_v = \frac{1}{l} \frac{f k}{\sqrt{2(m-1)}}$$

β) Der Verlauf der Gewölbeachse.

Für  $m=1$  (Parabel) und  $\frac{y_0}{f}=0,25$  wird  $g_k=g_s$ ;

$$\frac{d^2y}{d\xi^2} = \frac{g_s}{H_g} l_1^2 \quad \text{oder} \quad y = \frac{l_1^2}{2H_g} g_s \xi^2$$

für  $\xi=1$  wird  $y=f$

$$f = \frac{l_1^2}{2} \frac{g_s}{H_g},$$

daraus

$$y = f \xi^2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{l}{f}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = 16 \xi^2$$

#### 4. Abschätzung der Gewölbestärken.

Die Berechnung der erforderlichen Gewölbestärken bei vorgeschriebener Spannweite und Beanspruchung ist erst möglich nach Annahme eines bestimmten Querschnitts, der die ungefähre Form und Stärke des Gewölbes enthält.

Es ist zweckmässig zunächst die Gewölbestärke mittels folgender Formeln überschläglich zu bestimmen.

Bezeichnet:

$d_s$ : die Gewölbestärke im Scheitel,

$d$ : die Gewölbestärke an der Stelle  $(x, y)$ ,

$n$ : ein Wert kleiner als  $l$ , welcher die Querschnittszunahme charakterisiert,

Mit dem Querschnittsgesetz

$$J \cos \varphi = \frac{J_s}{1 + Cx^2} \quad (1)$$

durch Einführung der Werte  $J_k$  und  $\varphi_k$  für die Kämpfer auf die Form

$$\frac{J_s}{J \cos \varphi} = 1 - \left(1 - \frac{J_s}{J_k \cos \varphi_k}\right) \frac{x^2}{l_1^2} = 1 - (1-n) \frac{x^2}{l_1^2} = 1 - (1-n) \xi^2$$

gebracht werden kann.

Allgemein geschrieben, lautet das Gesetz

$$\frac{J_s}{J \cos \varphi} = 1 - (1-n) \xi^r,$$

im Falle Strassner ist der Exponent  $r$  gleich 1.

(1) Vergl. Schweizerische Bauzeitung 1908. M. Ritter, Vereinfachung der Berechnung gelenkloser Brückengewölbe.

Man erhält das Trägheitsmoment  $J = \frac{bd^3}{12}$ , worin  $b$  die Gewölbebreite,  $d$  die Dicke bedeutet.

$$\frac{J_s}{J \cos \varphi} = \frac{d_s^3}{d^3 \cos \varphi} = 1 - (1-n)\zeta^r \quad (\text{für } 1 \text{ m Tiefe}),$$

woraus

$$\begin{aligned} d &= d_s \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi}} \frac{1}{\sqrt[3]{1 - (1-n)\zeta^r}} \\ &= d_s \frac{1}{\sqrt[3]{1 - (1-n)\zeta^r}} \sqrt[6]{1 + \text{tg}^2 \varphi} \\ &= d_s C \sqrt[6]{1 + \text{tg}^2 \varphi} \end{aligned}$$

worin

$$C = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - (1-n)\zeta^r}} \quad (\text{vergl. Tabelle IV u. V}).$$

### 5. Die Berechnung des Brückengewölbes.

**Fall I.** Berechnung des symmetrischen parabolischer Bogens  $y = f \zeta^2$  unter der Annahme

$$\frac{J_s}{J \cos \varphi} = 1 - (1-n)\zeta^r.$$

1) Allgemeins.

$$X(=H) = -\frac{P \delta_{mx}}{\delta_{xx}}$$

$$Y = -\frac{P_m \delta_{my}}{\delta_{yy}}$$

und

$$\begin{cases} \delta_{xx} = \int \frac{M_x^2}{EJ} ds + \int \frac{N_x^2}{EF} ds \\ \delta_{yy} = \int \frac{M_y^2}{EJ} ds + \int \frac{N_y^2}{EF} ds \end{cases}$$

Für Belastungszustand  $x=1$  (**Abb. 37, a**)

$$N_x = -1 \cos \varphi, \quad M_x = +1 y$$

und für Belastungszustand

$$Y=1 \quad (\text{Abb. 37, b})$$

$$N_y = +1 \sin \varphi, \quad M_y = +1 x.$$

So erhält man

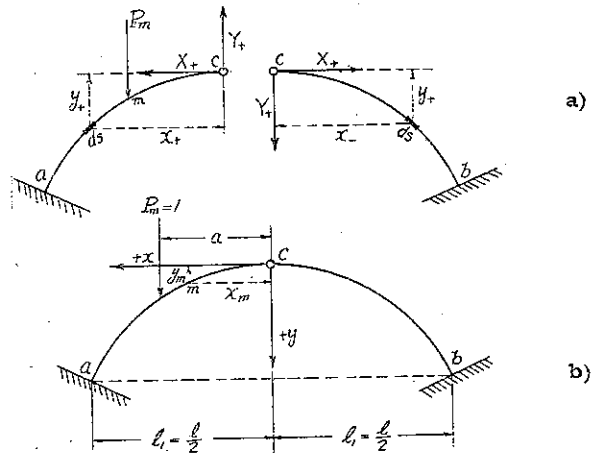


Abb. 36.

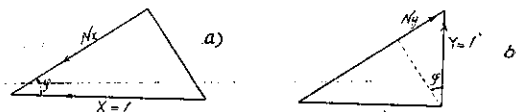


Abb. 37.

$$E J_s \delta_{xx} = 2 \int_a^c y^2 \frac{J_s}{J} ds + 2 \int_a^c \cos^2 \varphi \frac{J_s}{F} ds$$

$$E J_s \delta_{yy} = 2 \int_a^c x^2 \frac{J_s}{J} ds + 2 \int_a^c \sin^2 \varphi \frac{J_s}{F} ds.$$

Will man die Normalkräfte berücksichtigen, dann ist

$$\begin{aligned} 2 \int_a^c \cos^2 \varphi \frac{J_s}{F} ds &= 2 \int_0^{l_1} \cos^2 \varphi \frac{J_s}{F_s} dx \\ &= 2 \frac{J_s}{F_s} \int_0^{l_1} \frac{l_1^4}{l_1^4 + 4f^2 x^2} dx \quad (\text{vergl. S. 53}) \\ &= \frac{J_s}{F_s} \frac{l_1^2}{f} \operatorname{arctg} \frac{2f}{l_1} \\ &= \sim \frac{2J_s}{F_s} l_1 \end{aligned}$$

wo  $F_s (= F \cos \varphi)$  den Scheitelquerschnitt bedeuten.

Daher wird

$$E J_s \delta_{xx} = 2 \int_a^c y^2 \frac{J_s}{J} ds + \frac{2J_s}{F_s} l_1$$

oder

$$E J_s \delta_{xx} = 2 \int_a^c y^2 \frac{J_s}{J} ds (1 + \mu)$$

worin

$$\mu = \frac{\frac{J_s}{F_s} l_1}{\int_a^c y^2 \frac{J_s}{J} ds} = \frac{\frac{J_s}{F_s} l}{2 \int_a^c y^2 \frac{J_s}{J} ds} = \frac{l}{2 \int_a^c y^2 \frac{ds}{EJ}}$$

Für die Gelenkquerkraft  $Y$  kann der Einfluss der Normalkräfte vernachlässigt werden, dann ist

$$E J_s \delta_{yy} = 2 \int_a^c x^2 \frac{J_s}{J} ds.$$

2) Ermittlung von  $X$ -Linie für lotrechte Belastungen.

$$\begin{aligned} 2 \int_a^c y^2 \frac{J_s}{J} ds &= 2 \int_0^{l_1} y^2 \frac{J_s}{J \cos \varphi} dx \\ &= 2 \int_0^1 f^2 l_1 \zeta^4 [1 - (1-n)\zeta^r] d\zeta \\ &= \frac{2}{5} f^2 l_1 \frac{r+5n}{r+5}. \end{aligned}$$

$$\mu = \frac{\frac{J_s}{F_s} l_1}{\int_a^c y^2 \frac{J_s}{J} ds} = \frac{5(r+5)}{r+5n} \left( \frac{i_s}{f} \right)^2$$

oder bei rechteckigen Querschnitten mit  $i_s^2 = \frac{d_s^2}{12}$

$$\mu = \frac{5(r+5)}{12(r+5n)} \left( \frac{d_s}{f} \right)^2$$

worin

$$i_s^2 = \frac{J_s}{F_s}$$

So erhält man

$$\delta_{xx} = \frac{f^2 l_1}{E J_s} \frac{2(r+5n)}{5(r+5)} \left[ 1 + \frac{5(r+5)}{r+5n} \left( \frac{i_s}{f} \right)^2 \right]$$

Die Biegungslinien können aus der Momentenfläche der elastischen Gewichte ermittelt werden<sup>(1)</sup>

$$\frac{d^2 \delta_{mx}}{dx^2} = -\frac{M_x}{E J \cos \varphi} = -\frac{y}{E J \cos \varphi} = -\frac{f \zeta^2}{E J_s} \left[ 1 - (1-n) \zeta^r \right]$$

unter Beachtung, dass  $dx^2 = l_1^2 d\zeta^2$

$$\frac{d^2 \delta_{mx}}{d\zeta^2} = -\frac{f l_1^2}{E J_s} \left[ \zeta^2 - (1-n) \zeta^{r+2} \right]$$

Durch zweimalige Integration und Berücksichtigung der nachstehenden Bedingungsgleichung zur Ermittlung der Konstanten erhält man

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\delta_{mx}}{dx} = 0 \quad \text{für } x = l_1 \\ \delta_{mx} = 0 \quad \text{für } x = l_1 \end{array} \right\} \text{starre Widerlager}$$

$$\delta_{mx} = -\frac{f l_1^2}{E J_s} \left[ \frac{1}{12} (\zeta^4 - 1) - \frac{1-n}{(r+3)(r+4)} (\zeta^{r+4} - 1) - \frac{r+3n}{3(r+3)} (\zeta - 1) \right]$$

Somit wird Einflussordinate

$$X_{P_{n-1}} = -1 \frac{\delta_{mx}}{\delta_{xx}} = \frac{l}{f} \frac{5}{4} \frac{r+5}{r+5n} \frac{\frac{1}{12} (\zeta^4 - 1) - \frac{1-n}{(r+3)(r+4)} (\zeta^{r+4} - 1) - \frac{r+3n}{3(r+3)} (\zeta - 1)}{1 + \frac{5(r+5)}{r+5n} \left( \frac{i_s}{f} \right)^2}$$

(1) vergl. Strassner, Neuere Methoden Bd. II. S. 19.



oder

$$X(=H) \frac{f}{l} (1+\mu) = \frac{5}{4} \frac{r+5}{r+5n} \left[ \frac{1}{12} (\zeta^4 - 1) - \frac{1-n}{(r+3)(r+4)} (\zeta^{r+4} - 1) - \frac{r+3n}{3(r+3)} (\zeta - 1) \right].$$

Einflussordinate im Gelenk ( $\zeta=0$ )

$$X_{P_{m=1}} = \frac{5}{8} \frac{l_1}{f} \frac{r+4n}{r+4} \frac{r+5}{r+5n} \frac{1}{1+\mu},$$

und für  $n=1$

$$X_{P_{m=1}} = \frac{5}{8} \frac{l_1}{f} \frac{1}{1+5\left(\frac{i_s}{f}\right)^2} \approx \frac{5}{8} \frac{l_1}{f}.$$

### 3) Ermittlung von $Y$ -Linie für lotrechte Belastungen.

$$\begin{aligned} EJ_s \delta_{yy} &= 2 \int_a^c x^2 \frac{J_s}{J} ds = 2 \int_0^{l_1} x^2 \frac{J_s}{J \cos \varphi} dx \\ &= 2 \int_0^1 l_1^2 \zeta^2 l_1 [1 - (1-n)\zeta^r] d\zeta \\ &= \frac{2}{3} l_1^3 \frac{r+3n}{r+3} \end{aligned}$$

so erhält man

$$\delta_{yy} = \frac{2}{3} \frac{l_1^3}{EJ_s} \frac{r+3n}{r+3}.$$

$$\frac{d^2 \delta_{my}}{dx^2} = -\frac{M_y}{EJ \cos \varphi} = -\frac{x}{EJ \cos \varphi} = -\frac{l_1}{EJ_s} \zeta [1 - (1-n)\zeta^r]$$

$$\delta_{my} = -\frac{l_1^3}{EJ_s} \left[ \frac{\zeta^3}{6} - \frac{1-n}{(r+2)(r+3)} \zeta^{r+3} - \frac{r+2n}{2(r+2)} \zeta + \frac{r+3n}{3(r+3)} \right].$$

Daher wird

$$\begin{aligned} Y_{P_{m=1}} &= -1 \frac{\delta_{my}}{\delta_{yy}} \\ &= \frac{3}{2} \frac{r+3}{r+3n} \left[ \frac{\zeta^3}{6} - \frac{1-n}{(r+2)(r+3)} \zeta^{r+3} - \frac{r+2n}{2(r+2)} \zeta + \frac{r+3n}{3(r+3)} \right]. \end{aligned}$$

Es ist zu bemerken, dass die Gelenkquerkraft  $Y$  vollständig unabhängig von der Bogenform ist.

**Einflussordinaten für die Bogenkraft X und die Gelenkquerkraft Y.**

(Werte nach Vieser, Triest.)

**Bogenkraft X.**

r	1					$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
Scheitel	0,625	0,673	0,700	0,743	0,750	0,655	0,652	0,740
1	0,556	0,587	0,608	0,641	0,645	0,576	0,574	0,640
2	0,486	0,507	0,519	0,540	0,541	0,499	0,496	0,542
3	0,418	0,427	0,431	0,441	0,441	0,423	0,421	0,443
4	0,350	0,347	0,348	0,347	0,347	0,342	0,345	0,350
5	0,284	0,273	0,267	0,260	0,258	0,277	0,271	0,269
Viertel	0,221	0,207	0,196	0,183	0,179	0,211	0,203	0,193
7	0,163	0,147	0,134	0,116	0,116	0,151	0,141	0,128
8	0,111	0,093	0,082	0,068	0,065	0,100	0,084	0,078
9	0,066	0,053	0,043	0,032	0,028	0,058	0,033	0,039
10	0,031	0,020	0,018	0,012	0,009	0,026	0,010	0,014
11	0,008	0,007	0,004	0,001	0,002	0,004	0,002	0,005
Kämpfer	0	0	0	0	0	0	0	0

$\frac{l_2}{f}$

**Gelenkquerkraft Y.**

r	1					$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
Scheitel	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500	0,500
1	0,433	0,429	0,423	0,418	0,417	0,430	0,431	0,414
2	0,376	0,360	0,350	0,340	0,333	0,362	0,362	0,335
3	0,317	0,294	0,273	0,266	0,264	0,298	0,298	0,262
4	0,259	0,233	0,216	0,200	0,198	0,238	0,239	0,199
5	0,206	0,173	0,161	0,142	0,141	0,183	0,184	0,142
Viertel	0,156	0,131	0,114	0,096	0,094	0,136	0,137	0,093
7	0,121	0,088	0,074	0,059	0,057	0,092	0,093	0,053
8	0,074	0,056	0,045	0,033	0,031	0,052	0,060	0,036
9	0,042	0,030	0,024	0,014	0,013	0,033	0,035	0,015
10	0,020	0,014	0,009	0,005	0,005	0,017	0,025	0,006
11	0,006	0,004	0,002	0,002	0,001	0,005	0,005	0,001
Kämpfer	0	0	0	0	0	0	0	0

**4) Die Einflusslinien für die Momente für lotrechte Belastungen.**

Nach (Abb. 36, b) erhalten wir für die Biegemoment  $M_m$  des Eingelenkbogens

$$M_m = M_{0m} + Xy_m + Yx_m$$

worin  $M_{0m}$ : das Moment der äusseren Kräfte  $P_m$  im statische bestimmten Hauptsystem bedeuten,

oder  $M_{0m} = -1(X_m - a)$ .

5) Die Wirkung der gleichmässig verteilten Verkehrslast  $p$   $t/m$ .

Das Biegemoment im Kämpfer und in Sechstel nächst dem Scheitel (Punkt 4).

A)  $p$  über dem ganzen Bogen.

Die Gleichungen für die Querkraft und die Bogenkraft sind:

$$Y_p = 0$$

und 
$$X_p = - \frac{\int_a^b M_{0y} \frac{ds}{EJ}}{2 \int_a^c y^2 \frac{ds}{EJ} (1 + \mu)}$$

Hierin ist

$$M_0 = - \frac{px^2}{2} = - p \frac{l_1^2}{2} \zeta^2,$$

so folgt 
$$\int_a^b M_{0y} \frac{ds}{EJ} = - \frac{pfl_1^3}{EJ_s} \frac{r+5n}{5(r+5)}$$

Daraus erhält man

$$X_p = \frac{pl_1^2}{f} \frac{1}{2(1+\mu)}$$

Das Moment für irgend einen Querschnitt des Bogens ergibt sich

$$M = - \frac{px^2}{2} + X_p y = - \frac{pl_1^2}{2} \mu \zeta^2.$$

B)  $p$  über einer Bogenhälfte.

In diesem Belastungsfall ist  $X$  nur halb so gross wie im vorigen

$$X_p = \frac{pl_1^2}{f} \frac{1}{4(1+\mu)},$$

$$Y_p = - \frac{\int_a^c M_{0x} \frac{ds}{EJ}}{2 \int_a^c x^2 \frac{ds}{EJ}}$$

hierin

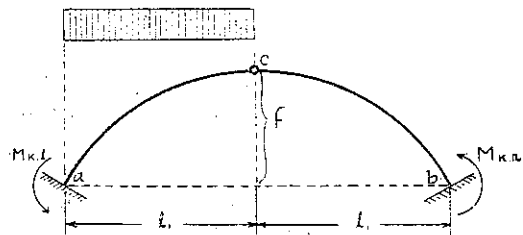


Abb. 38.

$$\int_a^c M_0 x \frac{ds}{EJ} = -\frac{pl_1^4}{2} \frac{1}{EJ_s} \frac{r+4n}{4(r+4)},$$

daraus

$$Y_D = \frac{3}{16} pl_1 \frac{(r+3)(r+4n)}{(r+4)(r+3n)};$$

und

$$M = -\frac{pl_1^2}{4} (1+\mu) \zeta^2 + \frac{3}{16} pl_1^2 \frac{(r+3)(r+4n)}{(r+4)(r+3n)} \zeta.$$

Für das linke Kämpfermoment

$$\begin{aligned} M_{kl} &= M_0 + X_D f + Y_D l_1 \\ &= -\frac{pl_1^2}{2} + \frac{pl_1^2}{f} \frac{1}{4(1+\mu)} f + \frac{3}{16} pl_1^2 \frac{(r+3)(r+4n)}{(r+4)(r+3n)} \\ &= -\frac{pl_1^2}{4} \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{(r+3)(r+4n)}{(r+4)(r+3n)} + \frac{\mu}{1+\mu} \right], \end{aligned}$$

oder da im allgemeinen  $\mu$  klein gegen 1 ist,

$$M_{kl} = -\frac{pl_1^2}{4} \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{(r+3)(r+4n)}{(r+4)(r+3n)} + \mu \right]$$

und für das rechte Kämpfermoment

$$M_{kr} = +\frac{pl_1^2}{4} \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{(r+3)(r+4n)}{(r+4)(r+3n)} - \mu \right].$$

Das Moment im Sechstel nächst dem Scheitel für halbseitige Belastung:

$$\zeta = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{1}{9} f$$

$$M_0 = -\frac{px^2}{2} = -\frac{pl_1^2}{18}$$

$$\begin{aligned} M_{\text{sech. l}} &= M_0 + \frac{pl_1^2}{f} \frac{1}{4(1+\mu)} \frac{f}{9} + \frac{3}{16} pl_1 \frac{(r+3)(r+4n)}{(r+4)(r+3n)} \frac{l_1}{3} \\ &= -\frac{pl_1^2}{36} \left[ 1 - \frac{9}{4} \frac{(r+3)(r+4n)}{(r+4)(r+3n)} + \mu \right] \end{aligned}$$

$$M_{\text{sech. r}} = +\frac{pl_1^2}{36} \left[ 1 - \frac{9}{4} \frac{(r+3)(r+4n)}{(r+4)(r+3n)} - \mu \right].$$

C) Ermittlung der Beanspruchung durch Eigengewicht.

Die Beanspruchung durch Eigengewicht setzt sich zusammen

1° aus der Grundpressung infolge der Normalkraft

$$N_0 \left( = -\frac{H_s}{\cos \varphi} = -H_s \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} \right)$$

und

2° aus den Biegungsspannungen, d. h. den Zusatzspannungen infolge der durch die Zusammendrückung des Gewölbes bedingten Zusatzbogenkraft  $\Delta X_e$ .

Es gibt

$$\Delta X_e = - \frac{\int \frac{N_0 N_e}{EF} ds}{\delta_{xx}}$$

worin  $ds \cos \varphi = dx$ ,  $N_e = -1 \cos \varphi$

und  $F \cos \varphi = F_s$

daraus

$$\Delta X_e = - \frac{2 \int_0^{l_1} \frac{H_s}{EF_s} dx}{\delta_{xx}} = - H_s \frac{\mu}{1 + \mu}$$

oder

$$\Delta X_e = \sim -\mu H_s$$

und nach Dr. M. Ritter ergibt sich zu

$$H_s = \frac{5g_s + g_e l_1^2}{12f}$$

worin

$H_s$ , die Bogenkraft aus Eigengewicht im Dreigelenkbogen.<sup>(1)</sup>

Die Zusatzspannungen berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_g &= \pm \frac{\Delta X_e y}{W} = \mp \frac{\mu H_s y}{W} \\ &= \mp \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \left( \frac{d_s}{d} \right)^3 \frac{d}{f} \zeta^2 \sigma_s \end{aligned}$$

worin  $\sigma_s = \frac{H_s}{d_s}$  (im Scheitel).

Im Kämpfer bezw. im Sechstel erhält man

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{kp} &= \mp \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \left( \frac{d_s}{d_k} \right)^3 \frac{d_k}{f} \sigma_s \\ \Delta \sigma_{sech.} &= \mp \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \left( \frac{d_s}{d_{sech.}} \right)^3 \frac{d_{sech.}}{f} \sigma_s \end{aligned}$$

(1) vergl. Taschenbuch für Bauingenieur von Förster S. 1685.

Für rechteckigen Querschnitt sind mit  $k_o = k_u = \frac{d}{6}$  die obere Kernpunktsordinate  $y_{k_o} = y - \frac{d}{6 \cos \varphi}$  und die untere Kernpunktsordinate  $y_{k_u} = y + \frac{d}{6 \cos \varphi}$ .

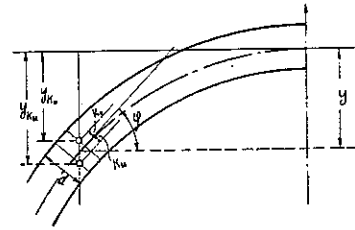


Abb. 39.

$$\sigma_o = \frac{M_{k_u}}{W}, \quad M_{k_u} = -X y_{k_u}$$

$$\sigma_u = \frac{M_{k_o}}{W}, \quad M_{k_o} = -X y_{k_o}$$

So wird :

$$\begin{aligned} \sigma_{oy} &= + \frac{\mu H_s y_{k_u}}{W} \\ &= + \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \left(\frac{d_s}{d}\right)^3 \frac{d}{f} \zeta^2 \sigma_s + \frac{5(r+5)}{12(r+5n)} \left(\frac{d_s}{d}\right) \left(\frac{d}{f}\right)^2 \frac{1}{\cos \varphi} \sigma_s \end{aligned}$$

oder

$$\sigma_{oy} = + \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \left(\frac{d_s}{d}\right)^3 \frac{d}{f} \sigma_s \left[ \zeta^2 + \frac{1}{6} \frac{d}{f} \frac{1}{\cos \varphi} \right]$$

$$\begin{aligned} \sigma_{uy} &= - \frac{\mu H_s y_{k_o}}{W} \\ &= - \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \left(\frac{d_s}{d}\right)^3 \frac{d}{f} \sigma_s \left[ \zeta^2 - \frac{1}{6} \frac{d}{f} \frac{1}{\cos \varphi} \right]. \end{aligned}$$

d) Ermittlung der Beanspruchung durch Wärmeänderung und Schwinden.

$$\begin{aligned} X_t &= \frac{\epsilon t l}{\delta_{xx}} \\ &= \sim E \epsilon t \frac{5(r+5)}{r+5n} \frac{d_s^3}{12} \frac{1}{f^2}. \end{aligned}$$

Die Spannung aus Temperaturänderung berechnet sich zu

$$\sigma_t = \frac{X_t y}{W} = E \epsilon t \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \left(\frac{d_s}{d}\right)^3 \frac{d}{f} \zeta^2,$$

oder für Erwärmung

$$\sigma_{ot} = - E \epsilon t \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \left(\frac{d_s}{d}\right)^3 \frac{d}{f} \left[ \zeta^2 + \frac{1}{6} \frac{d}{f} \frac{1}{\cos \varphi} \right]$$

$$\sigma_{ut} = + E \epsilon t \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \left(\frac{d_s}{d}\right)^3 \frac{d}{f} \left[ \zeta^2 - \frac{1}{6} \frac{d}{f} \frac{1}{\cos \varphi} \right]$$

und für Erkaltung bzw. Schwinden des Betons

$$\sigma_{ot} = E\epsilon t \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \left(\frac{d_s}{d}\right)^3 \frac{d}{f} \left[ \zeta^2 + \frac{1}{6} \frac{d}{f} \frac{1}{\cos \varphi} \right]$$

$$\sigma_{ut} = -E\epsilon t \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \left(\frac{d_s}{d}\right)^3 \frac{d}{f} \left[ \zeta^2 - \frac{1}{6} \frac{d}{f} \frac{1}{\cos \varphi} \right].$$

Die Spannungen aus Eigengewicht und Temperaturänderung betragen

$$\sigma = -\frac{H_s}{d \cos \varphi} \pm \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \left(\frac{d_s}{d}\right)^3 \frac{d}{f} \zeta^2 [\sigma_s - E\epsilon t].$$

**Fall II.** Berechnung des symmetrischen Bogens mit der Stützliniengleichung

$$y = \frac{f}{m-1} [\text{Cosh} \zeta k - 1] \quad (\text{die Bogenform beliebig}).$$

1) Nachstehend ist die Grösse von  $X$  zu ermitteln (genaues Verfahren).

(i) Für  $r=2$

$$\begin{aligned} 2 \int_a^c y^2 \frac{J_s}{J} ds &= 2 \int_0^{l_1} y^2 \frac{J_s}{J \cos \varphi} dx \\ &= \frac{2f^2 l_1}{(m-1)^2} \int_0^1 [\text{Cosh} \zeta k - 1]^2 d\zeta [1 - (1-n)\zeta^r] \\ &= \frac{2f^2 l_1}{(m-1)^2} \left[ \frac{n}{2} \left\{ \frac{\sqrt{m^2-1}}{k} (m-4) + 1 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-n}{4k^2} \left\{ 2m^2 - 16m - 1 - \frac{\sqrt{m^2-1}}{k} (m-16) \right\} + 1 \right]. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \delta_{xx} &= \frac{f^2 l}{EJ_s} \frac{1}{(m-1)^2} \left[ \frac{n}{2} \left\{ \frac{\sqrt{m^2-1}}{k} (m-4) + 1 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1-n}{4k^2} \left\{ 2m(m-8) - \frac{\sqrt{m^2-1}}{k} (m-16) - 1 \right\} + 1 \right] (1+\mu). \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \delta_{mx}}{d\zeta^2} = -\frac{fl^2}{(m-1)EJ \cos \varphi} [\text{Cosh} \zeta k - 1]$$

$$\begin{aligned} \delta_{mx} &= -\frac{fl^2}{4EJ_s} \frac{1}{m-1} \left[ \frac{\text{Cosh} \zeta k}{k^2} - \frac{\zeta^2}{2} - (1-n) \left\{ \frac{6}{k^4} \text{Cosh} \zeta k - \frac{4\zeta}{k^3} \text{Sinh} \zeta k \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\zeta^2}{k^2} \text{Cosh} \zeta k - \frac{\zeta^4}{12} \right\} + (c_1 + nc_2)(1-\zeta) + c_3 - nc_4 \right]. \end{aligned}$$

worin

$$c_1 = -\frac{2\sqrt{m^2-1}}{k^3} + \frac{2m}{k^2} - \frac{2}{3}$$

$$c_2 = \frac{2\sqrt{m^2-1}}{k^3} - \frac{2m}{k^2} + \frac{\sqrt{m^2-1}}{k} - \frac{1}{3}$$

$$c_3 = \frac{6m}{k^4} - \frac{4\sqrt{m^2-1}}{k^3} + \frac{5}{12}$$

$$c_4 = \frac{6m}{k^4} - \frac{4\sqrt{m^2-1}}{k^3} + \frac{m}{k^2} - \frac{1}{12}$$

$$r=2, n=\text{bel.}, m=\text{bel.},$$

woraus

$$\text{Einflussordinate } X_{r=m-1} = -1 \frac{\delta_{mx}}{\delta_{xx}}$$

(ii) Für  $r=1$

$$2 \int_a^c y^2 \frac{J_s}{J} ds = \frac{2f^2 l_1}{(m-1)^2} \left[ n \frac{\sqrt{m^2-1}}{2k} (m-4) + \frac{1-n}{4k^2} m(m-7)(m-1) + \frac{3}{4}(1+n) \right]$$

daraus folgt

$$\delta_{xx} = \frac{f^2 l}{EJ_s} \frac{1}{(m-1)^2} \left[ \frac{1-n}{4k^2} (m-7)(m-1) + n \frac{\sqrt{m^2-1}}{2k} (m-4) + \frac{3}{4}(1+n) \right] (1+\mu).$$

$$\delta_{mx} = -\frac{fl^2}{4EJ_s} \frac{1}{m-1} \left[ \frac{\text{Cosh } \zeta k}{k^2} - \frac{\zeta^2}{2} + (1-n) \left\{ \frac{2 \text{Sinh } \zeta k}{k^3} - \frac{\zeta \text{Cosh } \zeta k}{k^2} + \frac{\zeta^3}{6} \right\} \right]$$

$$+ (c_1 - nc_2)(1-\zeta) - c_3 + nc_4$$

worin

$$c_1 = \frac{m}{k^2} - \frac{1}{2}$$

$$c_2 = \frac{m}{k^2} - \frac{\sqrt{m^2-1}}{k} + \frac{1}{2}$$

$$c_3 = \frac{2\sqrt{m^2-1}}{k^3} - \frac{1}{3}$$

$$c_4 = \frac{2\sqrt{m^2-1}}{k^3} - \frac{m}{k^2} + \frac{1}{6}$$

2) Das Näherungsverfahren zur Berechnung der Bogenkraft  $X$  ergibt sich wie folgt.

$$\text{Cosh } \zeta k = 1 + \frac{(\zeta k)^2}{2!} + \frac{(\zeta k)^4}{4!} + \frac{(\zeta k)^6}{6!} + \dots$$

so folgt

$$y = \frac{f}{m-1} \left[ \frac{(\zeta k)^2}{2!} + \frac{(\zeta k)^4}{4!} \right]$$

$$= f(c_1 \zeta^2 + c_2 \zeta^4).$$



Am Kämpfer  $1 = c_1 + c_2$   
 und am Gewölbeviertel  $\frac{y_v}{f} = \frac{c_1}{4} + \frac{c_2}{16}$ .

Daraus folgt

$$c_1 = \frac{1}{3} \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right)$$

und  $c_2 = \frac{4}{3} \left( 1 - 4 \frac{y_v}{f} \right)$

durch Einsetzen in den Ausdruck für  $y$  erhält man

$$y = \frac{f}{3} \left[ \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \zeta^2 - 4 \left( 4 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \zeta^4 \right].$$

$$\begin{aligned} 2 \int_a^c y^2 \frac{J_s}{J} ds &= 2 \int_0^1 y^2 \frac{J_s}{J \cos \varphi} dx \\ &= \frac{2}{9} f^2 l \left[ \frac{r+5n}{5(r+5)} \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right)^2 - 8 \frac{r+7n}{7(r+7)} \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \left( 4 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + 16 \frac{r+9n}{9(r+9)} \left( 4 \frac{y_v}{f} - 1 \right)^2 \right] \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} \delta_{xx} &= \frac{f^2 l}{9 E J_s} \left[ \frac{r+5n}{5(r+5)} \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right)^2 - 8 \frac{r+7n}{7(r+7)} \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \left( 4 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \right. \\ &\quad \left. + 16 \frac{r+9n}{9(r+9)} \left( 4 \frac{y_v}{f} - 1 \right)^2 \right] (1 + \mu). \end{aligned}$$

Für  $r=1$  folgt:

$$\begin{aligned} \delta_{xx} &= \frac{f^2 l}{9 E J_s} \left[ \frac{1}{45} \left\{ 1,5 \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right)^2 - \frac{45}{7} \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \left( 4 \frac{y_v}{f} - 1 \right) + 8 \left( 4 \frac{y_v}{f} - 1 \right)^2 \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{30} \left\{ 5 \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right)^2 - 30 \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \left( 4 \frac{y_v}{f} - 1 \right) + 48 \left( 4 \frac{y_v}{f} - 1 \right)^2 \right\} \right] (1 + \mu). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{mx} &= -\frac{f l^2}{12 E J_s} \left[ \frac{1}{12} \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \zeta^4 - \frac{2}{15} \left( 4 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \zeta^6 \right. \\ &\quad \left. - (1-n) \left\{ \frac{1}{(r+3)(r+4)} \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \zeta^{r+4} - \frac{4}{(r+5)(r+6)} \left( 4 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \zeta^{r+6} \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{r+3n}{3(r+3)} \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right) - \frac{4(r+5n)}{5(r+5)} \left( 4 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \right\} \zeta \right. \\ &\quad \left. + \frac{r+4n}{4(r+4)} \left( 16 \frac{y_v}{f} - 1 \right) - \frac{2(r+6n)}{3(r+6)} \left( 4 \frac{y_v}{f} - 1 \right) \right]. \end{aligned}$$

Für  $r=1$  folgt:

$$\begin{aligned} \delta_{m_v} = & -\frac{fl^2}{12EJ_s} \left[ \frac{1}{60} \left\{ 5 \left( 16 \frac{y_n}{f} - 1 \right) \zeta^4 - 8 \left( 4 \frac{y_n}{f} - 1 \right) \zeta^6 \right. \right. \\ & - \frac{1-n}{420} \left\{ 21 \left( 16 \frac{y_n}{f} - 1 \right) \zeta^5 - 40 \left( 4 \frac{y_n}{f} - 1 \right) \zeta^7 \right. \\ & - \frac{1}{60} \left\{ 5(1+3n) \left( 16 \frac{y_n}{f} - 1 \right) - 8(1+5n) \left( 4 \frac{y_n}{f} - 1 \right) \right\} \zeta \\ & \left. \left. + \frac{1}{420} \left\{ 21(1+4n) \left( 16 \frac{y_n}{f} - 1 \right) - 40(1+6n) \left( 4 \frac{y_n}{f} - 1 \right) \right\} \right] \right]. \end{aligned}$$

### Drittes Kapitel.

#### Die Wälzgelenke aus Eisenbeton.

##### 1. Allgemeins.

Die Wälzgelenke werden aus zwei Gelenkquadern gebildet, welche an der Berührungsstelle hohl bzw. erhaben gekrümmte Zylinderflächen besitzen, die aufeinander abrollen können. Die konkave Fläche besitzt einen etwas grösseren Krümmungshalbmesser als die konvexe, so dass eine ziemlich widerstandslose Verdrehung durch Abwälzen stattfinden kann. Die dabei eintretende Verschiebung der Berührungsstelle der Gelenke ist aber so geringfügig, dass sie ausser Betracht bleiben und ein fixer Gelenkpunkt angenommen werden kann. Wie die Versuche zeigen, können Gesteinsarten, die sich achsial nur in einer kleinen Fläche berühren, weit höher als sonst im Mauerwerkbau beansprucht werden.

Die Anwendung von Gelenken im Steinbrückenbau wurde bereits vor etwa 50 Jahren von E. Winkler in Vorschlag gebracht. Sowohl in Schönheitlicher als auch in baulicher Hinsicht ist die Einheitlichkeit im Baustoff der Gewölbe von grossen Vorteil. Dieser Forderung genügen bei Eisenbetonbogen die Betongelenke am besten. In neuerer Zeit ging man daran, die Betongelenke mit Eiseneinlagen zu bewehren.

Die Bewehrung soll den Zweck haben, ein Aufschlitzen der Gelenksteine in der Richtung des grössten Drucks zu verhüten.

Die Eiseneinlagen werden entweder quer zur Druckrichtung oder als Umschnürung angeordnet.

## 2. Berechnungsweise der Gelenke aus Beton und Eisenbeton.

### I. Berechnung nach Köpcke.

Köpcke gab ein verhältnismässig einfache Formel.

Wenn  $f_1$  und  $f_2$  die Pfeilhöhe der mit den Halbmesser  $r_1$  und  $r_2$  gekrümmten Gelenkflächen sind (**Abb. 40**),  $d_s$  die Gelenkstärke, so ist der Halbmesser einer gedachten Gelenkfläche mit der Pfeilhöhe  $f = \frac{f_1 - f_2}{2}$

$$r = \frac{d_s^2}{8f}.$$

Bezeichnet:

$2a$  die Breite der zur Ebene gewordenen Berührungsfläche,

$\lambda$  die Zusammendrückung der mittelsten Faser in Richtung der Gelenkkraft, dann ist

$$r^2 = a^2 + (r - \lambda)^2$$

und unter Vernachlässigung von  $\lambda^2$

$$a = \sqrt{2r\lambda}.$$

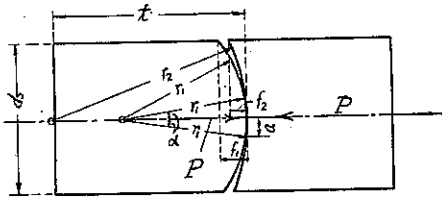


Abb. 40.

Köpcke macht nun die etwas willkürlich erscheinende Annahme, dass die Zusammendrückungen sich auf die Tiefe  $t$  gleich der Gelenkstärke  $d_s$  verteilen, und dass die demnach zu ermittelnden Zusammendrückungen  $\frac{\lambda}{t}$  dem Hookeschen Gesetze folgen. In

Wirklichkeit ist das Mass  $t$  von den elastischen Eigenschaften des Baustoffes, der Scheitelstärke und der Berührungsfläche abhängig.

Aus der bekannten Elastizitätsgleichung

$$\frac{\lambda}{t} = \frac{\sigma}{E}$$

ergibt sich dann die Pressung  $\sigma$  in der Mitte der Berührungsfläche zu

$$\sigma = \frac{\lambda}{t} E$$

worin  $E$  das Elastizitätsmass bedeutet.

Als Druckverteilungsfigur wird eine Parabel angenommen, kann der gesamte Gelenkdruck  $P$  für 1 cm Breite der Gelenkquader angenommen werden zu

$$P = 2 \frac{2}{3} a \frac{\lambda}{t} E$$

oder 
$$P = \frac{4}{3} \sqrt{2r} \lambda^3 \frac{E}{t},$$

woraus 
$$\lambda = \sqrt[3]{\frac{9P^2 t^2}{32 r E}}.$$

Hiermit die Grösstspannung

$$\begin{aligned} \sigma_{max.} &= \frac{\lambda}{t} E \\ &= \sqrt[3]{\frac{9P^2 E}{32rt}}, \end{aligned}$$

oder genügend genau

$$\begin{aligned} \sigma_{max.} &= \sqrt[3]{\frac{9 P^2 E}{32 r d_s}}, & \text{oder mit } \frac{P}{d_s} = \sigma_s, \\ \sigma_{max.} &= \sqrt[3]{\frac{9 P \sigma_s E}{32 r}}. \end{aligned}$$

Die Versuche ergaben, dass für die Bruchlast der Gelenksteine nicht die grösste Druckspannung an der Berührungsstelle, sondern die im Quader senkrecht zur Druckrichtung auftretende Zugspannung massgebend wird.

## II. Berechnung nach Barkhausen.

Eine andere Berechnung der Wälzgelenke gibt Barkhausen. Innerhalb des in Frage kommenden Spannungsbereiches kann man die Dehnungslinie als Gerade auffassen.

Bezeichnet  $\sigma_s$  die mittlere Scheitelspannung

$$\sigma_s = \frac{P}{d_s l},$$

$\alpha$  den halben Zentriwinkel der gedachten Gelenkfläche und  $t$  die Druckverteilungslänge (**Abb. 40**), dann wird

$$\alpha \left( \frac{\sigma}{\sigma_s} - \frac{\nu}{3} \alpha^2 \right) = \frac{d_s}{2r_1}$$

wobei der Hilfswert  $\nu$  aus

$$v = \frac{r_1 E d_s \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)}{4 P t}$$

für  $d_s = t$

$$v = \frac{r_1 E \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right)}{4 P}$$

$$r_1 = \frac{r_2}{2} + \sqrt{\frac{r_2^2}{4} - \frac{4 P r_2 t \operatorname{Lgn}\left(1 + \frac{\sigma}{\sigma_s}\right)}{E d_s \alpha^2}}$$

für  $d_s = t$

$$r_1 = \frac{r_2}{2} + \sqrt{\frac{r_2^2}{4} - \frac{4 P r_2 \operatorname{Lgn}\left(1 + \frac{\sigma}{\sigma_s}\right)}{E \alpha^2}}$$

und

$$2a = 2r_1 \alpha.$$

Unbekannt ist entweder der Halbmesser  $r_1$  bzw.  $r_2$  oder die Druckspannung  $\sigma$ . Am besten kommt man durch Probieren zu dem Ergebnis.

### III. Berechnung nach Hertz.

Im Jahre 1881 erschien eine bedeutsame Arbeit des Physikers Hertz über die Frage der Spannungsverteilung beim Zusammendrücken zweier elastischer Körper. Dieses Berechnungsverfahren ist ursprünglich für die Wälzgelenke bzw. Auflager eiserner Brücken aufgestellt und von da aus in den Stein- bzw. Betonbau übernommen worden. Die Annahme sind:

- 1). Die Berührungsflächen der Körper sind im Verhältnis zu ihren Oberflächen sehr klein, bzw. bei endlicher Berührungsfläche die Körper selbst unendlich gross.
- 2). In der Berührungsfläche treten nur Normalpressungen auf.
- 3). Die verwendeten Baustoffe müssen Proportionalitätsgrenzen besitzen; bleibende Formänderungen dürfen nicht eintreten.
- 4). Die Baustoffe beider Körper müssen homogen und isotrop sein.
- 5). Der Druck muss in der Richtung der Verbindungsgeraden zwischen den Schwer-

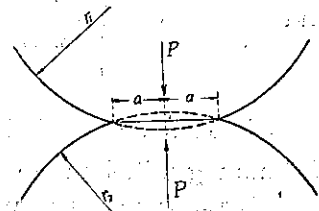


Abb. 41.

punkten der Körper wirken.

Da die Elastizitätsverhältnisse hier jedoch andere als beim Eisen sind, können die Ergebnisse nur als Annäherungen angesehen und daher nur zu Vergleichsberechnungen benutzt werden.

Bezeichnet (**Abb. 41**):

$P$ : den Gelenkdruck für 1  $m$  Tiefe,

$r_1$  und  $r_2$ : die Halbmesser der beiden sich berührenden Zylinder,

$E_1$  und  $E_2$ : ihre Elastizitätsziffern,

$m_1$  und  $m_2$ : die Verhältnisse der Querdehnung zur Längszusammen-  
drückung,

so erhält man mit den weiteren Bezeichnungen

$$e_1 = \frac{4}{E_1} \left(1 - \frac{1}{m_1}\right) \left(1 + \frac{1}{m_1}\right) = \frac{4}{E_1} \left(1 - \frac{1}{m_1^2}\right),$$

$$e_2 = \frac{4}{E_2} \left(1 - \frac{1}{m_2}\right) \left(1 + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{4}{E_2} \left(1 - \frac{1}{m_2^2}\right),$$

die halbe Breite der Berührungsfläche:

$$a = \sqrt{\frac{P}{\pi} \frac{e_1 + e_2}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}$$

und die grösste Normalspannung:

$$\sigma_{max.} = \frac{2P}{\pi a}.$$

Wenn  $E_1 = E_2$  und  $m_1 = m_2$  sind

so 
$$e_1 = e_2 = e = \frac{4}{E} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right)$$

und 
$$a = 2 \sqrt{\frac{2P}{\pi E} \frac{\left(1 - \frac{1}{m^2}\right)}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}$$

Die Halbmesser sind positiv oder negativ einzuführen, je nachdem die Krümmungsmittelpunkte im Inneren der betreffenden Berührungskörper liegen oder nicht. Die Wert  $m$  kann (für isotrope Körper) genau genug  $m=3$  gesetzt werden, so dass erhält man

$$\alpha = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{P}{\pi E} \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}}, \quad \sigma_{max.} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{P E}{\pi} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}$$

oder

$$\alpha = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{P}{3,1416 E} \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}}},$$

$$\sigma_{max.} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{P E}{3,1416} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)} \quad (\text{Abb. 40}).$$

wird nun  $\alpha = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$  gesetzt, so ist auch

$$\alpha = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{P}{3,1416 E \alpha}} \quad \text{und} \quad \sigma_{max.} = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{P E}{3,1416} \alpha}$$

Ferner ist  $\alpha = \frac{0,6365 P}{\sigma_{max}}$  und  $\sigma_{max.} = \frac{0,6365 P}{\alpha}$

so folgt  $\alpha = \frac{5,585 \sigma_{max}^2}{P E}$

Für sorgfältigst hergestellte Gelenke können folgende zulässige Grösstspannungen  $\sigma_{max}$  erwartet werden:

- a) bei Verwendung von Portlandzement 200–225 kg/cm<sup>2</sup>,
  - b) bei Verwendung von hochwertigem Zement 250–275 kg/cm<sup>2</sup>.
- $E = 200,000 \text{ kg/cm}^2$ .

Günstige Halbmesser und Abwälzverhältnisse ergeben sich mit  $r_2 = 3$  bis 4  $d_s$ , wobei  $d_s$  aus nachstehender Tafel hervorgeht.

$\sigma_{max} \text{ (kg/cm}^2\text{)}$	200	225	250	275
$d \text{ (8 } \alpha\text{)}$	0,0255 P	0,0226 P	0,0204 P	0,0185 P
$d \text{ (10 } \alpha\text{)}$	0,0318 P	0,0283 P	0,0255 P	0,0232 P
$d \text{ (12 } \alpha\text{)}$	0,0382 P	0,0340 P	0,0306 P	0,0278 P

$P$  in kg/cm<sup>2</sup>,  $d$  in cm.

#### IV. Querzugspannungen in Gelenke.

Besonders wichtig ist die Tatsache, dass die Zerstörung des Steinquader nie durch Überwindung der Druckspannungen in der Mitte der Berührungsfläche, sondern stets durch Überschreitung der Zugfestigkeit etwa in der halben Gelenkhöhe erfolgt. **Abb. 42** gibt ein derartiges Zerstörungsbild.

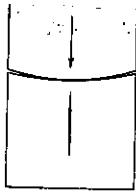


Abb. 42.

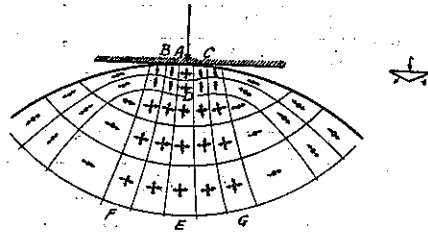


Abb. 43.

In **Abb. 43** ist der Spannungszustand nach Hertz in dem Berührungsbereiche dargestellt.

Die Körperelemente im inneren Teil der Berührungsfläche werden von allen Seiten gedrückt; es kann daher nur schwer ein seitliches Ausweichen des Stoffes erfolgen, die zulässige Flächenpressung kann dort sehr hoch gesteigert werden. Im inneren Teil der Berührungsfläche kann, da dort die kleinsten Teilchen allseitig gedrückt werden, kein Riss entstehen, derselbe muss vielmehr seinen Anfang am Rande der Druckfigur nehmen, da gerade am Rande die grössten Zugspannungen auftreten.

Das Stück  $ABDC$  in **Abb. 43**, ragte ursprünglich über die Druckfläche empor; es wurde eingedrückt und übt nun auf die umgebenden Teile eine keilartig sprengende Wirkung (**Abb. 43**, und **Abb. 44**) aus, so dass der Druck sich nicht nur in der Richtung  $AE$ , sondern auch nach  $AF$ ,  $AG$  usw. fortpflanzt. Die Element bei  $A$  werden infolge dieser Keil-Wirkung

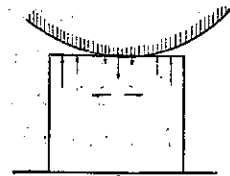


Abb. 44.

auch in der Querrichtung zusammengedrückt, während die Teile bei  $F$  und  $G$  das Bestreben haben, sich voneinander zu trennen, haben also Zugkräfte aufzunehmen. Bei  $A$  sind die Querspannungen noch Druck, nehmen mit der Tiefe rasch ab und gehen dann in Zug über, zunächst wieder zu einem Grösstwert anwachsend, um dann allmählich wieder auf Null zurückzugehen.

Da die dem mathematischen Berührungspunkt nächsten Oberflächenteile das Bestreben haben, sich dem Berührungspunkte  $A$  zu nähern, müssen in den entfernteren Oberflächenpunkten Zugspannungen auftreten. Dieser Spannungswechsel findet meist innerhalb der Berührungsfläche statt und erreicht am Umriss den Grösstwert.

In **Abb. 45** links sind die Linien für den Fall der Berührung zweier



zylindrischer Gelenk ungefähr dargestellt.

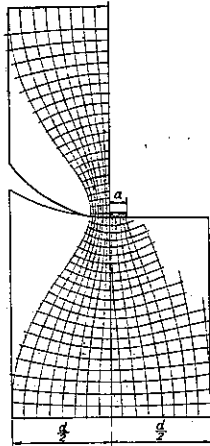


Abb. 45.

Die in der Richtung des Krümmungshalbmessers am Rande beginnende Netzlinie entspricht daher der Spannung Null. Zu einer Änderung dieses Wertes beim Fortschreiten auf der Netzlinie besteht kein Anlass und, da ohne Kraftwirkung auch keine Formänderung vorauszusetzen ist, wird der ausserhalb liegende Teil des Gelenkes nicht zur Mitwirkung herangezogen.

Auf der Rückenfläche jedes Gelenkes können praktisch schon eine gleichmässige Verteilung des ganzen Gelenkdrucks und daher nur zur Rückenfläche senkrecht stehende Spannungen angenommen werden.

Denkt man sich nun die in den einzelnen Druckgewölben wirksamen Kräfte zu einem resultierenden Gewölbe zusammengesetzt (Abb. 46), dann wird sich die Resultierende  $Z$  aller Querszugkräfte als die gesamte zum Gleichgewicht jenes resultierenden Druckgewölbes nötige Zugkraft ergeben.

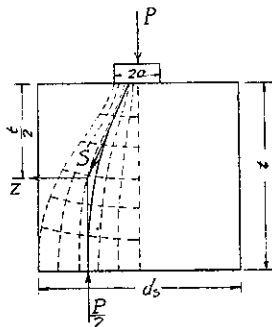


Abb. 46.

Wenn die Druckverteilung auf dem oberen Streifen und der unteren Fläche gleichmässig ist, so wird das mittlere Druckgewölbe die Form des resultierenden haben und  $Z$  ist die horizontale Komponente der Kraft  $S$ , die man hinreichend genau von Viertelpunkt der Druckplatte ausgehend annehmen kann.

Nimmt man ferner an, das sich  $S$  mit der von unten wirksamen Kraft  $\frac{P}{2}$  in halber Höhe des Körpers schneidet, so folgt aus dem Krätedreieck: (1)

$$Z: \frac{P}{2} = \left( \frac{d_s}{4} - \frac{a}{2} \right) : \frac{t}{2}$$

woraus folgt

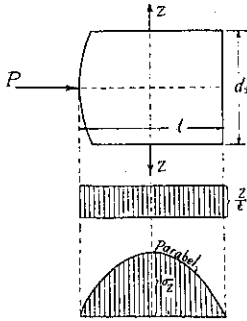
$$Z = \frac{P}{2t} \left( \frac{d_s}{2} - a \right)$$

Krüger leitete für die Grösse der Zugkraft senkrecht zur Richtung des

(1) Vergl. Beton u. Eisen, 1924. S. 157:

Druckes  $P$  die Beziehung ab  $Z=0,28 P$ .

Diese Kraft verteilt etwa in der Mitte am grössten und es kann einer parabolischen Verteilung entsprechend die Zugspannung daselbst mit (**Abb. 47**)



**Abb. 47.**

$$\sigma_z = \frac{3}{2} \frac{Z}{t} = 0,42 \frac{P}{t}.$$

Für die Ausführung wähle man ungefähr

$$t = d_s,$$

$$\sigma_z = 0,42 \frac{P}{d_s}.$$

Liegt in der Querrichtung des Gelenkes Eisen, so wird dieses durch Haftspannungen gezwungen, sich mitzudehnen. Es wird also im Eisen eine Zugkraft  $Z$  geweckt, während andererseits wieder durch den Widerstand des Eisens gegen die Verlängerung der Beton mit der gleichgrossen Kraft zusammengepresst wird.

Die Dehnung in der Querrichtung an irgend einer Stelle des Gelenkes  $\varepsilon_z$  wird ausgedrückt durch:

$$(1) \quad \varepsilon_z = \left( \frac{\sigma_a}{m} - \sigma_t \right) \frac{1}{E_a},$$

worin  $m$ : die Poissonsche Ziffer,

$E_a$ : die Elastizitätsmass des Betons für Druck,

$\sigma_a$ : die Spannung in der Richtung  $Y$ ,

$\sigma_t$ : jene in der Richtung  $X$ ,

bedeuten (**Abb. 48**)

$$(2) \quad \sigma_a = \frac{\alpha P}{b d_s},$$

wo  $\alpha$  ein Erfahrungskoeffizient ist, welcher der ungleichförmigen Spannungsverteilung Rechnung tragen soll und grösser als 1 ist;  $P$  die gesammten von einem Gelenk übertragenen Druckkräfte ist.

Für den bewehrten Gelenkstein ist die Querdehnung in der  $Z$ -Richtung, wenn  $E_s$  das Elastizitätsmass des Eisens für Zug und  $f_s$  der Querschnitt des von der Eisenquerschnittsfläche beeinflussten, in der  $Z$ -Richtung liegenden Betonstabes bedeutet:

$$\varepsilon_z = \frac{Z}{f_s E_s}$$

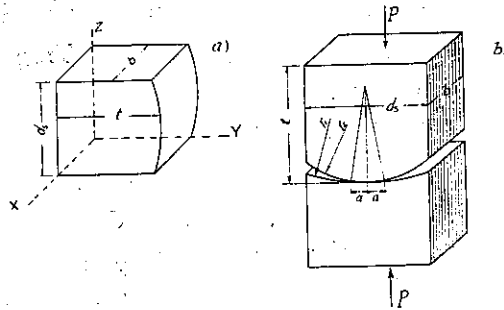


Abb. 48.

oder

$$(3) \quad Z = \varepsilon_z f_c E_c$$

und

$$(4) \quad \sigma_t = \frac{Z}{f_b} = \varepsilon_z E_c \frac{f_c}{f_b}.$$

Aus Gl. 1, 2 u. 4 folgt

$$\varepsilon_z = \frac{\alpha P}{m b d_s E_a} - \varepsilon_z \frac{E_c}{E_a} \frac{f_c}{f_b}$$

oder

$$(5) \quad \varepsilon_z = \frac{\alpha P}{m b d_s E_a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{E_c}{E_a} \frac{f_c}{f_b}}$$

Bezeichnet man mit  $\sigma_{z,zul}$  die für den verwendeten Beton zulässige grösste Zugspannung und  $E_z$  die Elastizitätsmass des Betons für Zug, so muss also bei Vermeidung von Rissbildung gelten:

$$(6) \quad P \cong \sigma_{z,zul} b d_s \frac{m}{\alpha \nu} \left( 1 + n \frac{f_c}{f_b} \right)$$

worin

$$\nu = \frac{E_z}{E_a} \quad \text{und} \quad n = \frac{E_c}{E_a}.$$

Aus Gl. (6) folgt für den unbewehrten, durch die Kraft  $P$  gleichförmig gedrückten Gelenkkörper, also  $\alpha=1$ ,  $f_c=0$ ,  $P=b d_s \sigma_{a,zul}$ ,

$$\sigma_{z,zul} = \frac{\nu}{m} \sigma_{a,zul},$$

daraus

$$(7) \quad P \cong \sigma_{a,zul} \frac{b d_s}{\alpha} \left( 1 + n \frac{f_c}{f_b} \right).$$

Die Gl. (7) zeigt eine Beziehung zwischen der aus der Würfestigkeit hergeleiteten zulässigen Druckspannung  $\sigma_{a.zul}$  und der Tragkraft  $P$  des Gelenkes bis zur Bildung der ersten Risse.

Nach den von Krüger im Jahre 1894 durchgeführten Versuchen, würde sich unter der Annahme einer gleichförmigen Druckverteilung an der Rückenfläche des Gelenkes für  $\alpha$  der Wert 1,5 ergeben. Da aber der Druck von der Quadrat-achse aus nach den Kanten abnimmt und die ganz örtlich den Höchstwert erreichende Querdehnung in Quadermitte von Krüger aus einer zu grossen Messlänge abgeleitet ist, so muss  $\alpha$  höher sein (andere ähnliche Versuche lassen auf 3 bis 4 schliessen).

Nach den von Dr. techn. Josef Krebitz durchgeführten Versuchen, würde sich für  $\sigma_m$  für zylindrische Wälzgelenke die Gl. (8) ergeben:

$$(8) \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{max}}{\left(1,06 + 0,033 \frac{d_s - 2a}{2a} \sqrt{\frac{d_s^2}{2at}}\right) \left(1 + n \frac{f_e}{f_b}\right)}$$

wenn  $t = d$

$$(9) \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{max}}{\left(1,06 + 0,033 \frac{d_s - 2a}{2a} \sqrt{\frac{d_s}{2a}}\right) \left(1 + n \frac{f_e}{f_b}\right)}$$

worin  $\sigma_m = \frac{\alpha P}{b d_s}$  und  $\sigma_{max} = \frac{2P}{\pi a}$  (vergl. S. 70)

Für das Gelenk ohne Eisen erhält man die Gleichung

$$(10) \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{min}}{1,06 + 0,033 \frac{d_s - 2a}{2a} \sqrt{\frac{d_s}{2a}}}$$

### 3. Wirkung der Wälzgelenke.

Die Wirkung der Wälzgelenke beruht darauf, dass zwei das Gelenk bildende Gelenkkörper derart aufeinander abrollen, dass sie sich fortwährend auf einer Geraden, welche den Gelenkflächen (Zylindermantelflächen) als Seitlinie angehört, berühren. Infolge der Elastizität des Materials wird wegen der hohen Gelenkdrücke an Stelle der Linie tatsächlich eine Berührungsfläche auftreten, von der man annehmen darf, dass sie die Gelenkachse zur Schwerachse zu betrachten ist.

Es sollen in Folgenden Untersuchungen über die Wirkungsweise der

Wälzgelenke angestellt werden. Zu diesem Zweck machen wir die Annahme, dass die Gewölbemittellinie wieder die Drucklinie für ständige Last sei, und dass die Verkehrslast gleichmässig verteilt sind.

## I. Scheitelsenkung und Drehwinkel.

### a) Ausweichen der Widerlager.

Es bezeichne:

- $\Delta f$ : die Scheitelsenkung,
- $H_s$ : den Horizontalschub im Dreigelenkbogen,
- $F_s$ : den Scheitelquerschnitt,
- $X_{P_c-1}$ : die Einflussordinate der  $X$ -Linie im Gelenk,
- $\delta_{ew}$ : die Ordinate der Biegelinie im Gelenk,
- $\Delta l$ : Ausweichen der Widerlager.

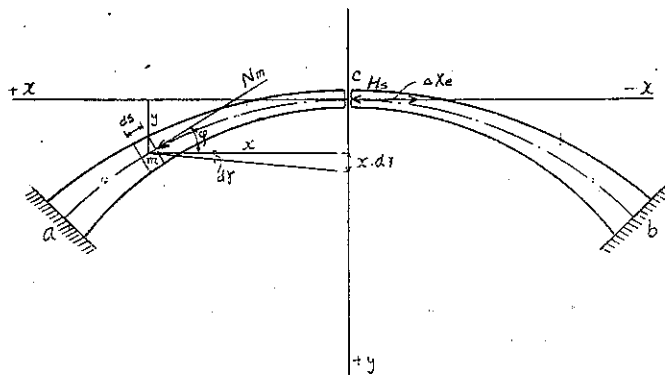


Abb. 49.

Infolge der Spannweitevergrößerung  $\Delta l$  wirken die Längskraft  $N_w = -X_w \cos \varphi$  und  $M_w = X_w y$ .

Infolge der Längskraft  $N_w$  erleiden des Element  $ds$  eine Parallelverschiebung  $\Delta ds = \frac{N_w}{E F} ds$  und wegen des Moments  $M_w$  verdrehen sie sich um den Winkel  $d\gamma = \frac{M_w}{E J} ds$ .

Die Einsenkung im Scheitel infolge der Elastizität des Elementes  $ds$  allein ist

$$d\Delta f = -x d\gamma - \Delta ds \sin \varphi$$

$$\begin{aligned}\Delta f &= - \int_a^c x \, d\gamma - \int_a^c \Delta ds \sin \varphi \\ &= - X_w \int_a^c \frac{xy}{EJ} \, ds + X_w \int_a^c \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} \\ &= - X_w \left[ \int_a^c \frac{xy}{EJ} \, ds - \int_a^c \sin \varphi \cos \varphi \frac{ds}{EF} \right]\end{aligned}$$

$\delta_{cx}$

$$\Delta f = -\delta_{cx} X_w \quad \text{oder mit } X_w = -\frac{\Delta l}{\delta_{xx}}$$

$$\Delta f = \Delta l X_{P_{c-1}}$$

Dr. Ing. Kollmar nimmt den Wert  $\Delta l = \frac{1}{1000} l$  an. Einflussordinaten für  $X_{P_{c-1}}$  mit  $r=1$ .

$$X_{P_{c-1}}(1+\mu) \frac{f}{l} \quad \text{worin } \mu = \frac{5}{2(1+5n)} \left( \frac{d_s}{f} \right)^2$$

$n =$	1,0	0,50	0,40	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10
$m=1,0$	0,3125	0,3214	0,3250	0,3300	0,3333	0,3375	0,3429	0,3500
$m=3,5$	0,3324	0,3435	0,3482	0,3547	0,3591	0,3646	0,3719	0,3818
$m=7,0$	0,3452	0,3579	0,3632	0,3707	0,3759	0,3825	0,3912	0,4033

Die Verdrehung der Scheitelquerschnitte infolge der Spannweitevergrößerung.

$$\gamma = \int_a^b d\gamma = \int_a^b \frac{M_w}{EJ} \, ds = X_w \int_a^b \frac{y \, ds}{EJ} = \frac{2\Delta l}{E \delta_{xx}} \sum_a^c y \frac{\Delta s}{J}$$

$$\delta_{xx} = N(1+\mu)$$

Wert von N

$n =$	1,0	0,50	0,40	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	
$m=1,0$	0,2000	0,1166	0,1000	0,0833	0,0750	0,0667	0,0583	0,0500	mal $\frac{l f^2}{E J_s}$
$m=3,5$	0,1703	0,0979	0,0834	0,0689	0,0617	0,0545	0,0473	0,0400	„
$m=7,0$	0,1512	0,0860	0,0730	0,0599	0,0534	0,0469	0,0404	0,0333	„

### b) Temperaturänderung und Schwindung.

In diesem Fall

$$\Delta ds = \frac{N_t}{E F} \, ds + \varepsilon t^\circ \, ds \quad \text{und} \quad d\gamma = \frac{M^t}{EJ} \, ds$$

Infolge gleichmässiger Temperaturerhöhung um  $t^\circ$

$$\Delta f = -\varepsilon t^\circ (f+1) X_{P_{c-1}}.$$

$$\gamma = -\frac{2\epsilon t^\circ l}{E \delta_{xx}} \sum_a^c y \frac{\Delta s}{J}$$

Die neuen Schweizer Vorschriften über Bauten in bewehrten Beton verlangen daher, dass Schwunderscheinungen des Betons einem Temperaturabfall von 20° C gleichzuachten sind und lassen bei Berücksichtigung der durch Temperaturänderung und Schwinden verursachten Spannungen eine etwa um 50 v. H. höhere Beanspruchung der Bauteile zu.

Die neuen Deutschen Vorschriften verlangen dass der Einfluss des Schwindens auf die statisch unbestimmten Grössen durch die Annahme eines Wärmeabfalls von 15°C Rechnung zu tragen ist und dürfen bei Berücksichtigung der Brems- und Anfahrkräfte und des Einflusses der Wärmeschwankungen und des Schwindens die zulässigen Spannungen um 30 % erhöht werden.

c) Scheitelsenkung unter der ständigen Last.

$$N_m = -\frac{H_s}{\cos \varphi} + \Delta X_e \cos \varphi$$

$$M_m = -\Delta X_e y$$

$$\Delta f = -\int_a^c x d\gamma - \int_a^c \Delta ds \sin \varphi$$

$$= +\Delta X_e \int_a^c \frac{xy}{E J} ds + H_s \int_a^c \frac{ds}{E F} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} - \Delta X_e \int_a^c \frac{ds}{E F} \cos \varphi \sin \varphi$$

$$= \Delta X_e \left[ \underbrace{\int_a^c \frac{xy}{E J} ds - \int_a^c \frac{ds}{E F} \cos \varphi \sin \varphi}_{\delta_{cx}} \right] + H_s \int_a^c \frac{dy}{E F \cos \varphi}$$

$$\Delta f = \Delta X_e \delta_{cx} + H_s \frac{f}{E F_s}$$

oder mit  $X_{P_{e-1}} = -\frac{\delta_{cx}}{\delta_{xx}}$  und  $\Delta X_e = \frac{H_s l}{E F_s} \frac{1}{\delta_{xx}}$

$$\Delta f = \frac{H_s}{E F_s} \left[ l X_{P_{e-1}} + f \right]$$

$$\gamma = \int_a^b d\gamma = -\Delta X_e \int_a^b \frac{y ds}{E J}$$

$$= 2\mu \frac{H_s}{E} \sum_a^c y \frac{\Delta s}{J}.$$

d) Scheitelsenkung unter der Verkehrslast.

(Gleichmässig verteilte Verkehrslast  $p$  über dem ganzen Bogen)

$$M_p = M_0 + X_p y + Y_p x$$

$$= -\frac{px^2}{2} + X_p y = -\frac{pl^2}{8} \mu \zeta^2$$

$$N_p = -\frac{X_p}{\cos \varphi} \quad \text{worin} \quad X_p = \frac{pl^2}{8f} \frac{1}{1+\mu}$$

$$\Delta f = -\int_a^c x d\gamma - \int_a^c \Delta ds \sin \varphi$$

$$= \int_a^c \frac{pl^2}{8} \mu \zeta^2 x \frac{ds}{EJ} + \int_a^c X_p \frac{ds}{EF} \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$$= \frac{pl^2}{128} \frac{\mu}{E J_s} + X_p \frac{f}{E F_s}$$

$$\gamma = -\int_a^c \frac{pl^2}{8} \mu \zeta^2 \frac{ds}{EJ} = -\frac{pl^3}{48} \frac{\mu}{E J_s}$$

## II. Gesamtwinkeländerung im Scheitel.

**Fall I.** Es wäre zu ungünstig, alle bis jetzt genannten Einflüsse in vollem Umfange in Rechnung zu stellen. Die grösste Winkeländerung tritt in der Regel in Verbindung mit der grössten Kälte auf.

Es wird

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{2\Delta l}{E \delta_{xx}} \sum_a^c y \frac{\Delta s}{J} + \frac{2\epsilon l (t_w + t_s)}{E \delta_{xx}} \sum_a^c y \frac{\Delta s}{J} \\ & + 2\mu \frac{H_s}{E} \sum_a^c y \frac{\Delta s}{J} + \frac{pl^3}{48} \frac{\mu}{E J_s} \end{aligned}$$

wobei  $t_w$  die reine,  $t_s$  die dem Schwindmass gleichkommende Wärmeänderung ist.

Für eine massive Brücke die in Rechnung zu setzende Wärmeerniedrigung  $t_w = 15^\circ$ , das schwindmass  $t_s = 15^\circ$  und die Widerlagerverschiebung  $1/1000$  beträgt, ermittelt man

$$\begin{aligned} \gamma = & \frac{1}{E \delta_{xx}} \sum_a^c y \frac{\Delta s}{J} [0,002 - 0,00072 l] \\ & + \frac{\mu}{E} \left[ 2H_s \sum_a^c y \frac{\Delta s}{J} + \frac{pl^3}{48} \frac{1}{J_s} \right]. \end{aligned}$$



Die Abwälzung zweier Gelenkhälften aufeinander bewirkt eine Änderung des Lage des Berührungspunktes, der im normalen Zustand des Bogens als Gelenkmittelpunkt in die Bogenachse fiel. Da die Drucklinie, wenn von Gelenkreibung abgesehen wird, durch den Berührungspunkt- bzw. durch die Mitte der beiden Gelenkflächen gemeinsamen Fläche geht, so ändert sich mit dem Wandern des Berührungspunktes auch die Stützlinienlage.

Im Scheitel hebt oder senkt sich die Bogenachse um  $\Delta f$ , während der neue Berührungspunkt um die Strecke  $a$  hinter der Scheitelbewegung zurückbleibt (**Abb. 50**).

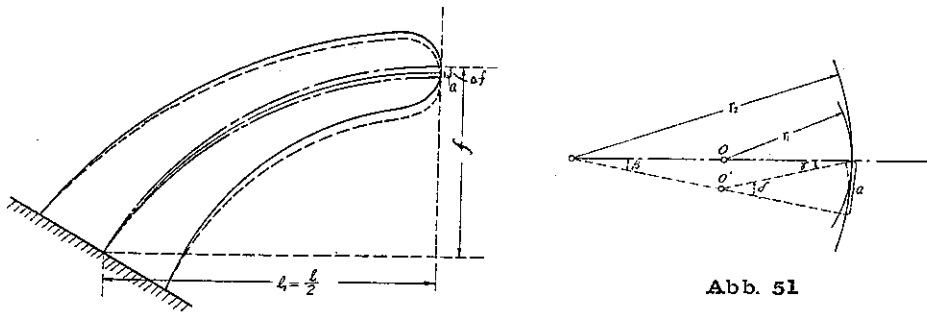


Abb. 50

Abb. 51

Bei kleinem Drehwinkel  $\gamma$  ist die Grösse der Abwälzung nach **Abb. 51**.

$$a = \gamma_1 \delta = \gamma_2 \beta,$$

da 
$$\gamma = \delta - \beta = \beta \left( \frac{r_2}{r_1} - 1 \right)$$

so wird 
$$\beta = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \quad \text{und} \quad a = \gamma \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = \gamma \frac{r_1}{1 - \frac{r_1}{r_2}}.$$

**Fall II.** Für gewöhnliche Fälle hat man bei guter Bauausführung nur mit dem Einfluss der ständigen Last, der Verkehrslast und den Wärmeänderungen zu rechnen. Hierfür liefern

$$\gamma = \frac{2\epsilon t^{\circ} l}{E \delta_{xx}} \sum_a^c y \frac{\Delta s}{J} + 2\mu \frac{H_s}{E} \sum_a^c y \frac{\Delta s}{J} + \frac{p l^3}{48} \frac{\mu}{E J_s}.$$

Mit  $\epsilon = 0,000\ 012$  und  $t = \pm 15^{\circ}\text{C}$  geht die vorgehende Gleichung über in

$$\gamma = \frac{1}{E} \left[ \sum_a^c y \frac{\Delta s}{J} \left( \frac{0,00036l}{\delta_{xx}} + 2\mu H_s \right) + \frac{p l^3}{48} \frac{\mu}{J_s} \right].$$

### Viertes Kapitel.

#### Die wirtschaftliche Zweckmässigkeit des Eingelenkbogens.

##### 1. Ermittlung der Gewölbstärke.

##### I. Berechnung der Randspannungen.

Die Randspannungen berechnen sich aus der bekannten Gleichung

$$\sigma_{01u} = -\frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = \frac{M_k}{W}$$

in dieser Formel bedeuten:

$N$ : die Längskraft,

$M$ : das Moment in bezug auf den Schwerpunkt des beliebigen Querschnitts mit der Gewölbstärke  $d$ ,

$W$ : das Widerstandsmoment,

$F$ : den Querschnitt,

$M_k$ : das Kernmoment;

oder, bei rechteckigen Querschnitten mit der Breite von 1,0 m

$$\sigma_{01u} = -\frac{N}{d} \pm 6 \frac{M}{d^2}.$$

Infolge der Wirkung des Eigengewichts:

$$N_0 = \frac{H_s}{\cos \varphi} = \sim \frac{H_g}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} k_g \frac{g_s l_1^2}{f} \quad (S. 52).$$

Für die Normalkraft haben wir

$$N = \frac{1}{\cos \varphi} \left[ k_g \frac{g_s l_1^2}{f} + k_p \frac{p l_1^2}{f} \right]$$

und für das Biegemoment

$$M = u_p \frac{p l_1^2}{6} + u_e \frac{d_s^3}{6f} + u_t \frac{d_s^3}{6f}$$

zu setzen, worin

$$u_e = \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \sigma_s \zeta^2 \quad \left( \sigma_s = \frac{H_g}{F_s} \right)$$

und

$$u_t = E \epsilon t \frac{5(r+5)}{2(r+5n)} \zeta^2.$$

Mit Bezug auf die vorstehenden Gleichungen erhält man für die Randspannungen :

$$\sigma_{oiu} = - \left[ \frac{1}{d \cos \varphi} k_g \frac{g_s l_1^2}{f} + \frac{1}{d \cos \varphi} k_p \frac{p l_1^2}{f} \right] \pm \left[ \frac{1}{d^2} u_x p l_1^2 + \frac{1}{d^2} \frac{u_e d_s^3}{f} + \frac{1}{d^2} \frac{u_t d_s^3}{f} \right]$$

bezogen auf 1 m Gewölbe Tiefe.

Mit Einführung von

$$c_1 = k_g g_s + k_p p$$

$$c_2 = u_x p$$

$$c_3 = u_e + u_t$$

ergibt sich daraus

$$\sigma_{oiu} = - \frac{c_1 l_1^2}{d f \cos \varphi} \pm \frac{c_2 l_1^2}{d^2} \pm \frac{c_3 d_s^3}{d^2 f}$$

( $g_s$  in  $t/m^2$  und  $p$  in  $t/m^2$  einzusetzen ist).

Tabelle für den Sechstelquerschnitt (Punkt 4) n.d. Scheitel.

	obere Zahl für $n=1,0$	$H_g = k_g g_s \frac{l_1^2}{f}$			
	mittlere " " $n=0,30$				
	untere " " $n=0,15$				
	$m = 1,0$	3,5	7,0		
Eigenlast	$N_g = 0,5000$	0,6748	0,8648	mal $\frac{g_s l_1^2}{f \cos \varphi_{\text{sech}}}$	
Verkehr	$N_p =$	0,332	0,368	0,388	
		0,340	0,380	0,404	mal $\frac{p l_1^2}{f \cos \varphi_{\text{sech}}}$
		0,344	0,384	0,416	
Temperatur	$M_p =$	-0,2512	-0,2330	-0,2198	mal $\frac{p l_1^2}{6}$
		-0,2227	-0,2069	-0,1946	
		-0,2062	-0,1910	-0,1795	
Temperatur	$N_t =$	7,0	8,2	9,3	mal $\frac{t^0 d_s^3}{f^2} \cos \varphi_{\text{sech}}$
		16,8	20,3	23,4	
		24,0	29,6	34,7	
Temperatur	$M^t =$	4,68	5,46	6,18	mal $\frac{t^0 d_s^3}{6f}$
		11,22	13,56	15,60	
		15,96	19,74	23,16	

Zusätze	$\Delta N_g =$	-0,416	-0,416	-0,416	mal $H_g \frac{d_s}{f^2} \cos \varphi_{\text{sech}}$
		-1,000	-1,000	-1,000	
		-1,428	-1,428	-1,428	
	$\Delta M_g =$	-0,278	-0,278	-0,278	mal $\frac{H_g}{d_s} \frac{d_s^2}{6f}$
		-0,667	-0,667	-0,667	
		-0,953	-0,953	-0,953	

Tabelle für den Kämpferquerschnitt.

		obere Zahl für $n=1,0$			$H_g = k_g g_s \frac{l_1^2}{f}$	
		mittlere		$n=0,30$		
		untere		$n=0,15$		
		$m =$	1,0	3,5	7,0	
Eigenlast	$N =$	0,5000	0,6748	0,8648	mal $\frac{g_s l_1^2}{f \cos \varphi_k}$	
Verkehr	$N_p =$	0,1332	0,1200	0,1020	mal $\frac{p l_1^2}{f \cos \varphi_k}$	
		0,1332	0,1240	0,1160		
		0,1308	0,1200	0,1120		
	$M_p =$	-0,4536	-0,3864	-0,3456	mal $\frac{p l_1^2}{6}$	
		-0,5534	-0,4728	-0,4224		
		-0,6170	-0,5280	-0,4704		
Temperatur	$N_t =$	7,0	8,2	9,3	mal $\frac{t^0 d_s^3}{f^2} \cos \varphi_k$	
		16,8	20,3	23,4		
		24,0	29,6	34,7		
	$M^t =$	42,0	49,2	55,8	mal $\frac{t^0 d_s^3}{6f}$	
		100,8	121,8	140,4		
		144,0	177,6	208,2		
Zusätze	$\Delta N_g =$	-0,416	-0,416	-0,416	mal $H_g \frac{d_s}{f^2} \cos \varphi_k$	
		-1,000	-1,000	-1,000		
		-1,428	-1,428	-1,428		
	$\Delta M_g =$	-2,5	-2,5	-2,5	mal $\frac{H_g}{d_s} \frac{d_s^2}{6f}$	
		-6,0	-6,0	-6,0		
		-8,6	-8,6	-8,6		

II. Ermittlung der Gewölbestärke in Sechstel n.d. Scheitel.

Die grösste untere Randspannung ergibt sich

$$\sigma_u = \sigma_{\text{mitl}} = \frac{c_1 l_1^2}{d_{\text{sech}} f \cos \varphi_{\text{sech}}} - \frac{c_2 l_1^2}{d_{\text{sech}}^2} - \frac{c_3 d_s^3}{d_{\text{sech}}^2 f}$$

oder

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{c_1 l_1^2}{d_{\text{sech}} f \cos \varphi_{\text{sech}}} + \frac{c_2 l_1^2}{d_{\text{sech}}^2} + \frac{c_3 d_s^3}{d_{\text{sech}}^2 f}$$

Setzt man

$$\sigma_a = \frac{c_1 l_1^2}{d_{\text{sech}} f \cos \varphi_{\text{sech}}} + \frac{c_2 l_1^2}{d_{\text{sech}}^2} = \sigma_{\text{zul}} - c_3 \left( \frac{d_s}{d_{\text{sech}}} \right)^3 \frac{d_{\text{sech}}}{f}$$

so folgt

$$\sigma_a d_{\text{sech}}^2 - \frac{c_1 l_1^2}{f \cos \varphi_{\text{sech}}} d_{\text{sech}} - c_2 l_1^2 = 0 :$$

die Lösung lautet

$$d_{\text{sech}} = \frac{c_1 l^2}{8 \sigma_a f \cos \varphi_{\text{sech}}} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16 \sigma_a c_2}{c_1^2} \psi^2 \cos^2 \varphi_{\text{sech}}} \right]$$

Setzen wir

$$n = \frac{J_s}{J_k \cos \varphi_k} = 0,25, \quad r = 1, \quad \zeta = \frac{1}{3}$$

so wird

$$\left( \frac{d_s}{d_{\text{sech}}} \right)^3 = \left[ 1 - (1 - 0,25) \frac{1}{3} \right] \cos \varphi_{\text{sech}} = 0,75$$

und

$$d_s = 0,91 d_{\text{sech}} = \sim 0,90 d_{\text{sech}}$$

$$d_s = \nu d_{\text{sech}}$$

Tabelle der Werte  $\nu$ .

$n$	1,0	0,8	0,6	0,5	0,4	0,3	0,25	0,20	0,15
$\nu$	1,00	0,98	0,95	0,94	0,93	0,92	0,91	0,90	0,90

Aus der oben stehenden Gleichung erhält man :

$$\frac{d_{s(1)}}{d_{s(0)}} = \frac{\nu \frac{c_1 l^2}{8 f \sigma_a} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16 \sigma_a c_2}{c_1^2} \psi^2} \right]}{\frac{K_1 l^2}{2 f \sigma_a'} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{24 \sigma_a' U_1}{K_1} \psi^2} \right]}$$

worin: bedeutet

$d_{s(1)}$  : die Scheitelstärke im Eingelenkbogen,

$d_{s(0)}$  : „ „ im eingespannten Bogen.\*

Die kleinste zulässige Gewölbstärke  $d'_{\text{sech}}$  im Sechstel, bei der keine Zugspannungen auftreten, erhält man aus

\* vergl. Strassner, Neuere Methoden. (1937) Bd. II. S. 125.

$$\sigma_{z, \text{zul}} = \frac{c_1 l_1^2}{d'_{\text{sech}} f \cos \varphi_{\text{sech}}} - \frac{c_2 l_1^2}{d'^2_{\text{sech}}} - \frac{c_3 d_s'^3}{d'^2_{\text{sech}} f} = 0$$

oder

$$\frac{c_1 l_1^2}{f \cos \varphi_{\text{sech}}} d'_{\text{sech}} = c_2 l_1^2 + \frac{c_3 d_s'}{f}$$

woraus folgt

$$d'_{\text{sech}} = \cos \varphi_{\text{sech}} \left[ \frac{c_2 f}{c_1} + \frac{c_3 d_s'^3}{c_1 l_1^2} \right].$$

### III. Ermittlung der Gewölbestärke im Kämpfer.

Die grösste Beton-Druckspannung entsteht an Gewölbeunterkante im Kämpfer.

Es wird

$$\sigma_{\text{zul}} = \frac{c_1 l_1^2}{d_k f \cos \varphi_k} + \frac{c_2 l_1^2}{d_k^2} + \frac{c_3 d_s^3}{d_k^2 f}$$

oder

$$\sigma_{\text{zul}} d_k^2 - \frac{c_1 l_1^2}{f \cos \varphi_k} d_k - \left( c_2 l_1^2 + \frac{c_3 d_s^3}{f} \right) = 0$$

woraus

$$d_k = \frac{c_1 l_1^2}{8 \sigma_{\text{zul}} f \cos \varphi_k} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16 \sigma_{\text{zul}} \left( c_2 + \frac{4 c_3 d_s^3}{f l^2} \right)}{c_1^2} \psi^2 \cos^2 \varphi_k} \right]$$

$$\frac{d_{k(1)}}{d_{k(0)}} = \frac{\frac{c_1 l^2}{8 \sigma_{\text{zul}} f \cos \varphi_k} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16 \sigma_{\text{zul}} \left( c_2 + \frac{4 c_3 d_s^3}{f l^2} \right)}{c_1^2} \psi^2 \cos^2 \varphi_k} \right]}{\frac{K_1 l^2}{2 f \sigma_{\text{zul}} \cos \varphi_k} \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{4 \sigma_{\text{zul}} C}{K_1^2} \psi^2 \cos^2 \varphi_k} \right]}$$

Für  $n=0,15$

Eingelenkbogen

$$C_1 = k_0 g_s + 0,1308 p$$

$$C_2 = 0,6170 p$$

$$u_1 = 100,8 t^0$$

$$u_2 = 8,6 \sigma_s$$

$$C_3 = 100,8 t^0 + 8,6 \sigma_s$$

$$\sigma_s = \frac{H_s}{d_s}$$

Eingespannte Bogen

$$U_1 = (-0,02357 + 0,00078 m) p$$

$$U_2 = (39,06 + 2,14 m) t^0$$

$$U_3 = (-0,1500 - 0,0406 m) g_s$$

$$C = 6 U_1 + 6(1 - \psi_k \cos \varphi_k) \left( U_2 \frac{d_s^3}{l^2 f} + U_3 \frac{d_s^2}{f^2} \right)$$

\* vgl. Strassner, Neuere Methoden Bd. II. S. 127.

Für  $n=0,30$ 

Eingelenkbogen	Eingespannte Bogen
$C_1 = k_0 \cdot g_s + 0,1332p$	$U_1 = (-0,02100 + 0,00069m)p$
$C_2 = 0,5533p$	$U_2 = (27,74 + 1,29m)l^0$
$u_i = 100,8t^0$	$U_3 = (-0,1129 - 0,0280m)g_s$
$u_s = 6,0\sigma_s$	
$C_3 = u_i + u_s = 100,8t^0 + 6,0\sigma_s$	$C = 6U_1 + 6(1 - \psi_k \cos \varphi_k) \left( U_2 \frac{ds^3}{l^2 f} + U_3 \frac{ds^2}{f^2} \right)$

## 2. Der wirtschaftliche Vergleich der beiden Bogenarten: gelenkloser und Eingelenkbogen.

Das Verfahren macht folgende Voraussetzungen: Die beiden Bogenarten besitzen gleichgroße Öffnungsweiten  $l$  und Pfeilhöhen  $f$  mit Tragwerken gleichen Baustoffs und gleicher Ausführung. Die Kosten der Eisenbewehrung, Zwischenpfeiler, Widerlager und Rüstungen sind einander gleich und unabhängig von den Bogenarten.

Der Ausdruck für die Gesamtkosten eines Bogentragwerkes mit einer Öffnung nimmt die Form an:

im gelenklosen Bogen  $K_0 = B_0$

im Eingelenkbogen  $K_1 = B_1 + G$

hierin bedeuten

$B$ : den Kosten für das Wölbmaterial,

$G$ : „ „ „ die Gelenke.

Der Eingelenkbogen ist dem gelenklosen Bogen wirtschaftlich, wenn  $K_1 < K_0$  ist.

### I. Die Betcnkosten des Wölbmaterials.

Allgemein gilt für den Kosten des Wölbmaterials

$$B = \beta V$$

worin  $\beta$  = die Einheitspreise der Baustoffe (Beton)

$V$  = das Volume des Bogens (Beton),

damit erhält man als Volume eines Bogenelements von der Länge  $ds$

$$dV = bd \, ds \quad (b = \text{die Brückenbreite})$$

und das Volumen eines Bogens

$$V = 2 \int_a^c bd \, ds.$$

Statt  $d_s$  darf man auch  $ds = \frac{dx}{\cos \varphi} = l_1 d\zeta \frac{1}{\cos \varphi}$  setzen,

so entsteht 
$$V = 2 \int_0^1 b dl_1 \frac{1}{\cos \varphi} d\zeta$$

$$= b d_s l \sum_0^1 C^3 \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} \Delta \zeta. \quad (\text{vergl. S. 54})$$

Tabelle der Werte  $\sum_0^1 C^3 \sqrt{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} \Delta \zeta. \quad (m=1)$

$n = \frac{J_s}{J_k \cos \varphi_k}$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,80
$\frac{f}{l} = \frac{1}{5}$	1,689	1,422	1,358	1,309	1,268	1,218	1,179
$\frac{f}{l} = \frac{1}{6}$	1,620	1,366	1,306	1,259	1,222	1,189	1,137
$\frac{f}{l} = \frac{1}{7}$	1,574	1,363	1,274	1,229	1,193	1,162	1,111
$\frac{f}{l} = \frac{1}{8}$	1,545	1,308	1,252	1,208	1,173	1,141	1,093
$\frac{f}{l} = \frac{1}{9}$	1,521	1,294	1,239	1,196	1,155	1,131	1,082
$\frac{f}{l} = \frac{1}{10}$	1,505	1,233	1,228	1,186	1,152	1,122	1,074
$\frac{f}{l} = \frac{1}{12}$	1,488	1,263	1,214	1,173	1,139	1,110	1,062

Unter der ziemlich gut zu treffenden Annahme  $m=1$ ,  $r=1$  und  $n=0,30$  od.  $n=0,15$ , erhält man für die Koeffizienten in der Gleichung

$$d_{\text{sech}} = \frac{c_1 l^2}{8 \sigma_d f \cos \varphi_{\text{sech}}} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16 \sigma_d c_2}{c_1^2} \psi^2 \cos^2 \varphi_{\text{sech}}} \right]$$

(im Eingelenkbogen)

und 
$$d_{s(n)} = \frac{K_1 l^2}{2 f \sigma_d'} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{24 \sigma_d' U_1}{K_1} \psi^2} \right]$$
 (im gelenklosen Bogen)

wenn 
$$\sigma_d' = \sigma_{\text{zul}} - 6(1 - \psi_s) \left( U_2 \frac{d_s}{f} + U_3 \frac{1}{\psi^2} \right):$$

Für  $n=0,30$

Eingelenkbogen  
Sechstel n.d. Scheitel

$$C_1 = k_g g_s + 0,340 p$$

$$C_2 = 0,2227 p$$

$$u_t = 11,2 t^\circ$$

$$u_s = 0,66 \sigma_s$$

$$C_3 = 11,2 t^\circ + 0,66 \sigma_s$$

$$\sigma_d = \sigma_{\text{zul}} - 0,760 C_3 \frac{d_{\text{sech}}}{f}$$

$$d_s = 0,90 d_{\text{sech}}$$

Eingespannte Bogen  
Scheitel

$$K_1 = (0,1080 + 0,0190m - 0,0005m^2) g_s$$

$$+ (0,0579 + 0,0035m) p$$

$$U_1 = (0,00426 + 0,00037m) p$$

$$U_2 = (-9,10 + 0,04m) t^\circ$$

$$U_3 = (0,0438 + 0,0046m) g_s$$

$$\psi_s = 0,8 \frac{d_s}{f}$$



Für  $n=0,15$ 

Eingelenkbogen Sechstel n.d. Scheitel	Eingespannte Bogen Scheitel
$C_1 = k_g g_s + 0,344 p$	$K_1 = (0,1080 + 0,0190m - 0,0005m^2) g_s$
$C_2 = 0,2062 p$	$+ (0,0566 + 0,0037m) p$
$u_c = 11,2 t^\circ$	$U_1 = (0,00381 + 0,00033m) p$
$u_e = 0,95 \sigma_s$	$U_2 = (-10,66 + 0,03m) t^\circ$
$C_3 = 11,2 t^\circ + 0,95 \sigma_s$	$U_3 = (0,0454 + 0,0054m) g_s$
$\sigma_a = \sigma_{zul} - 0,720 C_3 \frac{d_{sech}}{f}$	$\psi_s = 0,8 \frac{d_s}{f}$
$d_s = 0,90 d_{sech}$	

## II. Die Kosten der Gelenke.

Das Mischungsverhältnis (Z:S:K) ist

1 : 2 : 4 für das Wölbmaterial,  
1 : 1 : 2 für die Gelenke.

Es gilt für den Kosten der Gelenke (Beton)

$$B_g = V \beta_g = 2t d_s b \beta_g \quad (\text{vergl. Abb. 40. S. 67})$$

und für den Kosten des Wölbmaterials

$$B_w = V \beta_w = 2t d_s b \beta_w$$

hierin bedeuten

$\beta_g$  : den Einheitspreise des Betons bei Mischung 1 : 1 : 2,

$\beta_w$  : den Einheitspreise des Betons bei Mischung 1 : 2 : 4.

Die Differenz der beiden Kosten wird

$$B_a = B_g - B_w = 2t d_s b (\beta_g - \beta_w) = \sim 2d_s^2 b (\beta_g - \beta_w).$$

Der Eisenquerschnitt der Querarmierung entsprechend einer Zugkraft  $Z = 0,28 H$  wird (vergl. S. 74)

$$f_s^{(cm)^2} = \frac{0,28 H b}{\sigma} = \frac{0,28 H^{(t)} b^{(m)}}{1,2 t/cm^2} = 0,233 H b.$$

( $H$  = die Gelenkkraft pro laufenden Meter Brückenbreite).

Das Gesamtgewicht der Querarmierung wird

$$G_a^{(kg)} = 2 \cdot 0,233 H b d_s^{(m)} 0,785$$

oder wenn

$$\sigma_s = 300 t/m^2; \quad \sigma_s d_s = H; \quad d_s = \frac{H}{\sigma_s},$$

$$G_u^{(kg)} = 2 \cdot 0.233 b \frac{H^2}{300} 0,785 = 0,0012 b^{(m)} H^{2(l)}.$$

Bezeichnen  $\varepsilon$  den Einheitspreis für Stahl und  $A$  den Gesamtkosten für die Querarmierung, so folgt

$$A = 0,0012 b H^2 \varepsilon.$$

Hieraus erhält man für den Kosten der Gelenke

$$G = B_a + A.$$

Die Kosten des Eingelenkbogens ergeben sich pro Meter Brückenbreite zu :

$$K_1 = B_1 + G \\ = d_{s(1)} l \sum_0^1 C \sqrt[3]{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} \Delta \zeta \beta_w + 2 d_{s(1)}^2 (\beta_g - \beta_w) + 0,0012 H^2 \varepsilon,$$

diese des eingespannte Bogens zu :

$$K_0 = B_0 = d_{s(0)} l \sum_0^1 C \sqrt[3]{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} \Delta \zeta \beta_w$$

Der Eingelenkbogen ist dem gelenklosen Bogen gleichwertig, wenn  $K_1 = K_0$

oder  $K_1 - K_0 = 0$

$$\Delta d_s = \frac{2 d_{s(1)}^2 (\beta_g - \beta_w) + 0,0012 H^2 \varepsilon}{l \sum_0^1 C \sqrt[3]{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} \Delta \zeta \beta_w}$$

$H$  ist unbekannt.

$$\Delta d_s = \frac{2 d_{s(1)}^2}{l \sum_0^1 C \sqrt[3]{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} \Delta \zeta} \frac{(\beta_g - \beta_w) + 54 \varepsilon}{\beta_w}$$

Betonpreis  $\beta_g$  (1 : 1 : 2) = 32 Yen/m<sup>3</sup>

„  $\beta_w$  (1 : 2 : 4) = 25 Yen/m<sup>3</sup>

Stahlpreis  $\varepsilon$  = 0,15 Yen/kg.

daraus erhält man

$$\frac{(\beta_g - \beta_w) + 54 \varepsilon}{\beta_w} = 0,6$$

$$\Delta d_s = \frac{1,2}{l \sum_0^1 C \sqrt[3]{(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^2} \Delta \zeta} d_{s(1)}^2.$$

### 3. Rechnungsbeispiele.

I. Die Strassenbrücke (Mandaibashi) über die Shinanogawa in Niigata.  
(Abb. 52).

- a) Die Verkehrslast mit Stosszuschlag ..... 1 250 kg/m<sup>2</sup>  
 b) Die Temperaturänderung ..... ± 20° C  
 c) Die spezifischen Gewichte :  
     Eisenbeton ..... 2 400 kg/m<sup>3</sup>  
     Pflaster ..... 2 240 "  
     Auffüllung ..... 2 050 "  
 d) Die zulässige Druckspannung im Beton ..... 45 kg/cm<sup>2</sup>  
     Die zulässige Druckspannung in Beton bei Berücksichtigung der Wärme-  
     schwankungen ..... 56 kg/cm<sup>2</sup>

Die theoretische Spannweite der Brückengewölbes beträgt 42,367 m, und der theoretische Pfeil ist 4,876 m.

Das der Berechnung zugrunde gelegte Gewölbe ist aus **Abb. 52** ersichtlich.

Der Berechnung wird  $d_s = 67$  cm ;  $d_{\text{sech}} = 74$  cm ;  $d_k = 130$  cm zugrunde gelegt.

Man erhält

$$g_s = 0,30 \cdot 2,24 + 0,67 \cdot 2,40 = 2,28 \text{ t/m}^2$$

$$g_k = 0,30 \cdot 2,24 + 4,429 \cdot 2,08 + \frac{1,30}{0,83} \cdot 2,40$$

$$= 13,642 \text{ t/m}^2.$$

Daher folgt

$$m = \frac{g_k}{g_s} = \frac{13,642}{2,28} = 6$$

weshalb

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + 34,4 \left(\frac{f}{l}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 34,4 \cdot 0,115^2}} = 0,83.$$

Nach den Gleichungen Seite 52 folgt :

$$H_g = 0,8332 \cdot 2,28 \frac{21,184^2}{4,877} = 174 \text{ t/m}$$

$$\sigma_s = \frac{174}{0,67 \cdot 1,00} = 260 \text{ t/m}^2$$

$$C_1 = 0,8332 \cdot 2,28 + 0,344 \cdot 1,25 = 2,3297$$

$$C_2 = 0,2062 \cdot 1,25 = 0,2578$$

$$C_3 = 11,2 \cdot 20 + 0,95 \cdot 260 = 471$$

$$\sigma_a = 560 - 0,720 \cdot 471 \frac{0,74}{4,877} = 509 \text{ t/m}^2$$

$$d_{\text{sech}} = \frac{2,3297 \cdot 42,367^2}{8,509 \cdot 4,877} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16 \cdot 509 \cdot 0,2578}{2,3297^2} \cdot 0,115^2} \right]$$

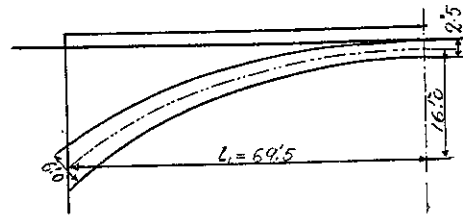


Abb. 52

$$=0,73 \text{ m}=73 \text{ cm.}$$

Die Koeffizienten Seite 86 werden jetzt :

$$C_1=0,8332 \cdot 2,28+0,1308 \cdot 1,25=2,0632$$

$$C_2=0,6170 \cdot 1,25=0,7713$$

$$u_1=100,8 \cdot 20=2016$$

$$u_2=8,6 \cdot 260=2236$$

$$C_3=2016+2236=4252$$

$$d_k = \frac{2,0632 \cdot 42,367^2}{8 \cdot 560 \cdot 4,877 \cdot 0,83}$$

$$\times \left[ 1 + \sqrt{\frac{16 \cdot 560 \left( 0,7713 + \frac{4 \cdot 4252 \cdot 0,67^3}{4,877 \cdot 42,367^2} \right)}{2,0632^2}} \cdot 0,115^2 \cdot 0,83^2 \right]$$

$$=126 \text{ cm.}$$

$$n = \frac{0,67^3}{1,30^3 \cdot 0,83} = 0,165.$$

Das Betonvolumen wird :

im Eingelenkbogen

$$V_1 = 0,67 \cdot 42,367 \cdot 1,342 = 38,10 \text{ m}^3 \text{ (für 1 m Breite)}$$

im gelenklosen Bogen

$$V_0 = 0,762 \cdot 42,367 \cdot 1,43 = 46,20 \text{ m}^3 \text{ (für 1 m Breite).}$$

Betonersparnis :

$$p = \frac{46,20 - 38,10}{38,10} = 21\%$$

$$\Delta d_s = \frac{1,20}{42,367 \cdot 1,33} \cdot 0,67^2 = 1 \text{ cm.}$$

Die prozentuale Ersparnis wird

$$21 - 1,5 = 19,5 \%$$

## II. Die Strassenbrücke (Muko-O-Hashi) über die Mukogawa (Abb 53).

- a) Die Verkehrslast (Strassenbahn) mit 25% Zuschlag..... 1370 kg/m<sup>2</sup>
- b) Die Temperaturänderung..... ±20° C
- c) Die spezifischen Gewichte :
  - Eisenbeton..... 2400 kg/m<sup>3</sup>
  - Steinpflaster..... 2600 "
  - Auffüllung (Mörtel)..... 1700 "
  - Schienengleis..... 146 kg/m<sup>2</sup>
- d) Die zullässige Druckspannung im Beton..... 45 kg/cm<sup>2</sup>  
 diejenige bei Berücksichtigung der Wärmeschwankungen..... 56 kg/cm<sup>2</sup>  
 Spannweite  $l \sim 20 \text{ m}$  (20,116 m)  
 Pfeilhöhe  $f \sim 3 \text{ m}$  (3,048 m)  
 $\frac{f}{l} = 0,15$

Die Scheitelsärkte und die Kämpfersärkte schätzen wir zu 30 cm und 70 cm.

Man erhält

$$\begin{aligned} g_s &= 0,10 \cdot 2,60 + 0,127 \cdot 1,70 \\ &+ 0,165 \cdot 2,40 + 0,04 \cdot 2,40 \\ &+ 0,30 \cdot 2,40 + 0,15 \\ &= 1,84 \text{ t/m}^2 \end{aligned}$$

$$y_v = 0,73 \text{ m}$$

$$m = \frac{1}{2} \left( \frac{f}{y_v} - 2 \right)^2 - 1 = \sim 1,5$$

$$H_0 = 0,540 \cdot 1,84 \cdot \frac{10^2}{3} = 33 \text{ t/m}$$

$$\sigma_s = \frac{33}{0,30 \cdot 1,00} = 110 \text{ t/m}^2$$

$$C_1 = 0,540 \cdot 1,84 + 0,344 \cdot 1,37 = 1,4649$$

$$C_2 = 0,2062 \cdot 1,37 = 0,2825$$

$$C_3 = 11,2 \cdot 20 \pm 0,95 \cdot 110 = 328,5$$

$$\sigma_a = 560 - 0,720 \cdot 328,5 \cdot \frac{0,33}{3} = 534 \text{ t/m}^2$$

$$\begin{aligned} d_{\text{sech}} &= \frac{1,4649 \cdot 20^2}{8 \cdot 534 \cdot 3} \cdot \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16 \cdot 534 \cdot 0,2825}{1,4649^2} \cdot 0,15^2} \right] \\ &= 28 \text{ cm,} \end{aligned}$$

oder ohne Berücksichtigung der Wärmeschwankungen

$$C_3 = 0,95 \cdot 110 = 104,5$$

$$\sigma_a = 450 - 0,720 \cdot 104,5 \cdot \frac{0,33}{3} = 442$$

$$\begin{aligned} d_{\text{sech}} &= \frac{1,4649 \cdot 20^2}{8 \cdot 442 \cdot 3} \cdot \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{16 \cdot 442 \cdot 0,2825}{1,4649^2} \cdot 0,15^2} \right] \\ &= 0,314 = 32 \text{ cm.} \end{aligned}$$

$$\cos \varphi_k = \frac{1}{\sqrt{1 + 18,5 \left( \frac{f}{l} \right)^2}} = 0,44$$

$$\text{tg}^2 \varphi = 18,5 \left( \frac{f}{l} \right)^2 = 4,16$$

$$\sqrt[3]{1 + \text{tg}^2 \varphi} = 1,315$$

$$n = \frac{0,30^3}{0,70^3 \cdot 0,44} = 0,18$$

$$C = 1,779 \quad (\text{Tabelle IV})$$

$$\begin{aligned} d_k &= d_s C \sqrt[3]{1 + \text{tg}^2 \varphi_k} \quad (\text{vergl. S. 54}) \\ &= 0,30 \cdot 1,779 \cdot 1,315 \end{aligned}$$

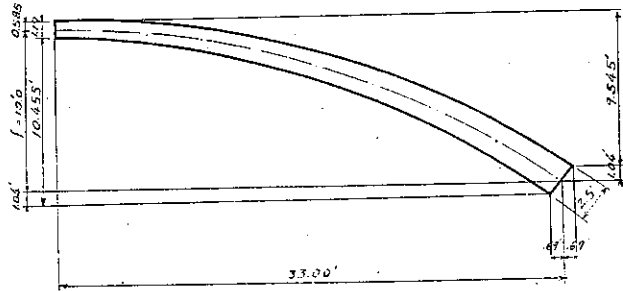


Abb. 53

$$= 0,70 \text{ m}$$

$$= 70 \text{ cm.}$$

Das Betonvolumen wird :

$$V_1 = 0,30 \cdot 20 \cdot 1,370 = 8,220 \text{ m}^3 \text{ (für 1 m Breite)}$$

$$V_0 = 0,35 \cdot 20 \cdot 1,344 = 9,408 \text{ m}^3 \text{ " (n=0,23).}$$

Betonersparnis :

$$p = \frac{9,408 - 8,220}{8,220} = 14,5 \%$$

$$\Delta d_s = \frac{1,2}{20 \cdot 1,357} \cdot 0,30^2 = 0,4 \text{ cm.}$$

Die prozentuale Ersparnis wird

$$14,5 - 1,3 = 13,2 \%$$

### III. Die Strassenbrücke (Ebisu-bashi) über die Dotonborigawa in Osaka.

$$l = 36,6 \text{ m } f = 3,0 \text{ m}$$

a) Die Verkehrslast mit Stosszuschlag ..... 800 kg/m<sup>2</sup>

b) Die Temperaturänderung ..... ± 20°C

c) Die spezifischen Gewichte :

Eisenbeton ..... 2400 kg/m<sup>3</sup>

Beton ..... 2200 "

Auffüllung (Erd) ..... 1600 "

Pflaster ..... 1000 "

$$\frac{f}{l} = \frac{3,0}{36,6} = 0,082$$

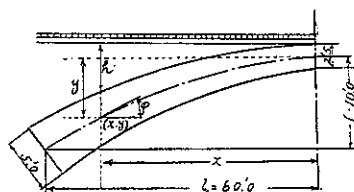


Abb. 54 (a)

#### 1) Die Gewölbeachse und die Gewölbestärken.

Aus der Tabellen I entnimmt man die Ordinaten der Gewölbeachse.

$$g_s = 0,09 \cdot 1,0 + 0,18 \cdot 2,2 + 0,62 \cdot 2,4 = 1,974 \text{ t/m}^2$$

$$g_k = 0,09 \cdot 1,0 + 0,18 \cdot 2,2 + 2,643 \cdot 1,6 + 1,314 \cdot 2,4 = 7,868 \text{ t/m}^2$$

$$m = \frac{g_k}{g_s} = 3,98 \approx 4$$

Bezeichnet ;

$$n' = \frac{E_s}{E_b} \text{ das Verhältnis der Elastizitätszahlen,}$$

$$= 15,$$

$d$  : die Gewölbestärke in m,

$b$  : die Gewölbebreite in m,

$a$  : den Abstand der Eiseneinlage vom untern bzw. oberen Rande in m,

$F_s$  : den gesamte in  $b$  Breite vorhandene Eisenquerschnitt in qm (unten od. oben),

$$b = 1,0 \text{ m,}$$

$$F = bd + 28F_e,$$

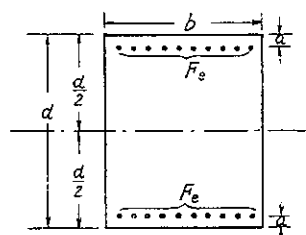


Abb. 54 (b)

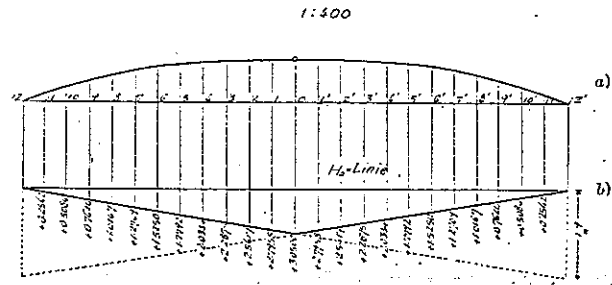


Abb. 55

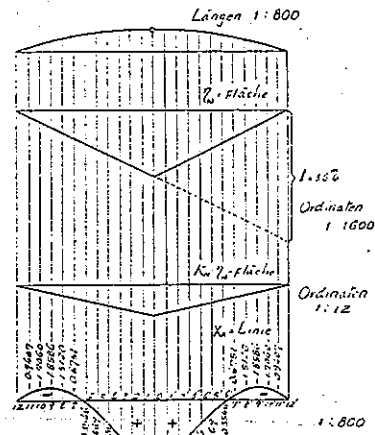


Abb. 57

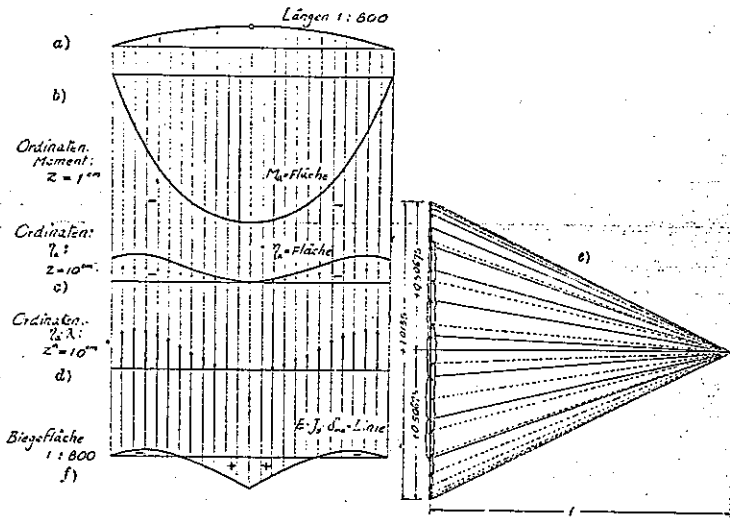


Abb. 56

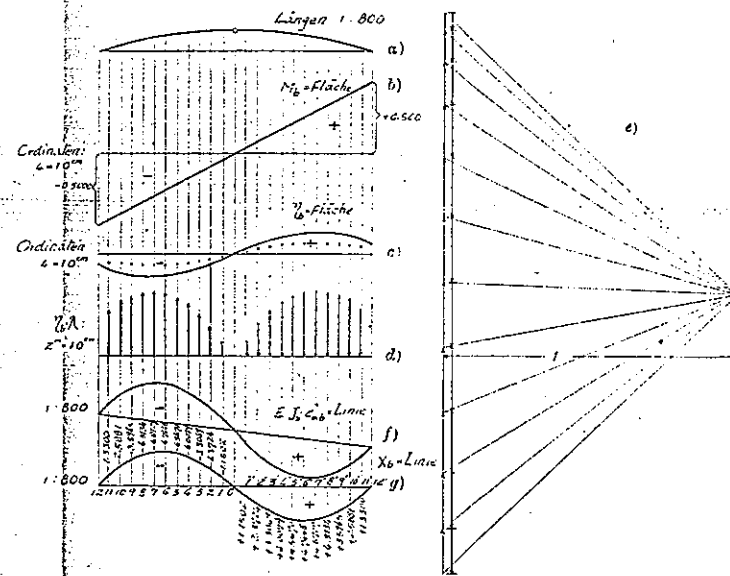


Abb. 58

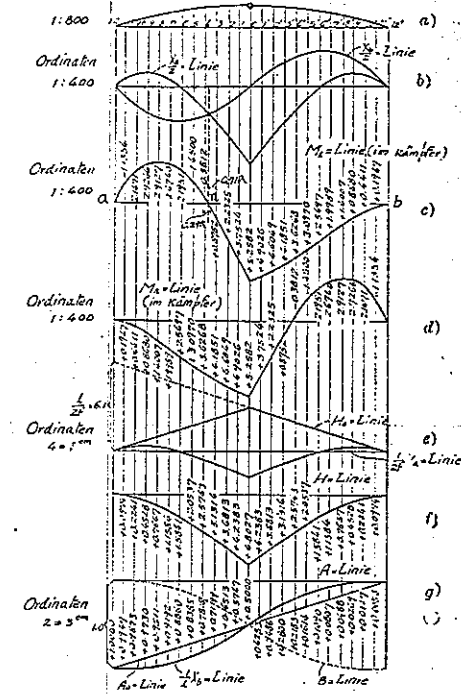


Abb. 59

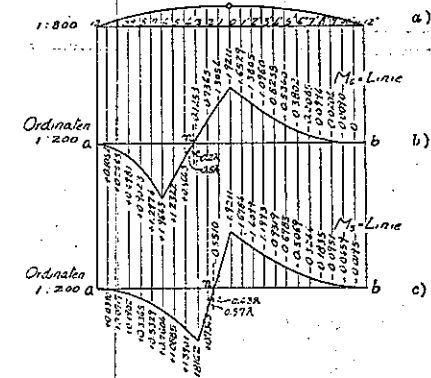


Abb. 60

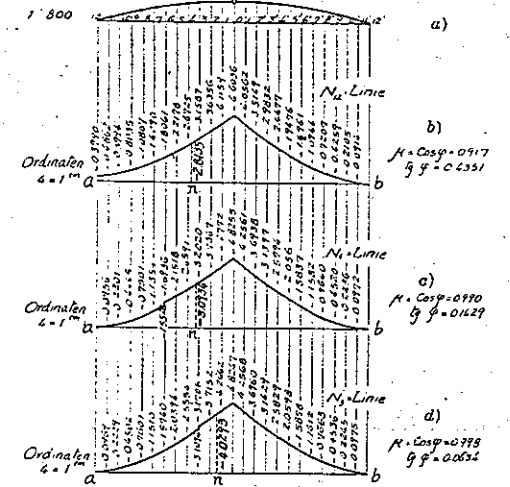


Abb. 61

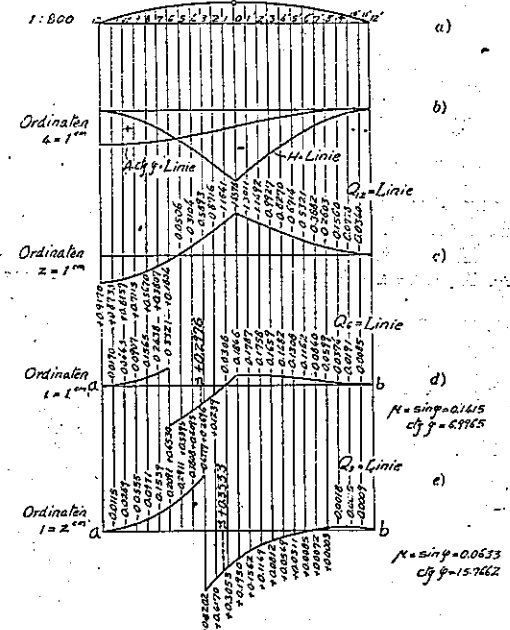


Abb. 62

(土木部標準十等十一年十一年)

$$J = \frac{bd^3}{12} + 28F_c \left( \frac{d}{2} - a \right)^2$$

Die durchgehende Bewehrung wird oben und unten aus je 10 Rundeisen (10 cm Abstand) von 30 mm Durchmesser auf 1 m Gewölbebreite bestehen.

$$a = 6 \text{ cm} = 0,06 \text{ m} \quad F_c = 0,0071 \text{ m}^2$$

$$J_s = \frac{0,62^3}{12} + 28 \cdot 0,0071 \cdot 0,0625 = 0,0322 \text{ m}^4$$

$$J_k = \frac{1,26^3}{12} + 28 \cdot 0,0071 \cdot 0,3249 = 0,2313 \text{ m}^4$$

$$n = \frac{J_s}{J_k \cos \varphi} = \frac{0,0322}{0,2313 \cdot 0,917} = 0,152$$

$$\frac{bd^3}{12} + 28F_c \left( \frac{d}{2} - a \right)^2 - \frac{J_s}{[1 - (1-n)\xi] \cos \varphi} = 0$$

für 1 m Breite

$$d^3 + 84F_c d^2 - 336F_c a \cdot d + 336F_c a^2 - \frac{12J_s}{[1 - (1-n)\xi] \cos \varphi} = 0$$

$$d^3 + 0,596d^2 - 0,143d + 0,009 - \frac{0,386}{[1 - 0,848\xi] \cos \varphi} = 0$$

$$F(d) = d^3 + 0,596d^2 - 0,143d - \frac{0,386}{[1 - 0,848\xi] \cos \varphi} - 0,009$$

Tabelle für die Gewölbeachse, die Gewölbestärken, die Gewölbequerschnitten und die  $w_j$ -Eläche (=  $F'w_j$ ).

Punkt	Kämpfer		Achtel			Viertel			Sechstel Achtel			Scheitel		
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		0
$\frac{y}{f}$	1,000	0,7968	0,6235	0,4855	0,3683	0,2720	0,1937	0,1310	0,0820	0,0453	0,0199	0,0049	0	Tabelle I m=4,0 entspr. f=3,0m
y (m)	3,0000	2,3889	1,8705	1,4565	1,1049	0,8160	0,5811	0,3930	0,2480	0,1359	0,0597	0,0147	0	
0,848ξ	0,848	0,778	0,706	0,636	0,565	0,495	0,424	0,353	0,282	0,212	0,141	0,071	0	(11)
1-0,848ξ	0,152	0,222	0,294	0,364	0,435	0,505	0,576	0,647	0,718	0,788	0,859	0,929	1,000	(12)
cos φ	0,917	0,941	0,958	0,970	0,978	0,983	0,990	0,994	0,996	0,998	0,999	1,000	1,000	(13)
$\frac{0,386}{(1-\xi)}$	0,139	0,208	0,282	0,353	0,425	0,497	0,570	0,643	0,715	0,787	0,858	0,929	1,000	(14)
$\frac{0,386}{(1-\xi)^2}$	2,778	1,854	1,368	1,092	0,908	0,776	0,678	0,600	0,540	0,491	0,450	0,416	0,386	(15)
1,51·0,009	2,769	1,845	1,359	1,083	0,899	0,767	0,669	0,591	0,531	0,482	0,441	0,407	0,377	F(d)
d: (cm)	126,0	109,0	97,5	90,0	84,2	79,5	75,8	72,6	69,8	67,5	65,4	63,7	62,0	
J (m <sup>4</sup> )	0,2313	0,1549	0,1137	0,0909	0,0758	0,0645	0,0566	0,0502	0,0450	0,0410	0,0375	0,0349	0,0322	
F (m <sup>2</sup> )	14,588	12,447	11,738	10,988	10,408	9,9932	9,558	9,248	8,968	8,738	8,528	8,358	8,188	
$\frac{F_s}{F}$	0,561	0,657	0,697	0,725	0,746	0,764	0,785	0,808	0,831	0,853	0,874	0,894	0,914	
$w_j \cdot f \cdot \cos \varphi$	0,514	0,618	0,668	0,722	0,769	0,810	0,846	0,881	0,908	0,935	0,959	0,979	1,000	$f = \frac{4 \cdot 3,0}{2} = 1,525 \text{ m}$

$$F_y = 2,5 \cdot 1,525 \cdot 14,588 \cdot 10,702 \cdot 1,010 \cdot 0,881 \cdot 0,915 \cdot 0,972 \cdot 12 \cdot 0,668 \cdot 10,769 \cdot 10,846 \cdot 10,916 \cdot 0,952 \cdot 1,000 = 30,087$$

$$F_x = \frac{F_y}{f} = \frac{30,087}{1,525} = 19,73$$



Tabelle für die Werte  $EJ_s \Delta w_{\text{ein}}$  und  $EJ_s \delta_{\text{aus}}$ .

Punkt	Kämpfer												Scheitel	
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		0
$y$ (m)	0	06102	1,1295	1,5435	1,8251	2,1840	2,4189	2,6070	2,7540	2,8641	2,9403	2,9953	3,0000	
$M_a$	-0,5000	-0,3983	-0,3118	-0,2426	-0,1840	-0,1358	-0,0968	-0,0654	-0,0409	-0,0226	-0,0099	-0,0024	0	$M_{\text{max}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
$J \cdot \cos \varphi$	0,212	0,145	0,109	0,088	0,074	0,064	0,056	0,050	0,045	0,041	0,038	0,035	0,032	
$M_a \cdot J_s$	-0,0161	-0,0128	-0,0103	-0,0078	-0,0059	-0,0044	-0,0031	-0,0020	-0,0013	-0,0007	-0,0003	-0,0001	0	
$Y_a \frac{M_a \cdot J_s}{EJ_s}$	-0,0760	-0,0684	-0,0616	-0,0560	-0,0513	-0,0473	-0,0438	-0,400	-0,0289	-0,0171	-0,0079	-0,0029	0	
$Y_a \lambda$	-0,0580	-0,1348	-0,1442	-0,1350	-0,1218	-0,1050	-0,0846	-0,0610	-0,0441	-0,0291	-0,0170	-0,0084	0	
$y \cdot Y_a$	0	-0,0540	-0,1069	-0,1568	-0,1952	-0,2195	-0,2338	-0,2423	-0,2495	-0,2541	-0,2562	-0,2567	0	$\frac{1}{2} M_a \cdot Y_a \cdot \lambda = 0,2119$
$M_a \cdot Y_a \cdot \lambda$	0,0290	0,0537	0,0450	0,0328	0,0224	0,0143	0,0082	0,0040	0,0018	0,0006	0,0001	0	0	

$E \cdot J_s \cdot \Delta w_{\text{ein}} = -\frac{2l}{3} (y_1 Y_{10} + y_2 Y_9 + \dots + y_{11} Y_1) + \frac{2l^2 Y_{12}}{3 \cdot 0,0001} \cdot 0,297 = +1,0155$   
 $K_M = -\sum M_a \cdot Y_a \cdot \lambda = -0,2119 = 0,4238$   
 $E \cdot J_s \cdot \delta_{\text{ein}} = K_M + K_N = 0,4238 + 0,0330 = 0,4568$

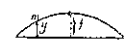
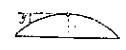


Tabelle für die Werte  $EJ_s \delta_{\text{ab}}$ .

Punkt	Kämpfer												Scheitel	
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		0
$M_b$	-0,3000	-0,4583	-0,6167	-0,7750	-0,9333	-0,9917	-0,2500	-0,2683	-0,1667	-0,0750	-0,0133	-0,0017	0	
$J \cdot \cos \varphi$	0,212	0,145	0,109	0,088	0,074	0,064	0,056	0,050	0,045	0,041	0,038	0,035	0,032	
$M_b \cdot J_s$	-0,0161	-0,0148	-0,0134	-0,0121	-0,0107	-0,0094	-0,0081	-0,0067	-0,0054	-0,0040	-0,0027	-0,0013	0	
$Y_b \frac{M_b \cdot J_s}{EJ_s}$	-0,0760	-0,1020	-0,1280	-0,1540	-0,1740	-0,1867	-0,1945	-0,1980	-0,1975	-0,1931	-0,1851	-0,1732	0	
$Y_b \lambda$	-0,0580	-0,1557	-0,1914	-0,2094	-0,2210	-0,2240	-0,2204	-0,2093	-0,1910	-0,1660	-0,1384	-0,1058	0	
$M_b \cdot Y_b \lambda$	0,0290	0,0715	0,0708	0,0786	0,0728	0,0654	0,0552	0,0427	0,0305	0,0186	0,0091	0,0024	0	$\frac{1}{2} M_b \cdot Y_b \cdot \lambda = 0,2564$

$E \cdot J_s \cdot \delta_{\text{ab}} = 20,5564 = 1,1128$



2) Die Belastung  $g$  pro Längeneinheit aus ständiger Last lautet im Punkte  $(x, y)$   
 $g = 0,09 \cdot 1,0 + 0,18 \cdot 2,2 + 1,6h + 2,4d \sec \varphi$

worin

$$h = y - \frac{1}{2} (d \sec \varphi - d_x) \quad (\text{Abb. 56})$$

Tabelle für die Werte  $g$  in t.

Punkt	Kämpfer												Scheitel	
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		0
$d$ (m)	1,260	1,090	0,975	0,900	0,842	0,795	0,758	0,726	0,698	0,675	0,654	0,637	0,620	
$\sec \varphi$	1,0905	1,0627	1,0439	1,0309	1,0225	1,0152	1,0101	1,0060	1,0040	1,0020	1,0010	1,0000	1,0000	
$d \cdot \sec \varphi$	1,3840	1,1583	1,0178	0,9278	0,8609	0,8071	0,7637	0,7304	0,7028	0,6816	0,6647	0,6510	0,6390	
$y$ (m)	3,0000	2,3698	1,8705	1,4565	1,1049	0,8160	0,5811	0,3920	0,2460	0,1350	0,0597	0,0147	0	
$\frac{1}{2} (d \sec \varphi - d_x)$	0,3520	0,2692	0,1989	0,1539	0,1205	0,0936	0,0729	0,0552	0,0404	0,0282	0,0174	0,0085	0	
$h$ (m)	2,6160	2,1006	1,6716	1,3026	0,9864	0,7224	0,5082	0,3378	0,2078	0,1077	0,0473	0,0082	0	
$g$ (t)	2,9964	6,6589	5,6033	4,7969	4,1272	3,5708	3,1368	2,7105	2,4959	2,2817	2,1250	2,0281	1,9740	

### 3) Das Biegemoment, die Querkraft und die Normalkraft infolge Temperaturänderung.

Das Moment für einem beliebigen Punkt  $m$  ist

$$M_m^t = \pm \frac{1 \epsilon t E J_s}{4 f^2 \sum M a \gamma a \lambda} \xi$$

$$= \pm \frac{36,6 \cdot 0,000012 \cdot 15 \cdot 1400000 \cdot 0,0322}{4 \cdot 3^2 \cdot 0,4238} \xi$$

$$= \pm 19,4712 \xi$$

$$H_i = \pm 19,4712 t$$

$$Q_m^t = -H_i \sin \varphi$$

$$N_m^t = H_i \cos \varphi$$

Punkt	Kämpfer 12	Viertel 6	Achtel 3
$\xi$	30000	0,5811	0,1359
$\sin \varphi$	0,399	0,142	0,063
$\cos \varphi$	0,917	0,990	0,998
$M_m^t$ (mt)	$\pm 58,414$	$\pm 11,315$	$\pm 2,646$
$Q_m^t$ (t)	$\mp 7,769$	$\mp 2,765$	$\mp 1,227$
$N_m^t$ (t)	$\pm 17,835$	$\pm 19,276$	$\pm 19,432$

### 4) Zusammenstellung der Momente, Querkräfte und Normalkräfte.

#### (1) im Kämpfer

	$L_s$	max. M		min. M		Totallast	
		$L_v$	Summe	$L_v$	Summe	$L_v$	Summe
$M$ (mt)	+51,869	+48,948	+100,817	-19,113	+32,756	+29,835	+81,704
$Q$ (t)	-6,923	-12,702	-19,625	+4,383	-2,540	-8,719	-15,242
$N$ (t)	-185,659	-41,603	-227,262	-14,161	-199,820	-55,764	-241,423

$L_s$  = ständige Last  
 $L_v$  = Verkehrslast

#### (2) im Viertel (Punkt 6)

	$L_s$	max. M		min. M		Totallast	
		$L_v$	Summe	$L_v$	Summe	$L_v$	Summe
$M$ (mt)	+0,122	-12,687	-12,565	+8,133	+8,255	-4,554	-4,432
$Q$ (t)	-3,026	+1,246	-4,272	+0,781	-2,245	-0,465	-3,491
$N$ (t)	-174,308	-42,843	-217,151	-12,175	-186,483	-55,019	-229,327

#### (3) im Achtel (Punkt 3)

	$L_s$	max. M		min. M		Totallast	
		$L_v$	Summe	$L_v$	Summe	$L_v$	Summe
$M$ (mt)	-4,579	-11,771	-16,350	+8,618	+4,039	-3,153	-7,732
$Q$ (t)	-1,490	+1,124	-0,366	-0,942	-2,432	+0,183	-1,307
$N$ (t)	-193,678	-35,302	-228,980	-19,554	-193,232	-54,857	-228,535

5) Zusammenstellung der Momente, Querkräfte und Normalkräfte unter Berücksichtigung der Wärme.

(1) im Kämpfer

	$L_s$	Temp	$\frac{max. M}{L_v}$ Summe		$\frac{min. M}{L_v}$ Summe		$\frac{Totallast}{L_v}$ Summe	
$M (mt)$	$+ 51,869$	$\pm 58,914$	$+48,948$	$+159,231$	$-19,113$	$+ 91,170$	$+29,835$	$+140,118$
$Q (t)$	$- 6,923$	$\mp 7,769$	$-12,702$	$-27,394$	$+ 4,383$	$-10,309$	$- 8,319$	$-23,011$
$N (t)$	$-185,659$	$\pm 17,865$	$-41,603$	$-245,117$	$-16,161$	$-217,675$	$-55,764$	$-250,278$

(2) im Viertel

	$L_s$	Temp	$\frac{max. M}{L_v}$ Summe		$\frac{min. M}{L_v}$ Summe		$\frac{Totallast}{L_v}$ Summe	
$M (mt)$	$+ 0,122$	$\pm 11,315$	$-12,687$	$-23,880$	$+ 8,133$	$-19,570$	$- 4,554$	$-15,747$
$Q (t)$	$- 3,026$	$\mp 2,765$	$- 1,246$	$- 7,037$	$+ 0,781$	$- 5,010$	$- 0,465$	$- 6,256$
$N (t)$	$-174,308$	$\pm 19,276$	$-42,843$	$-248,603$	$-12,175$	$-205,759$	$-55,019$	$-248,603$

(3) im Achtel

	$L_s$	Temp	$\frac{max. M}{L_v}$ Summe		$\frac{min. M}{L_v}$ Summe		$\frac{Totallast}{L_v}$ Summe	
$M (mt)$	$- 4,579$	$\pm 2,646$	$-11,771$	$-18,996$	$+ 8,618$	$+ 6,685$	$- 3,153$	$-10,378$
$Q (t)$	$- 1,490$	$\mp 1,227$	$+ 1,124$	$- 1,593$	$- 0,942$	$- 3,659$	$+ 0,183$	$- 2,534$
$N (t)$	$-173,678$	$\pm 19,432$	$-35,302$	$-228,412$	$-19,554$	$-212,664$	$-54,857$	$-267,967$

6) Berechnung der Randspannungen.

Fall I.

$e \leq e_0$  worin  $e = \frac{M}{N}$ ,  $e_0 = \frac{2J}{dF}$

$\sigma_b = \frac{N}{F} + \frac{d}{2} \frac{M}{J}$ ;  $\sigma_b' = \frac{N}{F} - \frac{d}{2} \frac{M}{J}$

$\sigma_c = n \left[ \frac{N}{F} + \frac{M}{J} \left( \frac{d}{2} - a \right) \right]$

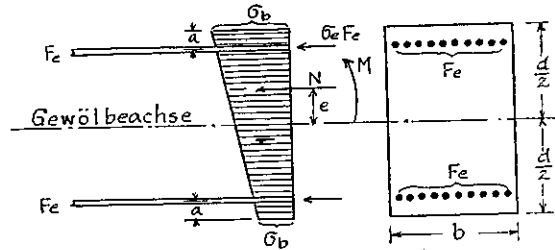


Abb. 63

Fall II.

$e > e_0$

der Wert  $x$ :

$x^3 - 3 \left( \frac{d}{2} - e \right) x^2 + 12ne \frac{F_0}{b} x$

$- 6n \frac{F_0}{b} (2c^2 + de) = 0$

$\sigma_0 = \frac{N}{\frac{bx}{2} + nF_0 \left( 2 - \frac{d}{x} \right)}$

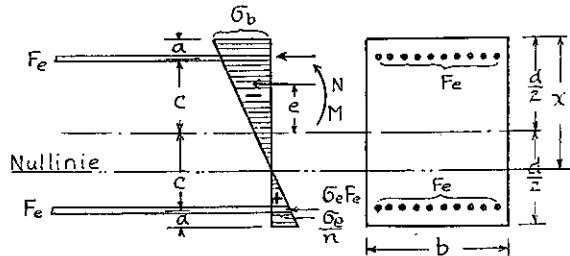


Abb. 64

$$\text{oder } \sigma_b = \frac{M}{\frac{bx}{2} \left( \frac{d}{2} - \frac{x}{3} \right) + 2n F_c \frac{c^2}{x}} \quad \sigma_e = \frac{n\sigma_b}{x} \left( c + \frac{d}{2} - x \right)$$

(1) Kämpferquerschnitt.

$$e = \frac{159,231}{245,117} = 0,65 \quad e_0 = \frac{2 \cdot 0,2313}{1,26 \cdot 1,4588} = 0,25$$

für 1 m Breite

$$x^3 - 3 \left( \frac{1,26}{2} - 0,65 \right) x^2 + 12 \cdot 15 \cdot 0,65 \cdot 0,0071 x - 6 \cdot 15 \cdot 0,0071 (0,650 + 0,819) = 0$$

$$x^3 + 0,06x^2 + 0,8307x - 0,9337 = 0$$

$$x = 0,693$$

$$\sigma_b = 660 \text{ t/m}^2 > 563 \text{ t/m}^2$$

Da sie die zulässige Beanspruchung des Wölbmauerwerks überschreiten, so ergibt sich die Notwendigkeit einer Verstärkung der Bewehrung an den Kämpfer, die in einem kurzen Anlauf (bis Achtel, Punkt 9) auszuführen ist.

für 1 m Breite

$$J = \frac{1}{12} d^3 + 2(n-1) F_c \left( \frac{1}{2} d^2 - 3da + 5a^2 \right) = 0,2837 \text{ m}^4$$

$$F = d + 4(n-1) F_c = 1,6576 \text{ m}^2$$

$$x^3 + 0,06x^2 + 1,572x - 1,749 = 0$$

$$x = 0,783$$

$$\sigma_b = 530 \text{ t/m}^2.$$

$$\sigma_e = 4230 \text{ t/m}^2$$

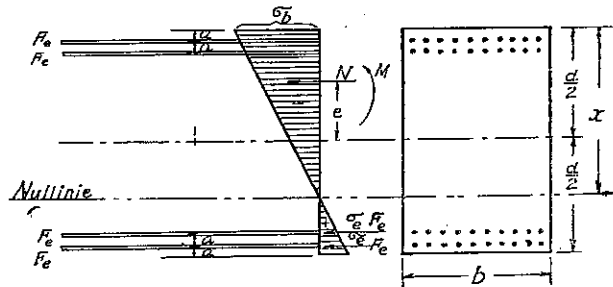


Abb. 65

(2) Viertelquerschnitt.

$$e = \frac{23,880}{248,603} = 0,096 \quad e_0 = \frac{2 \cdot 0,0566}{0,758 \cdot 0,9568} = 0,156$$

$$\sigma_b = 420 \text{ t/m}^2, \quad \sigma_e = 5918 \text{ t/m}^2.$$

(3) Achtelquerschnitt.

$$e = \frac{18,996}{228,412} = 0,083 \quad e_0 = \frac{2 \cdot 0,0410}{0,675 \cdot 0,8738} = 0,139$$

$$\sigma_b = 418 \text{ t/m}^2, \quad \sigma_e = 7890 \text{ t/m}^2.$$

## 7) Die Berechnung der Scheitelgelenke aus Eisenbeton.

(1) Die Pressung in der Mitte der Berührungsfläche.

Grösster Horizontalschub  $H = 259,278 \text{ t}$  für 1 m Gewölbetiefe. Die Berührungsbreite der Gelenke ergibt sich zu

$$a = \frac{8}{3} \sqrt{\frac{259,278}{3,14 \cdot 1400000} \frac{1}{\frac{1}{2,9} - \frac{1}{3,5}}} = 0,085$$

$$2a = 0,17 = 17 \text{ cm.}$$

Dieser Berührungsbreite entspricht eine Beanspruchung von

$$\sigma_{max} = \frac{2 \cdot 259,278}{3,14 \cdot 0,085} = 1940 \text{ t/m}^2 = 194 \text{ kg/cm}^2.$$

- (2) Die gesamte von einem Gelenk mit den Abmessungen  $d_s = 62 \text{ cm}$ ,  $b = 100 \text{ cm}$  und  $t = 62 \text{ cm}$  übertragene Druckkraft.

Die eingelegten Eisen hatten 10 mm Durchmesser und lagen je 10 cm voneinander.

Mit  $f_c = 0,7854 \text{ cm}^2$  und  $f_b = 100 \text{ cm}^2$ ,

$$\frac{n f_c}{f_b} = 0,1177$$

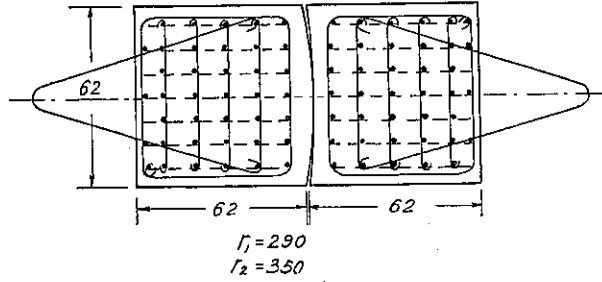


Abb. 66

$$P = 200 \frac{100 \cdot 62}{3} (1 + 0,1177) = 462\,000 \text{ kg} = 462 \text{ t}$$

$$\sigma_m = \frac{194}{\left(1,06 + 0,033 \frac{62 - 17}{17} \sqrt{\frac{62}{17}}\right) (1 + 0,1177)} = 142 \text{ kg/cm}^2.$$

Tabelle I.

m	Kämpfer	Werte $\frac{y}{f} = \frac{1}{m-1} [\text{Cosh } \xi k - 1]$ .											Scheitel				
		Achtel			Gewölbe Viertel			Punkt			Achtel			1	2	3	
		9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	1	2	3
1	1	0,8408	0,6944	0,5625	0,4444	0,3403	0,2500	0,1786	0,1111	0,0625	0,0278	0,0070	0,0070	0,0278	0,0070	0,0278	0,0070
1,5	1	0,8300	0,6784	0,5440	0,4260	0,3238	0,2360	0,1628	0,1038	0,0582	0,0258	0,0064	0,0064	0,0258	0,0064	0,0258	0,0064
2	1	0,8216	0,6652	0,5286	0,4109	0,3099	0,2248	0,1544	0,0979	0,0547	0,0242	0,0060	0,0060	0,0242	0,0060	0,0242	0,0060
2,5	1	0,8141	0,6537	0,5153	0,3980	0,2984	0,2153	0,1472	0,0931	0,0518	0,0229	0,0057	0,0057	0,0229	0,0057	0,0229	0,0057
3	1	0,8076	0,6436	0,5042	0,3872	0,2884	0,2070	0,1412	0,0888	0,0494	0,0218	0,0054	0,0054	0,0218	0,0054	0,0218	0,0054
3,5	1	0,8019	0,6349	0,4944	0,3771	0,2798	0,2000	0,1357	0,0852	0,0472	0,0208	0,0052	0,0052	0,0208	0,0052	0,0208	0,0052
4	1	0,7966	0,6255	0,4855	0,3683	0,2720	0,1937	0,1310	0,0820	0,0453	0,0199	0,0049	0,0049	0,0199	0,0049	0,0199	0,0049
4,5	1	0,7918	0,6199	0,4773	0,3605	0,2652	0,1881	0,1268	0,0792	0,0437	0,0191	0,0047	0,0047	0,0191	0,0047	0,0191	0,0047
5	1	0,7875	0,6129	0,4700	0,3534	0,2589	0,1830	0,1230	0,0766	0,0422	0,0185	0,0046	0,0046	0,0185	0,0046	0,0185	0,0046
6	1	0,7796	0,6011	0,4569	0,3410	0,2476	0,1742	0,1164	0,0754	0,0398	0,0174	0,0043	0,0043	0,0174	0,0043	0,0174	0,0043
7	1	0,7726	0,5909	0,4457	0,3303	0,2386	0,1667	0,1109	0,0685	0,0375	0,0163	0,0040	0,0040	0,0163	0,0040	0,0163	0,0040
8	1	0,7667	0,5819	0,4359	0,3208	0,2305	0,1602	0,1061	0,0653	0,0356	0,0155	0,0038	0,0038	0,0155	0,0038	0,0155	0,0038
9	1	0,7616	0,5737	0,4271	0,3125	0,2234	0,1545	0,1019	0,0625	0,0340	0,0148	0,0036	0,0036	0,0148	0,0036	0,0148	0,0036
10	1	0,7561	0,5664	0,4148	0,3051	0,2170	0,1495	0,0982	0,0600	0,0326	0,0130	0,0035	0,0035	0,0130	0,0035	0,0130	0,0035
12	1	0,7511	0,5581	0,4061	0,2981	0,2111	0,1441	0,0941	0,0561	0,0301	0,0121	0,0031	0,0031	0,0121	0,0031	0,0121	0,0031

Tabelle II.

		Werte $k_g$												
m	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000	3,500	4,000	4,500	5,000	6,000	7,000	8,000	9,000	10,000
	0,5000	0,5400	0,5772	0,6112	0,6412	0,6748	0,7048	0,7332	0,7612	0,8332	0,8648	0,9132	0,9596	1,0044
		Werte $fg_{92\%}$												
m	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000	3,500	4,000	4,500	5,000	6,000	7,000	8,000	9,000	10,000
	4,000	4,304	4,562	4,787	4,985	5,165	5,327	5,477	5,615	5,834	6,083	6,280	6,456	6,618
		Werte $k_g'$												
m	1,000	1,500	2,000	2,500	3,000	3,500	4,000	4,500	5,000	6,000	7,000	8,000	9,000	10,000
	1,000	1,1616	1,3152	1,4624	1,6044	1,7426	1,8770	2,0084	2,1370	2,2876	2,6304	2,8670	3,0976	3,3240

Tabelle III.

m	$\frac{y_0}{f}$	Werte										$\left(\frac{l}{f}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{4k^2}{(m-1)^2} \operatorname{Sinh} \xi k$									
		Kämpfer		Achtel		Gewölbe Viertel		Punkt		Sechstel		Achtel		Scheitel							
		12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	S	m						
1	0,2500	16,000	13,444	11,111	9,000	7,111	5,444	4,000	2,778	1,778	1,000	0,444	0,111	0	1						
1,5	0,2360	18,525	14,854	11,759	9,158	6,985	5,183	3,705	2,514	1,564	0,879	0,385	0,096	0	1,5						
2	0,2248	20,816	16,083	12,800	9,274	6,872	4,966	3,469	2,308	1,393	0,779	0,343	0,084	0	2						
2,5	0,2153	22,913	17,166	12,756	9,365	6,767	4,781	3,273	2,140	1,303	0,705	0,304	0,075	0	2,5						
3	0,2070	24,846	18,139	13,147	9,425	6,665	4,618	3,106	2,000	1,202	0,643	0,276	0,068	0	3						
3,5	0,2000	26,677	19,036	13,493	9,486	6,579	4,477	2,965	1,882	1,117	0,592	0,253	0,062	0	3,5						
4	0,1937	28,381	19,850	13,808	9,526	6,491	4,349	2,838	1,779	1,045	0,550	0,233	0,056	0	4						
4,5	0,1881	29,999	20,609	14,087	9,557	6,414	4,235	2,727	1,690	0,983	0,513	0,216	0,052	0	4,5						
5	0,1830	31,529	21,312	14,338	9,583	6,340	4,129	2,628	1,611	0,928	0,481	0,201	0,049	0	5						
6	0,1742	34,387	22,588	14,778	9,618	6,205	3,928	2,457	1,477	0,837	0,428	0,177	0,042	0	6						
7	0,1667	37,000	23,717	15,155	9,635	6,080	3,787	2,313	1,367	0,764	0,385	0,158	0,038	0	7						
8	0,1602	39,433	24,742	15,483	9,646	5,967	3,650	2,191	1,274	0,703	0,351	0,143	0,034	0	8						
9	0,1545	41,674	25,653	15,759	9,641	5,861	3,525	2,084	1,196	0,651	0,322	0,130	0,031	0	9						
10	0,1495	43,803	26,508	16,012	9,637	5,766	3,416	1,991	1,128	0,607	0,298	0,120	0,028	0	10						
m	$\frac{y_0}{f}$	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	S	m						



Tabelle IV.

$$\text{Werte } C = \frac{1}{\sqrt[3]{1-(1-m)^2}}$$

n	Kämpfer												Scheitel	
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1		
	Achtel			Gewölbe Punkt Viertel			Sechstel			Achtel				
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,80	1,077	1,070	1,063	1,056	1,049	1,042	1,036	1,029	1,023	1,017	1,011	1,006	1,000	0,80
0,60	1,186	1,164	1,145	1,126	1,109	1,093	1,077	1,063	1,049	1,036	1,023	1,011	1,000	0,60
0,50	1,260	1,227	1,197	1,170	1,145	1,122	1,101	1,081	1,063	1,046	1,029	1,014	1,000	0,50
0,40	1,357	1,305	1,260	1,221	1,186	1,154	1,126	1,101	1,077	1,056	1,036	1,017	1,000	0,40
0,30	1,491	1,408	1,339	1,282	1,233	1,191	1,154	1,122	1,093	1,066	1,042	1,020	1,000	0,30
0,25	1,587	1,474	1,387	1,317	1,260	1,211	1,170	1,133	1,101	1,072	1,046	1,022	1,000	0,25
0,20	1,710	1,554	1,442	1,357	1,289	1,233	1,186	1,145	1,109	1,077	1,049	1,023	1,000	0,20
0,15	1,882	1,655	1,508	1,403	1,322	1,256	1,208	1,157	1,117	1,083	1,052	1,025	1,000	0,15
0,10	2,153	1,790	1,587	1,458	1,360	1,282	1,221	1,169	1,128	1,091	1,056	1,027	1,000	0,10

**Tabelle V.**

Werte  $C = \frac{1}{\sqrt[3]{1 - (1-n)^2}}$

n	Kämpfer											Gewölbe Punkt Viertel				Achtel			Scheitel		
	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	1	2	3	1	2	3	n		
1,00	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	
0,80	1,077	1,060	1,052	1,043	1,034	1,026	1,019	1,013	1,008	1,004	1,002	1,001	1,001	1,002	1,004	1,001	1,004	1,007	1,004	1,000	0,800
0,60	1,186	1,149	1,116	1,089	1,068	1,052	1,038	1,023	1,013	1,007	1,004	1,001	1,001	1,002	1,004	1,001	1,004	1,007	1,004	1,000	0,600
0,50	1,260	1,200	1,154	1,118	1,087	1,063	1,047	1,032	1,018	1,010	1,005	1,002	1,002	1,005	1,010	1,002	1,005	1,010	1,005	1,000	0,500
0,40	1,357	1,265	1,197	1,148	1,111	1,081	1,053	1,038	1,023	1,013	1,006	1,002	1,002	1,006	1,013	1,002	1,006	1,013	1,006	1,000	0,400
0,30	1,494	1,344	1,256	1,183	1,135	1,094	1,066	1,045	1,027	1,016	1,007	1,002	1,002	1,007	1,016	1,002	1,007	1,016	1,007	1,000	0,300
0,25	1,587	1,395	1,278	1,203	1,146	1,104	1,073	1,048	1,029	1,017	1,008	1,003	1,003	1,008	1,017	1,003	1,008	1,017	1,008	1,000	0,250
0,20	1,710	1,450	1,310	1,221	1,158	1,113	1,079	1,052	1,031	1,018	1,008	1,003	1,003	1,008	1,018	1,003	1,008	1,018	1,008	1,000	0,200
0,15	1,882	1,518	1,350	1,242	1,171	1,121	1,086	1,054	1,033	1,019	1,009	1,003	1,003	1,009	1,019	1,003	1,009	1,019	1,009	1,000	0,150
0,10	2,153	1,600	1,389	1,266	1,188	1,129	1,090	1,059	1,036	1,020	1,010	1,003	1,003	1,010	1,020	1,003	1,010	1,020	1,010	1,000	0,100

Tabelle VI. Werte von  $M_{kl}$ ,  $M_{kr}$ ,  $M_{Ssch\ i}$ ,  $M_{Ssch\ r}$  und  $H$ .

$$\psi = \frac{f}{l}$$

	$m=1, r=1, n=0,2$	$m=1, r=1, n=0,3$
$M_{kl}$	$-\frac{1}{12,3} pl_1^2 - \frac{1}{13} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$	$-\frac{1}{13,1} pl_1^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$
$M_{kr}$	$+\frac{1}{12,3} pl_1^2 - \frac{1}{13} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$	$+\frac{1}{13,1} pl_1^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$
$M_{Ssch\ i}$	$+\frac{1}{35} pl_1^2 - \frac{1}{115} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$	$+\frac{1}{33,2} pl_1^2 - \frac{1}{144} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$
$M_{Ssch\ r}$	$-\frac{1}{35} pl_1^2 - \frac{1}{115} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$	$-\frac{1}{33,2} pl_1^2 - \frac{1}{144} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$
$H$	$\frac{pl_1^2}{4f}$	$\frac{pl_1^2}{4f}$
	$m=1, r=2, n=0,2$	$m=1, r=2, n=0,3$
$M_{kl}$	$-\frac{1}{12,2} pl_1^2 - \frac{1}{16,5} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$	$-\frac{1}{12,9} pl_1^2 - \frac{1}{19,2} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$
$M_{kr}$	$+\frac{1}{12,2} pl_1^2 - \frac{1}{16,5} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$	$+\frac{1}{12,9} pl_1^2 - \frac{1}{19,2} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$
$M_{Ssch\ i}$	$+\frac{1}{35,4} pl_1^2 - \frac{1}{148} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$	$+\frac{1}{33,7} pl_1^2 - \frac{1}{173} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$
$M_{Ssch\ r}$	$-\frac{1}{35,4} pl_1^2 - \frac{1}{148} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$	$-\frac{1}{33,7} pl_1^2 - \frac{1}{173} \left(\frac{ds}{\psi}\right)^2 p$
$H$	$\frac{pl_1^2}{4f}$	$\frac{pl_1^2}{4f}$