

論 說 報 告

土木學會誌 第十五卷第八號 昭和四年八月

圓形無卷立坑道に及ぼす外部荷重の影響

會員 工學士 久野重一郎

Influence of External Pressure upon a Circular
Tunnel without Lining

By Jiuichiro Kuno, C. E., Member.

内 容 梗 概

本篇は、地表及坑内へ働く壓力が、トンネルの周圍へ如何なる應力を與へるか、理論的に解いたものである。但し 2 個の假定に立ち、そこには、開拓せらるべき領土の若干を残してゐる。

I. 緒 言

圓い無卷立の坑道（例へば掘鑿進行中のトンネル）に於て、地表から働く荷重及坑道内部から加はる壓力（壓搾空氣壓の如き）は、いかなる應力を生ずるものであるか。これを解くにあたり、2 個の假定に立つ。

1. 坑道周圍の地盤は彈性を有する。
2. 坑道横断面について應力は 2 軸性である。

もとより表題に示すごとく、こゝには外部荷重の影響を論じ、質量力の効果には言及しない。

II. 地上に荷重存する場合の一般的解法（甲）

坑道横断面の模様を數平面 z に表示す（第一圖）。更に一枚の數平面 $w = \alpha + i\beta$ をとり
函数

$$e^{wz} = (z + ia)/(z - ia) \dots \dots \dots (1)$$

によれば z 圖形の穴の外部は、 w 矩形の内部に等角寫像せられる（第二圖）。 β は $\pm\pi$ を越えないものとする、常數 a は、原點から穴へ引いた切線の長さに等しい。 z の虚實を分離すれば

$$x = a \sin \beta / (\text{Cosh } \alpha - \cos \beta)$$

$$y = a \text{ Sinh } \alpha / (\text{Cosh } \alpha - \cos \beta)$$

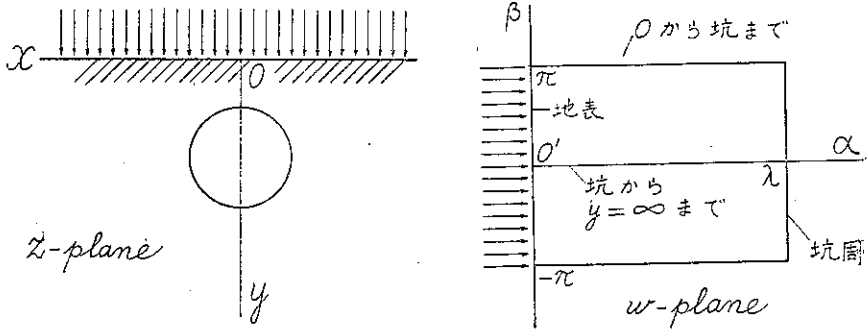
更に

$$\text{寫像擴大率} \quad \left| \frac{dw}{dz} \right| = h = (\text{Cosh } \alpha - \cos \beta) / a,$$

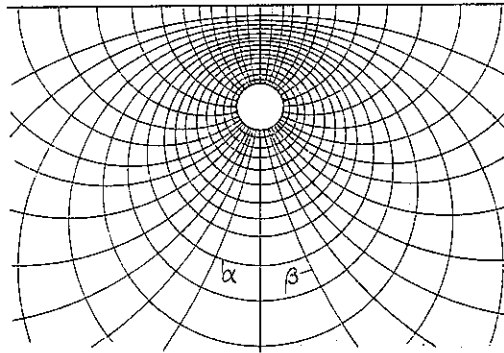
$$-\left[\frac{\partial(x-iy)}{\partial \alpha} \right]^{-1} = \frac{i(\text{Cosh } \alpha - \cos \beta)^2}{a(\text{Cosh } w - 1)}$$

第一圖

第二圖



第三圖



w 矩形の各側邊に平行な直線を z 平面に寫像すれば、 α 曲線及 β 曲線として、夫々圓弧を得 (第三圖)。地表は $\alpha=0$ 、穴は $\alpha=\lambda$ に對應す。この α, β を曲坐標に採用し、周界の條件として

$$\begin{aligned} \alpha=0 : & \quad \widehat{\alpha\alpha} = -p, & \quad \widehat{\alpha\beta} = 0 \\ \alpha=\lambda : & \quad \widehat{\alpha\alpha} = 0, & \quad \widehat{\alpha\beta} = 0 \end{aligned}$$

を指定す。 p は等布荷重の強度である。この坐標系に對して、横田博士の應力方程式

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y - i2\tau &= iyf_1'(z) + f_2(z) \\ \sigma_x + \sigma_y &= Rf_1(z) \end{aligned}$$

は次の形に變へられる。

$$\widehat{\beta\beta} - \widehat{\alpha\alpha} - i2\widehat{\alpha\beta} = \frac{i(\text{Cosh } \alpha - \cos \beta)^2}{\alpha(\text{Cosh } w - 1)} \left[\frac{ia \text{ Sinh } \alpha}{(\text{Cosh } \alpha - \cos \beta)} \varphi_1'(w) + \varphi(w) \right] \dots (2)$$

$$\widehat{\beta\beta} + \widehat{\alpha\alpha} = \mathbf{R} \varphi_1(w) \dots \dots \dots (3)$$

$\widehat{\alpha\alpha}$ 及 $\widehat{\beta\beta}$ は、夫々 α 及 β 曲線の外法線の方向へ作用する應張力、 $\widehat{\alpha\beta}$ は其の應剪力である。 $\varphi_1(w)$ と $\varphi(w)$ は w の任意の函数、 $\mathbf{R}\varphi_1(w)$ は $\varphi_1(w)$ の實部を表はす。いま

$$\varphi(w) = ia\varphi_2(w)/(1 - \text{Cosh } w)$$

と置きて (2) と (3) から $\widehat{\beta\beta}$ を消去すれば

$$\left\{ \mathbf{R}\varphi_1 - 2\widehat{\alpha\alpha} - i2\widehat{\alpha\beta} \right\} + \frac{\text{Sinh } \alpha (\text{Cosh } \alpha - \cos \beta)}{(\text{Cosh } w - 1)} \varphi_1' - \frac{(\text{Cosh } \alpha - \cos \beta)^2}{(\text{Cosh } w - 1)^2} \varphi_2 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

こゝに誘導したものは、周界の條件が 2 極坐標の α 曲線について與へらるゝ場合、應力表示の決定に供すべき基本式である。これに地表の條件を入れれば、

$$[\mathbf{R}\varphi_1 + 2p - \varphi_2]_{n=0} = 0$$

を得。この關係と、應力が y 軸に對して對稱であるべきことから、未知函数を

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= -2p + \sum A_n \text{ Sinh } nw + \sum B_n \text{ Cosh } nw, \\ \varphi_1' &= \sum n A_n \text{ Cosh } nw + \sum n B_n \text{ Sinh } nw, \\ \mathbf{R}\varphi_1 &= -2p + \sum (A_n \text{ Sinh } n\alpha + B_n \text{ Cosh } n\alpha) \cos n\beta, \\ \varphi_2 &= \sum B_n \text{ Cosh } nw \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

なる形に選定すれば、地表の條件は常に満たされる。式中の總和記號は $n=1$ より $n=\infty$ に至る。次にこれらの級數を (4) へ代入して、穴の周の條件を挿入すれば、(4) は

$$-4p[e^{2v} - 4e^v + 6 - 4e^{-v} + e^{-2v}] + \frac{1}{2} \sum [F_n + f_n] = 0 \dots \dots \dots (6)$$

となる。但し $v = \lambda + i\beta$, $q = e^{2\lambda}$ にして、

$$\begin{aligned} F_n &= -[A_n \{q^{-n} - nq^{-1} + n - 1\} + B_n \{n - 1 - (n-2)q^{-1} - q^{-n}\}] e^{(n+2)v} \\ &\quad + [A_n \{4q^{-n} + nq + 2n - 4 - 3nq^{-1}\} + B_n \{2n + nq - (3n-4)q^{-1} - 4q^{-n}\}] e^{(n+1)v} \\ &\quad - [A_n \{6q^{-n} + 3n(q - q^{-1}) - 6\} + B_n \{2 + (3n+2)q - (3n-2)q^{-1} - 6q^{-n}\}] e^{nv} \\ &\quad + [A_n \{4q^{-n} - nq^{-1} + 3nq - 2n - 4\} + B_n \{(3n+4)q - 2n - nq^{-1} - 4q^{-n}\}] e^{(n-1)v} \\ &\quad - [A_n \{q^{-n} + nq - n - 1\} + B_n \{nq + 2q - q^{-n} - n - 1\}] e^{(n-2)v} \\ f_n &= [A_n \{q^n - nq + n - 1\} + B_n \{q^n + nq - 2q - n + 1\}] e^{-(n+2)v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -[A_n\{4q^n - 3nq + nq^{-1} + 2n - 4\} + B_n\{4q^n + 3nq - 4q - nq^{-1} - 2n\}]e^{-(n+1)v} \\
& + [A_n\{6q^n - 3n(q - q^{-1}) - 6\} + B_n\{6q^n + 3nq - 2q - 3nq^{-1} - 2q^{-1} - 2\}]e^{-nv} \\
& - [A_n\{4q^n - nq + 3np^{-1} - 2n - 4\} + B_n\{4q^n + nq - 3nq^{-1} - 4q^{-1} + 2n\}]e^{-(n-1)v} \\
& + [A_n\{q^n + nq^{-1} - n - 1\} + B_n\{q^n - nq^{-1} - 2q^{-1} + n + 1\}]e^{-(n-2)v}
\end{aligned}$$

β の如何に關せず (6) は成立すべき筈であるから、 m を正の整数とすると、(6) の展開に於て、任意の $e^{im\beta}$ 及 $e^{-im\beta}$ の係数は、夫々零でなくてはならぬ。最初、常數項から始め、順次に m を大にして、 $e^{im\beta}$ 、 $e^{-im\beta}$ の係数を夫々零に等しと置いて行けば、同一の m に對する 2 個づゝの方程式から、 A, B なる係數値が 2 個づゝ算出される。この手續を繰返せば、(5) の級數はすべて決定する。それを更に (2) と (3) へ代入すれば、任意の點の應力が計算出来るわけである。よつて問題は完全に解けることになる。

以上は數理的には確かに可能である。しかしこれを工學的解法として見るときは未だ充分とはいへない。即ち如何なる深さの穴に對しても、級數 (5) が收斂するかどうかは、尙不明である。假りに發散しないとしても、(5) の形は實用には決して便利でない。

III. 地上に荷重存する場合の一般的解法 (乙)

F を Airy の應力函數とすれば、

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 \nabla^2 F = 0, \\
& \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}
\end{aligned}$$

これを、(1) に定義される曲坐標 α, β へ變換すれば、

$$\left. \begin{aligned}
& \left[\frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} - 2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right] (Fh) = 0, \\
& \widehat{\alpha} \alpha = \frac{1}{a} \left[(\text{Cosh } \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \text{Sinh } \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \text{Cosh } \alpha \right] (Fh), \\
& \widehat{\beta} \beta = \frac{1}{a} \left[(\text{Cosh } \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \text{Sinh } \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \beta \frac{\partial}{\partial \beta} + \cos \beta \right] (Fh), \\
& \widehat{\alpha} \beta = -\frac{1}{a} (\text{Cosh } \alpha - \cos \beta) \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} (Fh)
\end{aligned} \right\} \dots (7)$$

F を單獨に使用すれば、(7) の第 1 式中へ α, β に關する 3 階の偏微分項を生じ、解に不便である。これを避けるために、 F と h の相乘積を代用した。いま

$$Fh = \{C_1 \text{Cosh } 2\alpha + C_2 \text{Sinh } 2\alpha + C_3\} \cos \beta + C_4 \alpha \{ \text{Cosh } \alpha - \cos \beta \}$$

と置き、これを (7) へ代入して、地表及坑周の条件を挿入すれば、

$$\begin{aligned} C_1 &= ap/2 \operatorname{Sinh}^2 \lambda, \\ C_2 &= -aq \operatorname{Coth} \lambda / 2 \operatorname{Sinh}^2 \lambda, \\ C_3 &= 2C_2, \\ C_4 &= -ap - C_1 \end{aligned}$$

を得。依つて次の応力式がある。但し $\gamma = p / \operatorname{Sinh}^3 \lambda$

$$\left. \begin{aligned} \widehat{\alpha\alpha} &= -p + \frac{1}{2} \gamma [\operatorname{Sinh}(\lambda - 2\alpha) - \operatorname{Sinh} \lambda + 2 \operatorname{Cosh}(\lambda - 2\alpha) \operatorname{Sinh} \alpha \cos \beta] \\ &\quad + a h \gamma \operatorname{Cosh} \lambda \operatorname{Sinh} \alpha, \\ \widehat{\beta\beta} &= -p + \frac{1}{2} \gamma [\operatorname{Sinh}(\lambda - 2\alpha) - \operatorname{Sinh} \lambda + 2 \operatorname{Cosh}(\lambda - 2\alpha) \operatorname{Sinh} \alpha \cos \beta] \\ &\quad - a h \gamma [\operatorname{Cosh} \lambda \operatorname{Sinh} \alpha - 2 \operatorname{Sinh}(\lambda - 2\alpha) \cos \beta], \\ \widehat{\alpha\beta} &= -a h \gamma [\operatorname{Cosh} \lambda - \operatorname{Cosh}(\lambda - 2\alpha)] \sin \beta. \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

この解法もあまり簡単ではない。しかし前のものよりは、若干取扱ひに便である。

IV. 地表應力の吟味

≒ 圓形の虚軸の方向の坐標

$$y = a \operatorname{Sinh} \alpha / (\operatorname{Cosh} \alpha - \cos \beta)$$

に於て、 $\alpha = \lambda$ 、 $\beta = \pi$ と置けば、穴が y 軸と交る 2 點のうち地表に近いものゝ坐標を得る。これ所謂土被りの厚さを示すものであつて b と置く。次に $\alpha = \lambda$ 、 $\beta = 0$ と置けば、地表に遠く穴が y 軸と交る點の坐標が出る。これと b との差は穴の直径 D に等しい筈である。いま b と D の比を 被覆深度と命名し、 k にて表はす。然るときは

$$\left. \begin{aligned} b &= a \operatorname{Tanh} \frac{1}{2} \lambda, \quad D = 2a / \operatorname{Sinh} \lambda, \\ k &= b : D = \operatorname{Sinh}^2 \frac{1}{2} \lambda \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

を得。穴の大きさと地表からの深さを指定すれば、(9) から應力解析に必要な常數 λ と a が判る。また原點から穴へ引いた切線が長さ a に等しいことは次のやうにして證明される。

$$\begin{aligned} (b + D/2)^2 - (D/2)^2 &= b^2 + bD \\ &= a^2 \operatorname{Tanh}^2 \frac{1}{2} \lambda + 2a^2 \operatorname{Tanh} \frac{1}{2} \lambda / \operatorname{Sinh} \lambda = a^2. \end{aligned}$$

例へば直徑 7m の圓形トンネルが、地表から 5m のところに中心を有するとすれば、被覆は

$$b = 5 - \frac{1}{2} \times 7 = 1.5m$$

被覆深度は

$$k = 1.5m : 7m = 0.2143$$

従つて (9) の第 3 式から

$$\lambda = 2 \operatorname{Sinh}^{-1} \sqrt{0.2143} = 2 \times 0.448 = 0.896$$

依つて

$$a = \frac{1}{2} D \operatorname{Sinh} \lambda = 0.5 \times 7.0 \times 1.0208 = 3.57m$$

このことは

$$a = \sqrt{5^2 - 3.5^2} = 3.57m$$

と一致す。

さて應力式 (8) に $\alpha = 0$ と置けば地表の應力が出る。 $\widehat{\alpha\alpha} = -p$, $\widehat{\alpha\beta} = 0$ なることは最初の指定通りであつて、地表に平行な應力は

$$\sigma_1 = [\beta\beta]_{\alpha=0} = 2p \cos \beta (1 - \cos \beta) / \operatorname{Sinh}^2 \lambda - p.$$

然るに地表 $\alpha = 0$ に於ては (1) から

$$x = a \sin \beta / (1 - \cos \beta).$$

依つて

$$\cos \beta (1 - \cos \beta) = 2a^2(x^2 - a^2) / (x^2 + a^2)^2,$$

また

$$4a^2 / \operatorname{Sinh}^2 \lambda = D^2,$$

$$a^2 / D^2 = \frac{1}{4} \operatorname{Sinh}^2 \lambda = k^2 + k$$

であつて、更に $\xi = x : D$ と置けば、

$$\sigma_1 = -p \left\{ 1 - \frac{(\xi^2 - k^2 - k)}{(\xi^2 + k^2 + k)^2} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

を得。ξ は、地表に沿ふた原點からの距離を、穴の直徑の倍數として表はしたものである。(10) は y 軸に對して對稱であつて、現象の性質と一致する。σ₁ を ξ に對して微分して、その極大、極小を求めると次のことがわかる。σ₁ が最大の値をとるのは原點即ち穴の直上であつて、

$$\sigma_1 = -p \{ 1 + (k^2 + k)^{-1} \}.$$

これより離れると、

$$\xi_0 = \pm \sqrt{(k^2 + k)} \text{ に於て } \sigma_1 = -p,$$

こゝで應力は外力に等しい値を切る。これより更に遠ざかると、 σ_1 は $-p$ よりも減つて

$$\xi = \pm \sqrt{(3k^2 + 3k)}$$

に於て

$$\sigma_1 = -p \left\{ 1 - \frac{1}{8} (k^2 + k)^{-1} \right\}$$

なる極小値に達する。これより遠き點に於ては、緩慢に増大し無限遠方に至つて $\sigma_1 = -p$ にかへる。種々の被覆深度に對して、 σ_1/p の變化を (10) より計算すれば第一表が得られる。これを圖示すれば第四圖になる。便宜上、應壓力のときを正にとつてある。

第一表

k	最大値	最小値	$x=D$ の應力	$x=2D$ の應力	ξ_0 の値
0.05	20.05	-1.38	0.14	0.76	0.23
0.10	10.09	-0.14	0.28	0.77	0.33
0.1124	9.00	0.00	0.31	0.77	0.35
0.25	4.20	0.60	0.60	0.80	0.56
0.50	2.30	0.83	0.92	0.86	0.87
1.00	1.50	0.94	1.11	0.94	1.41
2.00	1.17	0.98	1.10	1.02	2.45
5.00	1.03	0.99	1.03	1.02	5.48

(a) こゝに得た解法に従ふならば、被覆の少ない場合には、非常に大きな應壓力が穴の直上へ發生し、それから僅か離れた部分へ應張力の發生することがある。應張力の生ずる場合と生じない場合との境界は、(10) の右邊を零と置いた方程式が、實數の等根を有する場合の k によつて與へられる。これを計算するに、判別式

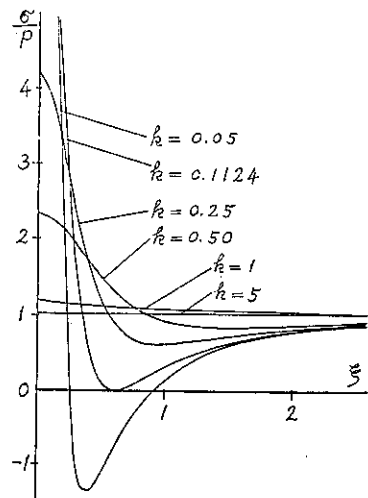
$$(2k^2 + 2k - 1)^2 - 4(k^2 + k)^2 - 4(k^2 + k) = 0$$

から

$$k_1 = 0.11237$$

を得。これを應張力による限界深度とす。材料に應張力の生ずることは、實坑道に於ては感心すべきものでないから、坑道築造に際し土被りの厚さは最低を直徑の 12% 位に制限すべきことが判る。やむを得ずしてこれより薄くせねばならぬやうな場合には充分の抗張性を有するやうな構造にせねばならぬ。

第四圖



(b) また一方に於て、被覆の厚さは最大應力からも制限をうける。材料の許容應力圧力が σ_a であるならば原點に於て最大應力が

$$\sigma_a = p \{1 + (k^2 + k)^{-1}\}$$

を越へてはならないから、最小の被覆深度として

$$k_2 = \frac{1}{2} \left\{ -1 + \sqrt{1 + 4/(m-1)} \right\}, \quad m = \sigma_a/p$$

なる關係を得、この k_2 を許容應力による限界深度と命名す。實坑道に於ては、更に質量力の影響が加はるから上に得た値よりも尙厚くしておく必要のあることと思はれる。

(c) 地表の遠方では、前に記した如く應力が $-p$ に等しい。また穴を深くして被覆深度が 5 以上になれば、原點に於ても應力が略 $-p$ に等しい。よつてこの解法より推定すれば被覆が直径の 5 倍以上ある如き場合には、最早地表に於ける應力の不整を懸念する必要がない。この場合實坑道の地表應力が正しく $-p$ なるべきや否やは、實驗的研究に待たねば解らないし、ポアソン比を考へない今の解法とは、恐らく若干の相違あらうと思はれるけれども、「穴が深ければ、穴のための應力攪亂が、地表に現はれない」といふ定性的結論には變りないものと考へられる。

(d) $\xi_0 = \pm \sqrt{(k^2 + k)}$ より遠方の部分に於ては、前示の如く應力は $-p$ より小さい。よつて、穴が非常に深いき地表應力が $-p$ になるべきことを假りに解法通り是認するならば、土 ξ_0 の外方に於ては、穴の上昇が却つて安全さを増大する結果になる。こゝに ξ_0 を安全限界と命名する。第一表に見る如く、 k が 0.5 を越えるあたりまでは ξ_0 は 1 より小さい。また k が 5 以上になれば、地表應力を考へる必要はなくなるし、その中間に於て $\xi = 1$ に最大應力を與へる深度を (10) より求めると、

$$k = 1.30 \quad \text{のとき} \quad \sigma_1 = -1.125 p$$

で $-p$ との差約 12% である。 k がこれより増しても減つても應力は小さくなる。これらを綜合すれば、地表に近い實坑道に於ても、穴の直上から左右各坑徑に等しい距離の範圍内を吟味すれば足り、それ以外の部分に非常な危険を生ずるといふ如きことは、あり得ないものと推定される。

V. 坑周に生ずる應力の吟味

應力式 (8) へ $\alpha = \lambda$ と置けば坑周の値を得。そのうち $\widehat{\alpha\alpha} = 0$ 、 $\widehat{\alpha\beta} = 0$ なることは指定せし通りである、しかしして周に沿ふては

$$\sigma_2 = [\widehat{\beta\beta}]_{\alpha=\lambda} = -2p(1 + \sin^2\beta / \text{Sinh}^2\lambda)$$

を生ず。然るに周では

$$x = a \sin \beta / (\text{Cosh } \lambda - \cos \beta), \quad y = a \text{ Sinh } \lambda / (\text{Cosh } \lambda - \cos \beta),$$

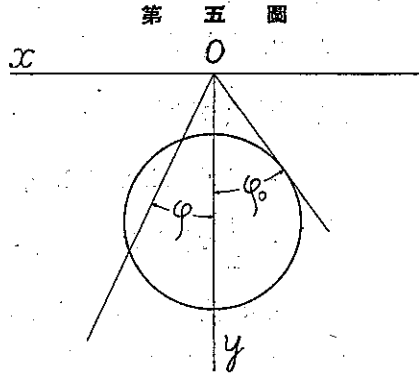
よつて

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin \beta}{\text{Sinh } \lambda}$$

この比をいま $\tan \varphi$ とおけば、 φ は原点と周點とを結ぶ直線が y 軸の正方向となす角に外ならない。よつて

$$\sigma_2 = -2p \sec^2 \varphi \dots \dots \dots (11)$$

これまた y 軸に對して對稱である。 φ はこの軸の左右、穴の切線の位置まで移動し得。



第五圖

(a) 上式を一見して知られる如く、 σ_2 の最小値は

$$\varphi = 0 \text{ に於て } \sigma_2 = -2p$$

これ穴の最上部及最下部に當る。

(b) 原点より穴へ引いた直線は、周と2點に交る。該2點の應力は、(11)式によれば、常に相等しい。

(c) 割線が切線の位置に至つて φ は最大値をとる、これを φ_0 とすれば

$$\sec \varphi_0 = (b + D/2) / a$$

従つて坑周に生ずる應力の最大値は

$$\sigma = -\frac{(1 + 2k)^2 p}{2k(1 + k)}$$

である。種々の k に對して、この最大値を計算すれば第二表がある、但し $p=1$ にとる。

第二表

$k \%$	5.00	10.00	11.24	25.00	50.00	100.00	200.00	300.00	500.00
最大値	11.52	6.55	6.00	3.60	2.67	2.25	2.08	2.04	2.02

應張力による限界深度に於ては、坑周よりも地表に大なる應力を生ずる。被覆が直径の5倍以上になれば、坑周の應力が、略 $2p$ なる一定値になる。即ち穴が深いときは、應力が亂れない。

(d) 許容應壓力 σ_a を指定せし場合に於ては、それによる限界深度として

$$k_3 = -1 + \sqrt{1 + 2/(m-2)}, \quad m = \sigma_a : p$$

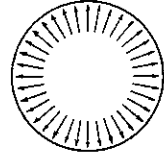
を得。さきに地表にて得た k_2 と比較し、その大なる方を採用せねばならぬ。

VI. 坑内に壓力加はる場合の解法

第 六 圖

坑内に壓力 q が作用し、地表に荷重がない場合には周界の條件は

$$\begin{aligned} \alpha=0: & \quad \widehat{\alpha\alpha}=0, \quad \widehat{\alpha\beta}=0 \\ \alpha=\lambda: & \quad \widehat{\alpha\alpha}=-q, \quad \widehat{\alpha\beta}=0 \end{aligned}$$



である。これに對して III と同様の方法により應力を解けば、 $\gamma'=q/\text{Sinh}^3\lambda$ として

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha\alpha} &= -\frac{1}{2}\gamma'[\text{Sinh}(\lambda-2\alpha)-\text{Sinh}\lambda+2\text{Cosh}(\lambda-2\alpha)\text{Sinh}\alpha\cos\beta] \\ &\quad -ah\gamma'\text{Cosh}\lambda\text{Sinh}\alpha, \\ \widehat{\beta\beta} &= -\frac{1}{2}\gamma'[\text{Sinh}(\lambda-2\alpha)-\text{Sinh}\lambda+2\text{Cosh}(\lambda-2\alpha)\text{Sinh}\alpha\cos\beta] \\ &\quad +ah\gamma'[\text{Cosh}\lambda\text{Sinh}\alpha-2\text{Sinh}(\lambda-2\alpha)\cos\beta], \\ \widehat{\alpha\beta} &= ah\gamma'[\text{Cosh}\lambda-\text{Cosh}(\lambda-2\alpha)]\sin\beta. \end{aligned}$$

故に地表に於ては

$$\sigma_3=[\beta\beta]_{\alpha=0}=-2q\cos\beta(1-\cos\beta)/\text{Sinh}^3\lambda.$$

坑周に於ては

$$\sigma_4=[\beta\beta]_{\alpha=\lambda}=-q+2q(\text{Cosh}^2\lambda-\cos^2\beta)/\text{Sinh}^3\lambda$$

いま被覆深度を k 、坑徑の倍數として表はした地表距離を ξ 、原點から穴へ引いた割線が y 軸となす角を φ とすれば、上式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_3 &= -q(\xi^2-k^2-k)(\xi^2+k^2+k)^{-2}, \\ \sigma_4 &= q(1+2\tan^2\varphi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

となる。この地表應力の模様は第四圖の ξ 軸を 1 だけ (一般には p だけ) 上方へ平行移動した場合の線圖によつて表はされる。但し應力の性質は前者に反す。而して原點 (穴の直上) の最大應張力は $q/(k^2+k)$ 、先きに安全限界と名づけた ξ_0 に於て應力は零になる。それより遠方に於ては應壓力に變り、 $\xi=\pm\sqrt{(3k^2+3k)}$ に於て最大應壓力 $-\frac{1}{8}q/(k^2+k)$ に達す、絶對値に於て原點應力の $1/8$ である。これより遠方に至れば、應力は零に漸近す。

次に坑周の應力については、地上荷重の場合と同様に、原點から引いた割線が穴を切る 2

點に於て値が等しい。穴の最上部及最下部には、最小なる應張力を生じ、その値は外壓 q に等しい。また φ の最大になるべき切線位置に於ては、次の應張力を生ずる。

$$\sigma_4 = \frac{(2k^2 + 2k + 1)q}{2k(1+k)}$$

穴が深部にある場合には、地表の應力は零へ、坑周の應力は應張力 q へ近迫す。

VII. 地上及坑内に荷重ある場合の解法

地上に p 、坑内に q なる壓力存するとき地表の應力は

$$\sigma = -p + (p - q)(\xi^2 - k^2 - k)(\xi^2 + k^2 + k)^{-2}$$

穴の直上に最大値を生じ

$$\sigma = -\{p + (p - q)(k^2 + k)^{-1}\}$$

次に坑周に於ては

$$\sigma' = -\{(2p - q) + 2(p - q)\tan^2\varphi\}$$

この値は切點に於て最大になり、

$$\sigma' = -\left\{(2p - q) + \frac{p - q}{2k(1+k)}\right\}$$

q はすべて、 p の作用を軽減する傾向をもつ。

VIII. 本解法の應用

1. 水底トンネル

地質が岩盤なる水底へ、トンネルを掘る場合、上部から加はる水壓の影響如何といふ問題に對して本解法を適用することが出来る。蓋し裸掘をして卷立を行ふまでの期間中は、その状態が本篇の前提に略合致する。よつて次の如き問に答へることが出来る。

a. 水壓は、トンネル周圍へ、何程の應力を與へるか。

b. 安全を期するためには、水底より大凡何程の下方へトンネルを掘るべきか。

固より、質量力を考へない如上の理論のみを以て、萬全とするわけには行かない。しかしこれによつて、計算にかゝらないと考へられた問題へ一面の標準を與へることが出来る。元來水底トンネルは上方にあるほど、出來上りて後の列車運轉に經濟的なわけであるし、シールド法を適用し Cast iron segments を以て卷立する如き場合には完成後の安全さは確實であり得るから工事に支障なき範圍で、なるべく上方へ建設するやうになすべきであらうと思はれる。それに対して、本篇は個人判斷を若干助けることにならうかと考へられる。(計算例参照)

壓搾空気を適用したシールド法によつてトンネルを作る場合には、空気壓は、VI に述べた外力 q の作用をする。故に壓搾空気の適用は浸水による工事の困難を除去すると共に、水壓に基づく落盤の危険を軽減し、積極的に岩質へ強度を附與す。この點に於てシールド法の利益は偉大である。

田邊工學博士の高著「とんねる」p. 106 の冒頭には次の文章が記載されてある。

「トンネル工事中の空気壓は、普通は其の場所の静水壓の 8 割以内であるが、稀には同様にする必要があり、静水壓と空気壓と同様になると、地質が柔泥土でも固結して來て掘鑿が出来る。」

壓搾空気に「地質を固結する」といふ物理的及化學的性質ありや否やは、その方面に全く經驗をもたない著者には判らないことであるが本篇の理論より推定すれば、空気壓が静水壓に等しくなつたときは、水壓が大部分打消され、被覆の少い陸上トンネルを掘る場合と相似の状態を生ずるのであるから、著しく掘鑿が容易になるべきこと明である。水の噴出しないうりにしたことが、同時にまた土覆にかゝる壓力を軽減する結果になつてゐる。

本篇の理論をトンネルへ適用するについては、いふまでもなく緒言に斷つてある假定の範圍に於てである。假定そのものが不都合であると斷定せらるゝやうな場合に於ては、問題は自ら別である。これは次の項についても同様である。また實際施工するものについては、單に強度の上のみから問題を片付けることの出来ないことは勿論である。

2. 陸上トンネル

圓形トンネルが大建築物の下方を貫く場合には、建築物の重量は本篇の荷重 p の作用をする。従つてトンネルの深さ、掘鑿中の危険性等について外力との關係を推定することが出来る。

水力發電所に於てタービンから出る水を圓形水路で放流し、該水路の周圍をコンクリートにて固めてある場合には、床上に來る荷重の影響は、本篇の方法で推定されやうかと思はれる。

3. 水邊に設くる井戸

深い貯水池の岸に弁井その他の井戸を作つた場合を考へるならば、池の水壓は井戸へは外力として作用する。しかもこの場合横の方向には質量力が作用しないから、各水平斷面に於て、本篇の前提がその儘適用されて第一圖の有様になる。故に井戸の壁體に於ける應力が計算され得ることになる。

その他これに類するやうな例は、尙あり得ることかと思はれる。

IX. 計算例

例 1. 直径 6.5 m の水底トンネルを掘るものとし、その中心を、水深 40 m の海底から更に 4 m の下方へ置くならば、水圧の與へる最大應力如何。

解。直径 $D=6.5$ m であるから

$$\text{被覆の厚さ} \quad b=4.00-\frac{1}{2}\times 6.50=0.75 \text{ m}$$

$$\text{被覆深度} \quad k=b:D=0.75\div 6.50=0.1154$$

然るに

$$k=\text{Sinh}^2\frac{1}{2}\lambda=\frac{1}{2}(\text{Cosh}\lambda-1)$$

から

$$\text{Cosh}\lambda=2k+1=1.2308$$

故に坑周を示す α 坐標は

$$\lambda=\text{Cosh}^{-1}1.2308=0.667$$

穴の直上から穴へ引いた切線の長さは

$$a=\frac{1}{2}D\text{Sinh}\lambda=3.25\times 0.7176=2.33 \text{ m}$$

荷重は

$$p=40 \text{ t/m}^2=4 \text{ kg/cm}^2$$

穴の眞上に生ずる地表に平行な最大應力は

$$\sigma_1=-p\{1+(k^2+k)^{-1}\}=-4\{1+7.7700\}=-35.08 \text{ kg/cm}^2$$

坑周に生ずる最大應力は

$$\sigma_2=-\frac{(1+2k)^2p}{2k(1+k)}=-\frac{1.5149\times 4}{2\times 0.1287}=-23.54 \text{ kg/cm}^2$$

例 2. 前例のトンネルに於て、地表及坑周應力の變化を吟味せよ。

解。地表に於ては

$$\widehat{\alpha\alpha}=-4 \text{ kg/cm}^2, \quad \widehat{\alpha\beta}=0,$$

$$\begin{aligned} \widehat{\beta\beta}=\sigma_1 &= -p\left\{1-\frac{(\xi^2-k^2-k)}{(\xi^2+k^2+k)^2}\right\} \\ &= -4\left\{1-\frac{\xi^2-0.1287}{(\xi^2+0.1287)^2}\right\} \text{ kg/cm}^2 \end{aligned}$$

これが原点（穴の直上）で前例の値をとり，遠ざかると急激に變化し

$$\xi = \pm\sqrt{0.1285} \quad \text{従て} \quad x = \xi D = \pm 2.33 \text{ m}$$

に於て $\sigma_1 = -4 \text{ kg/cm}^2$ になる。これは先に安全限界と名づけた點であつて，應力が水壓に等しい。これを越えると更に減少し

$$\xi = \pm\sqrt{3 \times 0.1285} \quad \text{或は} \quad x = \xi D = \pm 4.04 \text{ m}$$

に至り最小値

$$\sigma_1 = -4 \left\{ 1 - \frac{1}{8} \times 7.7700 \right\} = -0.1152 \text{ kg/cm}^2$$

になる。故に原点から左右僅かに 2m づゝ位の範圍が應力増大するにすぎない，それ以外に於てはトンネルは地表を却て安全にしてゐる。次にトンネルの周では

$$\sigma_2 = -2p \sec^2 \varphi = -8 \sec^2 \varphi \text{ kg/cm}^2$$

φ , 度	0.00	5.00	10.00	20.00	30.00	40.00	45.00	54.6 (切點)
σ_2 , kg/cm^2	8	8.06	8.26	9.06	10.67	13.71	16.00	23.54

トンネルの最高部及最低部で，水壓の 2 倍になり，肩のところ（切點）で約 6 倍になり，肩に近いほど急激に増大する。また肩から上と下とを比較すれば， φ の同じ變化に對する圓弧の長さが違ふから，下部の方が應力變化緩慢である。

例 3. 前のトンネルに於て，次の諸點の應力を求む。

A ($x=0, y=0.375 \text{ m}$) 地表と坑との中間の點

B ($x=0, y=8 \text{ m}$) 坑心より更に坑心の深さだけ下方の點

C ($x=4.25 \text{ m}, y=4 \text{ m}$) 坑心の側方にて周より 1m 離れた點

解。A 點。 $\beta = \pi$, $y = a \text{ Sinh } \alpha / (\text{Cosh } \alpha - \cos \beta)$ から

$$\frac{\text{Sinh } \alpha}{\text{Cosh } \alpha + 1} = \frac{y}{a} = \frac{0.375}{2.33}$$

$$\text{従て} \quad \text{Tanh } \frac{1}{2} \alpha = 0.161, \quad \frac{1}{2} \alpha = 0.1624,$$

$$\alpha = 0.325$$

前例から

$$\lambda = 0.667$$

これらの α, β, λ を (8) へ代入すれば

$$\hat{\alpha} \alpha = -0.23 \text{ kg/cm}^2 \quad (y \text{ 方向}),$$

$$\hat{\beta} \beta = -19.08 \text{ kg/cm}^2 \quad (x \text{ 方向}),$$

$$\widehat{\alpha\beta} = 0$$

B 點。この位置の曲坐標 $\beta = 0$, また

$$\frac{\text{Sinh } \alpha}{\text{Cosh } \alpha - 1} = \frac{y}{a} = \frac{8}{2.33}$$

$$\text{Tanh } \frac{1}{2} \alpha = 0.2912, \quad \frac{1}{2} \alpha = 0.300$$

$$\alpha = 0.600$$

これらと前の λ とを用ひて (8) から

$$\widehat{\alpha\alpha} = -1.44 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\widehat{\beta\beta} = -6.83 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\widehat{\alpha\beta} = 0.$$

C 點。この場合には

$$\frac{\sin \beta}{\text{Cosh } \alpha - \cos \beta} = \frac{x}{a} = \frac{4.25}{2.33}$$

$$\frac{\text{Sinh } \beta}{\text{Cosh } \alpha - \cos \beta} = \frac{y}{a} = \frac{4}{2.33}$$

第 1 式を第 2 式で邊々除すれば

$$\sin \beta = 1.0625 \text{ Sinh } \alpha$$

また兩式を 2 乗して邊々加へれば

$$\text{Cosh } \alpha + \cos \beta = 6.2743(\text{Cosh } \alpha - \cos \beta)$$

従て

$$\cos \beta = 0.7251 \text{ Cosh } \alpha$$

を得。これらより β を消去すれば

$$\text{Cosh } 2\alpha = 1.5732, \quad \alpha = 0.513$$

よつて更に

$$\sin \beta = 0.5693, \quad \cos \beta = 0.8221$$

を得。これらを (8) へ代入すれば

$$\widehat{\alpha\alpha} = -1.57 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\widehat{\beta\beta} = -8.07 \text{ kg/cm}^2,$$

$$\widehat{\alpha\beta} = -0.32 \text{ kg/cm}^2.$$

この點の主要應力を計算すると、ともに應壓力で大なる方が 8.09 kg/cm^2 、小なる方が 1.55 kg/cm^2 になる。

例 4. 水深 40 m の海底へ、直徑 6.5 m のトンネルを掘る。海底地質は砂岩であつて、破壊強度は、 200 kg/cm^2 を算す。水壓のために生ずる掘鑿中の最大應力が、砂岩強度の 5% を越えないためには、トンネルを如何なる位置に掘るべきか。また強度を 10% まで許す場合は如何。

$$\begin{aligned} \text{解。外力は} & \quad p = 4 \text{ kg/cm}^2 \\ \text{許容應力は} & \quad \sigma_a = 200 \times 0.05 = 10 \text{ kg/cm}^2 \\ & \quad m = \sigma_a : p = 2.5 \end{aligned}$$

よつて許し得る最小の被覆深度を地表應力から計算すると IV の (b) より、

$$k_2 = \frac{1}{2} \{-1 + \sqrt{1 + 4/1.5}\} = 0.452$$

また坑周の應力から計算すると V の (d) より

$$k_3 = -1 + \sqrt{1 + 2/0.5} = 1.236$$

故にこの場合には、坑周の應力からトンネルの深さが支配される。とるべき最小の土覆は

$$k_3 D = 6.5 \times 1.236 = 8.03 \text{ m}$$

海底からトンネル中心までの (許し得る最小の) 深さは

$$d = k_2 D + D/2 = 8.03 + 3.25 = 11.28 \text{ m}$$

次に安全率 10 の場合に於ては

$$\sigma_a = 20 \text{ kg/cm}^2, \quad m = 5$$

これによつて前と同様に計算すれば

$$k_2 = 0.202, \quad k_3 = 0.291$$

このときも坑周應力から制限される。最小の土覆及それに対する坑心の深さは

$$k_3 D = 1.89 \text{ m}, \quad d = 5.14 \text{ m}$$

となる。

例 5. 水深 40 m の海底へ直徑 6.5 m のトンネルを、シールド法によつて作らんとす。トンネル上部の土覆を 1 m にとり、壓搾空氣の壓力を $40 \text{ #/sq}''$ まで上げる。地質を弾性體と假定して、外力による最大應力を計算せよ。

解。この場合には

$$\begin{aligned} p &= 4 \text{ kg/cm}^2, \quad q = 40 \text{ #/sq}'' = 2.8 \text{ kg/cm}^2 \\ p - q &= 1.2 \text{ kg/cm}^2, \quad b = 1 \text{ m}, \quad D = 6.5 \text{ m} \end{aligned}$$

$$k=0.1538 \quad (k^2+k)^{-1}=5.634$$

よつて地表の最大應力は、VII から

$$\sigma = -\{p + 5.634(p-q)\} = -10.76 \text{ kg/cm}^2$$

また坑周の最大應力は

$$\sigma' = -\left\{2p - q + \frac{1}{2} \times 5.634(p-q)\right\} = -8.58 \text{ kg/cm}^2$$

これから見ると地表の方が應力大である。念のため壓搾空気をぬいた場合の應力を計算すると

$$\sigma = -26.14 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma' = -19.27 \text{ kg/cm}^2$$

故に壓搾空気は、應力を半分以下に軽減し、相對的には地質を非常に強くして呉れることがわかる。

尙以上の例題に於て、水深とトンネル徑とを常に同一に與へたのは、トンネル深度の變化による種々の場合を、比較し易くしたいと考へた結果である。又上例は必ずしも施工可能を主張する寸法ではない。

例 6. 貯水池の岸壁（簡單のため垂直と假定す）中へ井戸を作る。壁はコンクリートとし、井戸は直徑 2.4 m を有す。コンクリート中へ應張力を生じないためには岸壁面から井戸をなにほど離すべきか。

解。井戸の中を空とすれば、應張力による限界深度は

$$k_1 = 0.1124$$

であるから

$$b = k_1 D = 2.4 \times 0.1124 = 0.247 \text{ m}$$

池に面した壁の最も薄い所を 25 cm 以上にして置けば、水深の如何に拘らず應張力を生じない。

例 7. 前例の如き井戸が直徑 2.4 m を有し中心が岸壁面から 1.5 m のところにある。コンクリートの許容應壓力を 30 kg/cm^2 とし、應力がこれを越えないためには水深なにほどまでが許されるか。

解。 $b = 1.5 - 1.2 = 0.3$

$$k = 0.3 / 2.4 = 0.125, \quad (k^2 + k)^{-1} = 7.092$$

$$\sigma_a = 30 \text{ kg/cm}^2$$

水深 h m なる所の水壓は $p = 0.1 h \text{ kg/cm}^2$

これらを

$$\sigma_a = p \{1 + (k^2 + k)^{-1}\}$$

へ代入すれば、應力が σ_a に達するときの水深 h を得。

$$h = 37.1 \text{ m}$$

X. 結 言

本篇は、もと、直線線にかかる壓力が、その内部の圓形孔へ如何なる影響を與ふるかといふ問題に發足したものである。解法の一部は、G. B. Jeffery に負ふてゐる。それをして自然現象をはなれた數理抽象解に終らしめないために、トンネルへの應用を志した。そこに多少とも工學的の生命を持し得るものでありたいと希ふものである。

田邊工學博士は、「とんねる」p. 105 に述べられてゐる。「この方法の水底トンネルでも、水底から鐵管までの深さ即ち土覆は、稀には 3m のものもあるが、普通は 6m 以上である。勿論トンネルの形が大きいときは、土覆も深くする。」

そこには、トンネルの大きさと土覆との關係が、經驗の袋へ納められてある。これに穴をあけて計算の光を送るべき仕事を本篇は企及したのである。しかしあけられた穴には尙「卷立がなく」、また眞に「圓い」かどうかはわからない。大方の御研究が、更にこれを完成し下さるならば、光榮である。もしそれ、トンネル解法としての本篇がたゞ假定に對して、別に御意見をもたると方々があるならば、それによつて展開すべきところの解法を、如實に提示して御叱正と御示教を賜はらんことを熱望す。

本篇の數理的結果が、實構造物へ如眞にあてはまるや否やについては、一切の提言をこゝに差控へたいと思ふてゐる。著者はいま、この現象を光彈性試験によつてテストすべき準備を進めつゝある。そしてその結果を得て後、理論の當否に觸れる言葉を述べたい意企をもつてゐる。

(1929 年 5 月)