

## 講 演

土木學會誌、第十三卷第六號 昭和二年十二月

## 二軸的に見たる熱應力の問題

(昭和二年十一月四日工學會大會土木部會講演會に於て)

會員 工學士 山 口 昇

On Thermal Stresses in Two Dimensions.

By Noboru Yamaguti, C. E., Member.

## 内 容 梗 概

二軸的に見たる應力の問題の解決が應力函数 (Stress Function) の導入によつて容易になるといふことは熱に誘因する應力の場合に於ても同様である。通常の應力に於ける Airy の函数に類似の應力函数が此の場合にも成立する事は Dr. Nádai が既に求めてゐる。著者は此の應力函数を用ひて円板 (Circular Disk), 輪狀板 (Ring) 又は帶狀板 (Strip), 矩形板 (Rectangular Plate) 等に於て様々なる温度分布によつて起る熱應力を計算した。

## Synopsis

As problems of common plane stresses, those of thermo-elasticity in 2-dimensions are solved more easily by the use of Stress-Function than by displacement equations. In this paper, some boundary problems of thermal stresses in rectangular and polar coordinates are solved by means of Stress-Function.

The cases considered are:

1. Plate with circular boundaries with radial temperature distribution.
2. Plate with circular boundaries with angular temperature distribution.
3. Plate with circular boundaries with general temperature distribution.
4. Infinitely extended strips with linear flow of heat.
5. Rectangular plate with linear or non-linear flow of heat.

目 次

第一章 基本式 ..... 2  
 第一 應力函數式 ..... 2  
 第二 變位方程式 ..... 3  
 第二章 極座標( $r, \varphi$ )による問題 ..... 5  
 第一 溫度分布が  $r$  のみの函數の場合 ..... 5  
 第二 溫度分布が  $\varphi$  のみの函數の場合 ..... 7  
 第三 溫度分布が  $r$  及  $\varphi$  の函數の場合 ..... 15  
 第四 溫度分布及應力函數が Bessel 函數にて與へらるゝ場合 ..... 20  
 第三章 直角座標( $y, z$ )による問題 ..... 26  
 第一 無限に長い細長き板 ..... 26  
 第二 長方形の板 ..... 28  
 第四章 數計算例 ..... 32

第一章 基本式

第一 應力函數式

薄き板に於ける應力又は無限に厚き柱狀體の裁斷面に於ける應力は前者は所謂 generalized plane stress として後者は plane strain として何れも二軸的に取扱ひ得。<sup>(\*)</sup> 斯くの如き場合に於ける應力に關しては通常 Airy's Function の導入によつて問題を單純化することが出来る。二軸的に見たる熱應力に關しても Airy's Function と類似の基本式が成立することは Dr. Nádai によつて示されてゐる。Nádai は熱變位の total strains の間に identical relation (俗に云ふ所の compatibility の條件) を入れて下の如き基本式を出してゐる。(Nádai; Elastische Platten, S. 264).

$$\nabla^2 \nabla^2 F = -\alpha E \nabla^2 t \dots \dots \dots (1)$$

但  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  [二軸を  $y, z$  とす]

$\alpha$ : 溫度による伸縮係數

$E$ : Young's Modulus.

$t$ : 溫度

$F$ : 熱應力函數

應力は Airy の通常的關係式で與へられる。 $\sigma_y, \sigma_z$  を各  $y, z$  軸に平行に働く垂直應力,  $\tau$  を

(\*) 此の兩者の差は單に係數の差異に歸せられる, 故にこゝでは専ら generalized plane stresses と考へたる計算を行ふ。

裁應力とすれば

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \dots \dots \dots (2)$$

極座標 (r, φ) に於ても (1) と同一基本式が存在する, 但

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

とすることは勿論である。σ<sub>r</sub>, σ<sub>t</sub> を各 radial 及 tangential の垂直應力, τ を裁應力とするとき

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) \dots \dots \dots (3)$$

故に吾々は邊縁條件に適充する様な基本式 (1) を充たす F を求むることが出来れば (2) 又は (3) によつて直ちに熱應力が求められる。

(1) 式で特に著しいことは Steady Flow of Heat では ∇<sup>2</sup>ε = 0 なる故この式は右邊を失つて通常の Airy 式と同形になる點である。

### 第二 變位方程式

静止の條件から通常の方法に従つて導出した變位方程式 (Displacement Equations) は y, z 座標に於ては下の如くなる,

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \eta + \frac{m+1}{m-1} \frac{\partial e}{\partial y} - 2 \frac{m+1}{m-1} \alpha \frac{\partial t}{\partial y} &= 0 \\ \nabla^2 \xi + \frac{m+1}{m-1} \frac{\partial e}{\partial z} - 2 \frac{m+1}{m-1} \alpha \frac{\partial t}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

但 η, ξ は各 y, z に平行なる total displacement

$$e = \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \quad \text{total cubical dilatation}$$

m : Poisson's number

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

同じく極座標に於ては

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2(\Delta r) - \frac{1}{r} \left( \frac{\Delta r}{r} - 2 \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \varphi} \right) + \frac{m+1}{m-1} \frac{\partial e}{\partial r} - 2 \frac{m+1}{m-1} \alpha \frac{\partial t}{\partial r} &= 0 \\ \nabla^2(r \Delta \varphi) + \frac{1}{r} \left( \frac{2}{r} \frac{\partial \Delta r}{\partial \varphi} - \Delta \varphi \right) + \frac{m+1}{m-1} \frac{\partial e}{r \partial \varphi} - 2 \frac{m+1}{m-1} \alpha \frac{\partial t}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

但  $\Delta r$  : total radial displacement

$\Delta \varphi$  : total angular displacement

$$e = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Delta \varphi) + \frac{\partial \Delta \varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

通常熱應力の問題を解くには斯くの如き變位式より出立するのが常であるが二軸的の熱應力の問題では(1)の如き應力函數式が成立する故に此れを解く方が直接應力を與へられる點便利である、著者は専ら此の方法によつて問題を解いたのである。(1)式は必ずしも Nádai の如く identical relation を使はぬでも(4)又は(5)の式から容易に導き出される。

上述の如く變位方程式は此處では直接用ひないが後出の multiply-connected region の問題の時に必要が起る故(4)式から一般形の儘で  $\eta$  及  $\xi$  を求めると下の如くなる。

(4)式を書き換へると

$$\left. \begin{aligned} \frac{2m}{m-1} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ e - \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \alpha t \right\} - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right\} &= 0 \\ \frac{2m}{m-1} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ e - \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \alpha t \right\} - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right\} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

此の式の第一項括弧内は應力のみによる Dilatation, 第二項の括弧内は total displacement の間の Rotation の2倍である。然るに温度の爲めに起る變位は Distorsional strains を起さぬ故これは通常の應力のみによる Rotation と同一と見做してよい、而してこの Dilatation と Rotation とは上式の示す通り互に Conjugate Harmonics をなしてゐることより通常の plane strain の場合の如く

$$\varphi + i\psi = \left[ \frac{2mG}{m-1} \left\{ e - \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \alpha t \right\} + i2G\omega \right] d(y + iz)$$

但  $\varphi, \psi$  は任意の Conjugate Function

$$\omega = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right\}, \quad G \text{ は Rigidity Modulus}$$

と置くことが出来る、後は Love ; Elasticity (3rd Ed., p. 203) にある様な通常の plane strain の場合の方法に従ひ且下の如き stress-strain の關係を考へに入れて

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{E} \left( \sigma_y - \frac{1}{m} \sigma_z \right) + \alpha t = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) + \alpha t \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} &= \frac{1}{E} \left( \sigma_z - \frac{1}{m} \sigma_y \right) + \alpha t = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{1}{m} \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) + \alpha t \end{aligned} \right\}$$

$$e = \frac{1-\frac{1}{m}}{E} (\sigma_y + \sigma_z) + 2\alpha t = \frac{1-\frac{1}{m}}{E} \nabla^2 F + 2\alpha t$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\tau}{G}$$

但  $G = \frac{mE}{2(1+m)}$

$\eta, \zeta$  の値を求めれば

$$\left. \begin{aligned} 2G\eta &= -\frac{\partial F}{\partial y} + \varphi \\ 2G\zeta &= -\frac{\partial F}{\partial z} + \psi \end{aligned} \right\}$$

此の式の  $\varphi, \psi$  は Conjugate Harmonics である故同一 Potential  $V$  から誘導されるものと考へてよい、

$$\therefore \left. \begin{aligned} 2G\eta &= -\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \\ 2G\zeta &= -\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

但  $V$  は下の関係を充たす任意函数

$$\nabla^2 V = 0, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{1}{1 + \frac{1}{m}} \nabla^2 F + 2G\alpha t$$

## 第二章 極座標 $(r, \varphi)$ による問題

### 第一 温度分布が $r$ のみの函数の場合

此の場合應力函数  $F$  も亦  $r$  のみの函数と假定すれば (換言すれば應力も亦座標原點に對して對稱的な分布を有するものと假定すれば)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} \right), \quad \nabla^2 \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[ r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{d}{dr} \right) \right\} \right]$$

夫れ故に基本式 (1) は次の如くなる

$$d \left[ r \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dF}{dr} \right) \right\} \right] = -k^2 d \left( r \frac{dt}{dr} \right) \dots \dots \dots (1)$$

但  $k^2 = \alpha E$

此の式の一般解は

$$F = -k^2 \int \frac{T}{r} dr + Ar^2 \log r + Br^2 + C \log r + D \dots\dots\dots (2)$$

但  $T = \int tr dr$

此の式で  $D$  は應力の決定には不必要,  $A$  は後に證する如く 0 なり。  $B$  及  $C$  は邊縁條件より決定する。例へば圓形板では  $r=0$  で  $\infty$  とならぬ爲めに  $C$  は不要,  $B$  は板縁での  $\sigma_r$  が外壓力に等しき理より決定せられる, 又輪形板では  $B, C$  は内外縁に於ける  $\sigma_r$  が内外壓力に等しき理より決定せられる。

**例：外壓力を受けざる輪形板**

此の場合應力を示す式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{dF}{dr} = -\frac{k^2}{r^2} T + 2A \log r + (A + 2B) + \frac{C}{r^2} \\ \sigma_t &= \frac{d^2 F}{dr^2} = -k^2 t + \frac{k^2}{r^2} T + 2A \log r + (3A + 2B) - \frac{C}{r^2} \\ r &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

基本式 (5) の上式より此の場合  $e = \frac{d\Delta r}{dr} + \frac{\Delta r}{r}$  なるにより

$$\frac{d^2(\Delta r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d(\Delta r)}{dr} - \frac{\Delta r}{r^2} - \frac{m+1}{m} \alpha \frac{dt}{dr} = 0$$

これに stress-strain の關係式

$$\frac{d\Delta r}{dr} = \frac{1}{E} \left( \sigma_r - \frac{\sigma_t}{m} \right) + \alpha t, \quad \frac{\Delta r}{r} = \frac{1}{E} \left( \sigma_t - \frac{\sigma_r}{m} \right) + \alpha t$$

を入れるときは

$$\left( \frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{1}{m} \frac{d\sigma_t}{dr} \right) + \left( 1 + \frac{1}{m} \right) \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_t) - \frac{k^2}{m} \frac{dt}{dr} = 0$$

この式に上記 (3) 式の  $\sigma_r, \sigma_t, r$  を入れるときは  $A=0$  を得。

次に  $r=r_1$  (内徑) 及  $r_2$  (外徑) に於て  $\sigma_r=0$  と置けば (3) より 2 個の獨立せる式を得, これより  $B, C$  を決定することを得。

即ち  $\sigma_r = k^2 \left\{ \frac{t_2' r_2^2 - t_1' r_1^2 - (t_2' - t_1') \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}}{r_2^2 - r_1^2} - t' \right\}$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_t &= k^2 \left\{ \frac{t_2' r_2^2 - t_1' r_1^2 + (t_2' - t_1') \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2}}{r_2^2 - r_1^2} + t' - t \right\} \dots\dots\dots (4) \\ \tau &= 0 \\ \text{但} \quad t_1' &= \left. \frac{T'}{r^2} \right]_{r=r_1}, \quad t_2' = \left. \frac{T'}{r^2} \right]_{r=r_2} \end{aligned} \right\}$$

此れは R. Lorenz が圓形管（無限長の）として求めたものと全く同一の結果である（對比の便の爲めに特に同一符號に用ひた）。此の場合 generalized plane stress と考へたものと plane strain と考へたものとは係數的にも一致してゐる。Lorenz はこれを解くのに圓形管としての變位式から出立してゐる（H. Lorenz; Technische Elastizitätslehre, S. 589），此の結果の著しい點は Steady Flow of Heat 即  $\nabla^2 t = 0$  の場合に於ても熱の爲めに起る應力は一般には 0 にはならない事である。試みに管の内外の温度を  $t_1, t_2$  とするとき熱流が定流的なるときの温度の分布は Carslaw; Heat conduction, p. 114. にある通り

$$t = \frac{1}{\log \frac{r_2}{r_1}} \left\{ (t_2 - t_1) \log r + t_1 \log r_2 - t_2 \log r_1 \right\}$$

となるがこれを (4) に入れても  $\sigma_r, \sigma_t$  は一般に 0 とはならない，この事は基本式 (1) に立歸つて考へて見るとこの式でたとへ  $\nabla^2 t = 0$  となり右邊を失つても尙  $F$  の内に陰然  $t$  の項が含まれてゐる爲めこれは外形丈は Airy's Function と同形であるが内容は熱應力のときにはやゝ異つてゐると見るべきであらう（但後出の如く Linear Flow of Heat で Steady State ならば邊緣を放置した板では應力到る處 0 となる，従て  $F$  は Airy 式の如く外力のみの函數となる）。

**第二 温度分布が  $\varphi$  のみの函數の場合**

此の場合に於ては  $F$  は  $r$  及  $\varphi$  の函數となる，基本式 (1) は

$$\nabla^2 \nabla^2 F = - \frac{k^2}{r^2} \frac{d^2 t}{d\varphi^2} \dots\dots\dots (1)$$

此の方程式を解くのに吾々は一つの特解を求めこれに Complementary Function を加へる，Complementary Function は此處では Bi-harmonic equation の Complete Primitive に外ならない故これに周知の解がある。

特解を求めるには次の様にする

$$t = a_n \cos n\varphi \dots\dots\dots (2)$$

但  $a_n$  は常數， $n$  は正整數

と假定するとき (1) 式は

$$\nabla^2 \nabla^2 F = a_n \frac{k^2 n^2}{r^2} \cos n\varphi \quad \dots\dots\dots (3)$$

此處で

$$u = \nabla^2 F = R \cos n\varphi \quad \dots\dots\dots (4)$$

但  $R$  は  $r$  のみの函数とす、

と假定してこれを (3) に入れ  $\cos n\varphi$  の共通部分を去ると

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{Rn^2}{r^2} = a_n k^2 \frac{n^2}{r^2} \quad \dots\dots\dots (5)$$

此の式で  $R = cr^m$  と置き兩邊各項を對比するときは  $R = -k^2 a_n$  となる

$$\therefore u = \nabla^2 F = -k^2 a_n \cos n\varphi \quad \dots\dots\dots (6)$$

更に

$$F = R \cos n\varphi$$

と假定し (6) 式に入れて同様の方法を行ふときは  $R = -a_n k^2 \frac{r^2}{4-n^2}$  を得、

∴ (3) の特解は

$$F = -k^2 a_n \frac{r^2}{4-n^2} \cos n\varphi \quad \dots\dots\dots (7)$$

$\nabla^2 \nabla^2 F = 0$  の全解は  $R \cos n\varphi$  の形で表すときは

$$F = (Ar^n + Br^{-n} + Cr^{n+2} + Dr^{-n+2}) \cos n\varphi \quad \dots\dots\dots (8)$$

但  $A, B, C, D$  は常數

夫れ故に (1) 式の全解は

$$F = \left( Ar^n + Br^{-n} + Cr^{n+2} + Dr^{-n+2} - k^2 a_n \frac{r^2}{4-n^2} \right) \cos n\varphi \quad \dots\dots\dots (9)$$

此の解は  $n=1$  のときは  $r^{-n+2}$  と  $r^n$  とが一致して全解にはならない、このときは  $r^{-n+2}$  の代りに  $r \log r$  を用ひる、此の解は又  $n=2$  のときは最後の項が無限大となりまづい、このときは最後の項を  $-\frac{k^2 a_2}{4} r^2 \log r \cos 2\varphi$  で置きかへればよい。  $A, B, C, D$  は邊縁條件から充分に決定出来る ( $n=1$  の場合は係數の方が邊縁條件の式より多く一寸係數が決定出来難い様に見ゆれどもこれは變位の *acyclic property* から決定することが出来る、後出)、例へば輪形板に於ては應力は下の式で與へられる、



$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} = \left\{ A(n-n^2)r^{n-2} - B(n+n^2)r^{-n-2} + C(n+2) \right. \\
 &\quad \left. - n^2 r^n + D(-n^2-n+2)r^{-n} + k^2 a_n \frac{n^2-2}{4-n^2} \right\} \cos n\varphi \\
 \sigma_t &= \frac{\sigma^2 F}{\sigma r^2} = \left\{ An(n-1)r^{n-2} + Bn(n+1)r^{-n-2} + C(n+2)(n+1)r^n \right. \\
 &\quad \left. + D(2-n)(1-n)r^{-n} - k^2 a_n \frac{2}{4-n^2} \right\} \cos n\varphi \\
 \tau &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right) = \left\{ A(n^2-n)r^{n-2} - B(n+n^2)r^{-n-2} + C(n+n^2)r^n \right. \\
 &\quad \left. + D(n-n^2)r^{-n} - k^2 a_n \frac{n}{4-n^2} \right\} \sin n\varphi
 \end{aligned} \right\} \dots(10)$$

若し内外縁共外力をうけざるときは其處で  $\sigma_r=0$  及  $\tau=0$  となり上式より 4 個の獨立せる方程式をうるにより  $A, B, C, D$  をそれから決定することが出来る。

上記の解 (9) を一個の Elementary Solution と見做して更に一般的の熱分布に對する解を得、今温度の分布を一般に下の如き Fourier's Series で表すときは

$$t = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\varphi \dots\dots\dots(11)$$

これに相應する  $F$  を

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left( \frac{A}{A'} \right) r^n + \left( \frac{B}{B'} \right) r^{-n} + \left( \frac{C}{C'} \right) r^{n+2} + \left( \frac{D}{D'} \right) r^{-n+2} - k^2 \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \frac{r^2}{4-n^2} \right\} \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} \quad (12)$$

この  $A, B, C, D, A', B', C', D'$  は邊縁條件から決定する。

**例 一 外力を受けざる輪狀板 其一 ( $n=1$ の場合)**

此の場合

$$\left. \begin{aligned}
 t &= a_1 \cos \varphi \\
 F &= \left( Ar + Br^{-1} + Cr^3 + Dr \log r - k^2 a_1 \frac{r^2}{3} \right) \cos \varphi
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

此の  $F$  式で  $A$  は應力に無關係なる故不要なり、應力は

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_r &= (-2Br^{-3} + 2Cr + Dr^{-1} - \frac{1}{3}k^2 a_1) \cos \varphi \\
 \sigma_t &= (2Br^{-3} + 6Cr + Dr^{-1} - \frac{2}{3}k^2 a_1) \cos \varphi \\
 \tau &= (-2Br^{-3} + 2Cr + Dr^{-1} - \frac{1}{3}k^2 a_1) \sin \varphi
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

輪状板の内外径を各  $r_1$  及  $r_2$  とするとき  $r=r_1$  及  $r_2$  で  $\sigma_r = \tau = 0$

夫れ故に限界条件の式として 下の 2 式を得

$$\left. \begin{aligned} -2Br_1^{-3} + 2Cr_1 + Dr_1^{-1} - \frac{1}{3}k^2a_1 &= 0 \\ -2Br_2^{-3} + 2Cr_2 + Dr_2^{-1} - \frac{1}{3}k^2a_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

この式では  $B, C, D$  を決定するに充分ではない故に吾々はここに變位による關係を導入する。

基本式 (6) の  $V$  を決定する條件式  $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{1}{1 + \frac{1}{m}} \nabla^2 F + 2G\alpha t$  に上記  $F$  の値を入れるときは

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \left\{ \frac{8Cr}{1 + \frac{1}{m}} + \frac{2D}{\left(1 + \frac{1}{m}\right)r} + \left(2G\alpha - \frac{k^2}{1 + \frac{1}{m}}\right)a_1 \right\} \cos \varphi$$

然るに  $k^2 = E\alpha = 2G\left(1 + \frac{1}{m}\right)\alpha$  なるにより

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{2}{1 + \frac{1}{m}} \left\{ 4Cr + \frac{D}{r} \right\} \cos \varphi$$

或は  $\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{2}{1 + \frac{1}{m}} \left\{ 4Cy + \frac{D}{r} \frac{\partial r}{\partial y} \right\}$ , or  $\frac{2}{1 + \frac{1}{m}} \left\{ 4Cy + D \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} \dots\dots (16)$

$$\therefore \left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{2}{1 + \frac{1}{m}} \left\{ 2Cy^2 + D \log r \right\} + \phi(z) \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{2}{1 + \frac{1}{m}} \left\{ 4Cyz + D\varphi \right\} + \psi(y) \end{aligned} \right\}$$

但  $\phi(z), \psi(y)$  は各  $z$  又は  $y$  のみの函数

$V$  は尙 Potential Function なるべきにより ( $\nabla^2 V = 0$ )  $\phi$  と  $\psi$  の間には次の關係あり

$$\frac{2}{1 + \frac{1}{m}} 4Cz + \frac{d\phi}{dz} = -\frac{d\psi}{dy}$$

これは一つの定數 (例へば  $\alpha$ ) に等しからざるべからず

$$\therefore \psi = -\alpha y + \beta, \quad \phi = \alpha z - \frac{2}{1 + \frac{1}{m}} 2Cz^2 + \gamma$$

但  $\beta, \gamma$  は常數

夫れ故に

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{2}{1 + \frac{1}{m}} \left\{ 4Cyz + D\varphi \right\} - \alpha y + \beta \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{2}{1 + \frac{1}{m}} \left\{ 2C(y^2 - z^2) + D \log r \right\} + \alpha z + \gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

この式で一次の項は省略しても可なる故これを取り去り

$$\left. \begin{aligned} 2G\eta &= - \left( -\frac{B}{r^2} + 3Cr^2 + D \log r + D - \frac{2}{3} k^2 a_1 r \right) \cos^2 \varphi \\ &\quad - \left( \frac{B}{r^2} + Cr^2 + D \log r - \frac{k^2 a_1 r}{3} \right) \sin^2 \varphi \\ &\quad + \frac{2}{1 + \frac{1}{m}} \left\{ 2Cr^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) + D \log r \right\} \\ 2G\xi &= - \left( -\frac{B}{r^2} + 3Cr^2 + D \log r + D - \frac{2}{3} k^2 a_1 r \right) \cos \varphi \sin \varphi \\ &\quad + \left( \frac{B}{r^2} + Cr^2 + D \log r - \frac{k^2 a_1 r}{3} \right) \cos \varphi \sin \varphi \\ &\quad + \frac{2}{1 + \frac{1}{m}} \left\{ 4Cr^2 \cos \varphi \sin \varphi + D \varphi \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

完全輪 (a complete ring) では  $\eta, \xi$  は acyclic でなければならない, 夫れ故に  $D=0$  となる應力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left\{ \frac{r_1^3 r_2^3}{r^3} + (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) r \right. \\ &\quad \left. - 1 \right\} \frac{k^2 a_1}{3} \cos \varphi \\ \sigma_t &= \left\{ \frac{-r_1^3 r_2^3}{r^3} + 3(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) r \right. \\ &\quad \left. - 2 \right\} \frac{k^2 a_1}{3} \cos \varphi \\ \tau &= \left\{ \frac{r_1^3 r_2^3}{r^3} + (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) r \right. \\ &\quad \left. - 1 \right\} \frac{k^2 a_1}{3} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$r_1 = \alpha r_2$  [ $\alpha < 1$ ] と置けば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{k^2 a_1}{3} \left\{ \frac{\alpha^3}{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3} \frac{r_2^3}{r^3} + \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3} \frac{r}{r_2} - 1 \right\} \cos \varphi \\ \sigma_t &= \frac{k^2 a_1}{3} \left\{ -\frac{\alpha^3}{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3} \frac{r_2^3}{r^3} + \frac{3(1 + \alpha + \alpha^2)}{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3} \frac{r}{r_2} - 2 \right\} \cos \varphi \\ \tau &= \frac{k^2 a_1}{3} \left\{ \frac{\alpha^2}{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3} \frac{r_2^3}{r^3} + \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3} \frac{r}{r_2} - 1 \right\} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

變位は

$$\left. \begin{aligned} \eta &= - \left\{ \frac{\frac{r_1^3 r_2^3}{2r^2} + \left(3 - \frac{4}{1 + \frac{1}{m}}\right) (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \frac{r^2}{2}}{(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2)} - 2r \right\} \frac{k^2 a_1}{6G} \cos^2 \varphi \\ &- \left\{ \frac{-\frac{r_1^3 r_2^3}{2r^2} + \left(1 + \frac{4}{1 + \frac{1}{m}}\right) (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \frac{r^2}{2}}{(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2)} - r \right\} \frac{k^2 a_1}{6G} \sin^2 \varphi \\ \zeta &= - \left\{ \frac{\frac{r_1^3 r_2^3}{r^2} + \left(1 - \frac{4}{1 + \frac{1}{m}}\right) (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) r^2}{(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2)} - r \right\} \frac{k^2 a_1}{6G} \sin \varphi \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

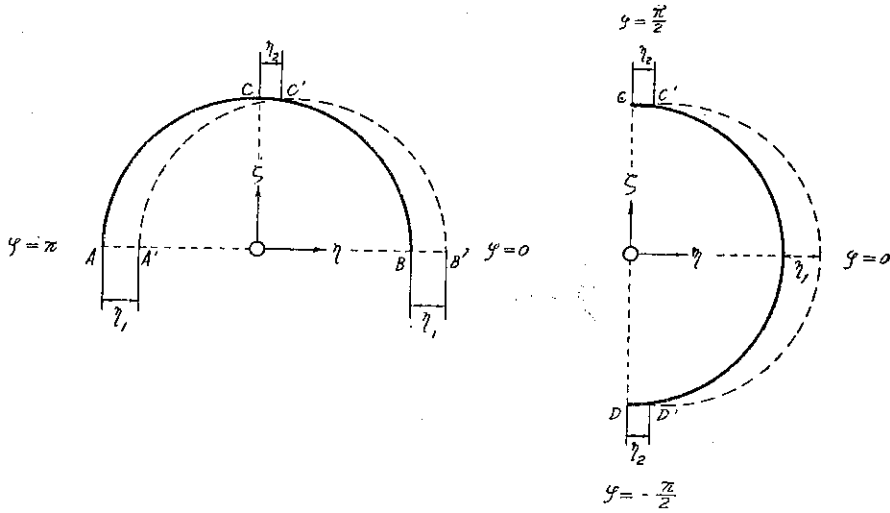
缺輪 (an incomplete ring) の場合に於ても  $\varphi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$  に於て  $\zeta = 0$  とする時は  $D = 0$  となる, 例へば  $\varphi = 0$  より  $\pi$  迄とりたる半輪 (a half ring) に於て兩端  $\varphi = 0$  及  $\pi$  で  $\zeta = 0$  とすれば此の兩端に於ける  $\eta$  の値  $\eta_1$  は

$$\eta_1 = - \left\{ \frac{\frac{r_1^3 r_2^3}{2r^2} + \left(3 - \frac{4}{1 + \frac{1}{m}}\right) (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \frac{r^2}{2}}{(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2)} - 2r \right\} \frac{k^2 a_1}{6G} \dots \dots \dots (22)$$

又  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}$  なる半輪に於て兩端  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  に於ける  $\zeta = 0$  とするときは兩端の變位  $\eta_2$  は

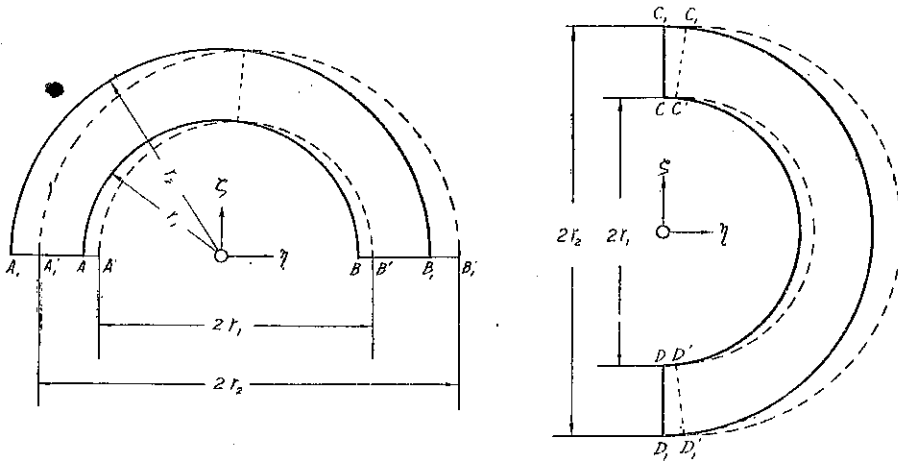
$$\eta_2 = - \left\{ \frac{-\frac{r_1^3 r_2^3}{2r^2} + \left(1 + \frac{4}{m}\right) (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) \frac{r^2}{2}}{(r_1 + r_2)(r_1^2 + r_2^2)} - r \right\} \frac{k^2 a_1}{6G} \dots \dots \dots (23)$$

第一圖



$\eta_1, \eta_2$  は一定半径  $r$  に於ては不變なり、夫れ故に拱の extrados 及 intrados は徑間を變化することなしに eccentric ring となる。

第二圖



此れは不均等に熱せられたる拱肋の熱應力に應用せらる、第二圖左は左右兩脚の一方は高溫一方は低溫にてその中間は  $\cos \varphi$  の變化に應ずる如く熱せられたる拱、同圖右は拱矢高溫、左右兩拱脚にて低溫の場合である。

尙上に述べたものと異なる邊縁條件の下には一般に  $D$  は 0 とならず、この場合 (21) 式の  $\eta$  又は  $\xi$  の何れか一つに適宜邊縁値を入れてこれと (15) 式と結合して  $B, C, D$  を決定することが出来る。

例二 外力を受けざる輪状板 其二 ( $n=2$ の場合)

$$t = a_2 \cos 2\varphi$$

$$F = \left( Ar^2 + Br^{-2} + Cr^4 + D - \frac{k^2 a_2}{4} r^2 \log r \right) \cos 2\varphi \dots\dots\dots (24)$$

應力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left\{ -2A - 6Br^{-4} - 4Dr^{-2} - \frac{k^2 a_2}{4} (1 - 2 \log r) \right\} \cos 2\varphi \\ \sigma_t &= \left\{ 2A + 6Br^{-4} + 12Cr^2 - \frac{k^2 a_2}{4} (2 \log r + 3) \right\} \cos 2\varphi \\ \tau &= \left\{ 2A - 6Br^{-4} + 6Cr^2 - 2Dr^{-2} - \frac{k^2 a_2}{4} (2 + 2 \log r) \right\} \sin 2\varphi \end{aligned} \right\} \dots (25)$$

$r=r_1$  及  $r_2$  に於て  $\sigma_r=0$  及  $\tau=0$  なるにより  $A, B, C, D$  を決定するときは

$$\left. \begin{aligned} A &= -\frac{k^2 a_2}{8} \frac{1}{(r_1^2 - r_2^2)^3} \left\{ (r_1^2 - r_2^2)(r_1^4 + 4r_1^2 r_2^2 + r_2^4) - 2r_1^2(r_1^4 + r_1^2 r_2^2 \right. \\ &\quad \left. + 4r_2^4) \log r_1 + 2r_2^2(4r_1^4 + r_1^2 r_2^2 + r_2^4) \log r_2 \right\} \\ B &= -\frac{k^2 a_2}{8} \frac{2r_1^4 r_2^4}{(r_1^2 - r_2^2)^3} \left\{ (r_1^2 - r_2^2) - (r_1^2 + r_2^2) \log \frac{r_1}{r_2} \right\} \\ C &= -\frac{k^2 a_2}{8} \frac{1}{(r_1^2 - r_2^2)^3} \left\{ -(r_1^4 - r_2^4) + 4r_1^2 r_2^2 \log \frac{r_1}{r_2} \right\} \\ D &= -\frac{k^2 a_2}{8} \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_1^2 - r_2^2)^3} \left\{ -3(r_1^4 - r_2^4) + 4(r_1^4 + r_1^2 r_2^2 + r_2^4) \log \frac{r_1}{r_2} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

或は  $r_1 = \alpha r_2$  [ $\alpha < 1$ ] とするとき

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{k^2 a_2}{8} \frac{1}{(1 - \alpha^2)^3} \left\{ -(1 - \alpha^2)(1 + 4\alpha^2 + \alpha^4) - 2\alpha^2(4 + \alpha^2 + \alpha^4) \log \alpha \right. \\ &\quad \left. + 2(1 - \alpha^2)^3 \log r_2 \right\} \\ B &= \frac{k^2 a_2}{8} \frac{2\alpha^4}{(1 - \alpha^2)^3} \left\{ -(1 - \alpha^2) - (1 + \alpha^2) \log \alpha \right\} r_2^4 \\ C &= \frac{k^2 a_2}{8} \frac{1}{(1 - \alpha^2)^3} \left\{ (1 - \alpha^4) + 4\alpha^2 \log \alpha \right\} r_2^{-2} \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

$$D = \frac{k^2 a_2}{8} \frac{\alpha^2}{(1-\alpha^2)^3} \left\{ 3(1-\alpha^4) + 4(1+\alpha^2+\alpha^4) \log \alpha \right\} r_2^2 \quad \Bigg|$$

### 第三 温度分布が $r$ 及 $\varphi$ の函数の場合

假りに

$$t = f(r) \cos n\varphi \dots \dots \dots (1)$$

但  $f(r)$  は  $r$  のみの函数

$n$  は正整数

と置くときは基本式 (1) は

$$\nabla^2 \nabla^2 F = -k^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) - \frac{n^2 f}{r^2} \right\} \cos n\varphi \dots \dots \dots (2)$$

此の特解を求むるのに  $u = \nabla^2 F = R \cos n\varphi$  [ $R$  は  $r$  のみの函数] とおけば (2) 式は

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{n^2 R}{r^2} = -k^2 \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{df}{dr} \right) - \frac{n^2 f}{r^2} \right\}$$

$$\therefore u = -k^2 f \cos n\varphi$$

此の式で更に  $F = R \cos n\varphi$  と置いて

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{Rn^2}{r^2} = -k^2 f \dots \dots \dots (3)$$

此の式の特解は Homogeneous Equation  $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{Rn^2}{r^2} = 0$  の2個の特解  $r^n$  及  $r^{-n}$  より求められる、即

$$R = \frac{k^2}{2n} \left\{ r^{-n} \int f r^{n+1} dr - r^n \int f r^{-n+1} dr \right\} \dots \dots \dots (4)$$

夫れ故に (2) 式の特解は

$$F = \frac{k^2}{2n} \left\{ r^{-n} \int f r^{n+1} dr - r^n \int f r^{-n+1} dr \right\} \cos n\varphi \dots \dots \dots (5)$$

故に (2) 式の全解は

$$F = \left\{ A r^n + B r^{-n} + C r^{n+2} + D r^{-n+2} + \frac{k^2}{2n} \left[ r^{-n} \int f r^{n+1} dr - r^n \int f r^{-n+1} dr \right] \right\} \cos n\varphi \dots \dots \dots (6)$$

若しも  $f$  が  $r$  の Power Series で下の如く書き下せるならば

$$f(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_s r^s + \dots \dots \dots (7)$$

容易に積分が出来る今 Elementary Term をとつて

$$f(r) = a_s r^s \quad \text{or} \quad t = a_s r^s \cos n\varphi \dots\dots\dots (8)$$

とすれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{k^2}{2n} \left\{ r^{-n} \int a_s r^{s+n+1} r - dr^n \int a_s r^{s-n+1} dr \right\} &= - \frac{k^2 a_s}{(s+2)^2 - n^2} r^{s+2} \\ &= \frac{k^2 a_s}{2n} \left\{ \frac{r^n}{2n} - r^n \log r \right\} \quad [s+2=n \text{ の場合}] \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

夫れ故に

$$\left. \begin{aligned} F &= \left\{ Ar^n + Br^{-n} + Cr^{n+2} + Dr^{-n+2} - \frac{k^2 a_s}{(s+2)^2 - n^2} r^{s+2} \right\} \cos n\varphi \\ &= \left\{ Ar^n + Br^{-n} + Cr^{n+2} + Dr^{-n+2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k^2 a_s}{2n} r^n \log r \right\} \cos n\varphi \quad [s+2=n \text{ の場合}] \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

應力は  $s+2 \neq n$  の場合

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left\{ A(n-n^2)r^{n-2} - B(n+n^2)r^{-n-2} + C(n+2-n^2)r^n \right. \\ &\quad \left. + D(-n^2-n+2)r^{-n} - \frac{k^2 a_s (s+2-n^2)}{(s+2)^2 - n^2} r^s \right\} \cos n\varphi \\ \sigma_t &= \left\{ A(n^2-n)r^{n-2} + B(n^2+n)r^{-n-2} + C(n+2)(n+1)r^n \right. \\ &\quad \left. + D(2-n)(1-n)r^{-n} - \frac{k^2 a_s (s+2)(s+1)}{(s+2)^2 - n^2} r^s \right\} \cos n\varphi \\ \tau &= \left\{ A(n^2-n)r^{n-2} - B(n^2+n)r^{-n-2} + C(n^2+n)r^n \right. \\ &\quad \left. + D(-n^2+n)r^{-n} - \frac{k^2 a_s n(s+1)}{(s+2)^2 - n^2} r^s \right\} \sin n\varphi \end{aligned} \right\} \dots (11)$$

例へば兩縁に外力働かざる輪狀板では  $r=r_1$  及  $r_2$  に於て  $\sigma_r=0, \tau=0$  なるべきにより 4 個の獨立せる式を得。これより  $A, B, C, D$  を決定することを得 (勿論  $s+2=n$  の場合には  $r^s$  の代りに Logarithmic term を用ひる), 尙  $n=1$  の場合には前節と同じく變位式の助けを借りることを要する。



圓板に於ては  $F$  の内  $r$  の正数 2 項丈とり、圓孔を有する無限に擴がれる板では負数 2 項丈とれば可なり、此の際に於ては唯一邊縁を有するのみであるから 2 個の獨立した邊縁條件式を得、これより 2 個の係數を決定することが出来る。

以上の解を Elementary Solution と考へてこれを重ねることにより

$$t = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{s,n} r^s \cos n\varphi + \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{s,n} r^s \sin n\varphi \dots\dots\dots (12)$$

なるより一般的なる溫度分布に對して

$$F = \sum_s \sum_n \left\{ A r^n + B r^{-n} + C r^{n+2} + D r^{-n+2} - \frac{k^2 a_{s,n} r^{s+2}}{(s+2)^2 - n^2} \right\} \cos n\varphi$$

$$+ \sum_s \sum_n \left\{ A' r^n + B' r^{-n} + C' r^{n+2} + D' r^{-n+2} - \frac{k^2 b_{s,n} r^{s+2}}{(s+2)^2 - n^2} \right\} \sin n\varphi$$

$$\dots\dots\dots (13)$$

但此れ等の series の convergency を假定す。

**備考** 若しも  $f(r) = a_0$  即  $t = a_0 \cos n\varphi$  なるときは前節の場合と一致する。又  $t = a_1 r \cos \varphi$  の場合には熱應力は至る所 0 となる、此れは溫度が Uniformly Varying の分布をなす場合である。

**例** 外力を受けざる輪狀板で下の如き溫度分布にある場合。

$$t = \frac{\alpha \cos \varphi}{r} \quad [s = -1, n = 1] \dots\dots\dots (14)$$

此れは Steady Flow of Heat の一つの場合である。即  $\nabla^2 t = 0$

$$F = \left\{ A r + B r^{-1} + C r^3 + D r \log r - \frac{k^2 \alpha}{2} r \log r \right\} \cos \varphi \dots\dots (15)$$

此の式で  $A$  は不要、 $D$  は完全輪では 0 なること前節の例一で明である。夫れ故に應力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left( -2B r^{-3} + 2C r - \frac{k^2 \alpha}{2} r^{-1} \right) \cos \varphi \\ \sigma_t &= \left( 2B r^{-3} + 6C r - \frac{k^2 \alpha}{2} r^{-1} \right) \cos \varphi \\ \tau &= \left( -2B r^{-3} + 2C r - \frac{k^2 \alpha}{2} r^{-1} \right) \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

$r = r_1$  及び  $r_2$  に於て  $\sigma_r = 0, \tau = 0$  なるにより 2 個の獨立せる式を得、これより  $B, C$  を決定するとき應力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{k^2 a}{2} \left\{ \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r_1^2 + r_2^2} r - \frac{1}{r} \right\} \cos \varphi \\ \sigma_t &= \frac{k^2 a}{2} \left\{ -\frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{r^3} + \frac{3}{r_1^2 + r_2^2} r - \frac{1}{r} \right\} \cos \varphi \\ \tau &= \frac{k^2 a}{2} \left\{ \frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r_1^2 + r_2^2} r - \frac{1}{r} \right\} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots (17)$$

或は  $r_1 = \alpha r_2$  と置けば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{k^2 a}{2r_2} \left\{ \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{r_2^3}{r^3} + \frac{1}{1 + \alpha^2} \frac{r}{r_2} - \frac{r_2}{r} \right\} \cos \varphi \\ \sigma_t &= \frac{k^2 a}{2r_2} \left\{ -\frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{r_2^3}{r^3} + \frac{3}{1 + \alpha^2} \frac{r}{r_2} - \frac{r_2}{r} \right\} \cos \varphi \\ \tau &= \frac{k^2 a}{2r_2} \left\{ \frac{\alpha^2}{1 + \alpha^2} \frac{r_2^3}{r^3} + \frac{1}{1 + \alpha^2} \frac{r}{r_2} - \frac{r_2}{r} \right\} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots (18)$$

熱傳導の問題に於ては温度分布は屢々 Bessel Function を以て與へられる、故に此處に其の場合を追加すれば中間特解 (An intermediate particular solution)  $\nabla^2 F = -k^2 t$  の兩邊を  $k^2$  で割り

$$\nabla^2 G = -t \dots\dots\dots (19)$$

但  $G = \frac{F}{k^2}, \quad t = f(r) \cos n\varphi$

$G = R \cos n\varphi$  と置くとき上式は

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{n^2 R}{r^2} = -f \dots\dots\dots (20)$$

此の式に於て  $f \propto R$  or  $f = \lambda^2 R$  ( $\lambda^2$  は常數) とおけば此の式は Bessel Equation となり其の全解は  $n$  整数なるを以て

$$R = a J_n(\lambda r) + b Y_n(\lambda r) \dots\dots\dots (21)$$

但  $a, b$  は常數で與へられる。従て

$$\left. \begin{aligned} t &= \lambda^2 \{ a J_n(\lambda r) + b Y_n(\lambda r) \} \cos n\varphi \\ F &= k^2 \{ a J_n(\lambda r) + b Y_n(\lambda r) \} \cos n\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

此の式の常數  $a, b, \lambda$  は與へられたる温度分布より決定せられる。例へば温度分布が次の式で與へられたとする。

$$t = f(r) \cos n\varphi \quad \}$$

$$f(r) = \sum_{s=1}^{\infty} \mathfrak{A}_s J_n(\lambda_s r) \quad [\text{Bessel-Dini}] \quad \dots\dots\dots (23)$$

但 
$$\mathfrak{A}_s = \frac{2}{[r_0 J_n'(\lambda_s r_0)]^2} \int_0^{r_0} r f(r) J_n(\lambda_s r) dr$$

$\lambda_s$  は  $J_n(\lambda_s r_0) = 0$  の正解

此の級数は  $r_0$  より小なる  $r$  の値に對しては明かに convergent である。而して如何様なる曲線  $f(r)$  にも應ぜしむることが出来る (22) 式と (23) 式とを比較して

$$a = \frac{\mathfrak{A}_s}{\lambda_s^2}, \quad b = 0$$

夫れ故

$$F = k^2 \sum \frac{\mathfrak{A}_s}{\lambda_s^2} J_n(\lambda_s r) \cos n\varphi \quad \dots\dots\dots (24)$$

又更に温度分布が次の如き級數で與へらるゝとき

$$t = \sum_s \mathfrak{A}_s \left\{ \frac{J_n(\lambda_s r)}{J_n(\lambda_s r_1)} - \frac{Y_n(\lambda_s r)}{Y_n(\lambda_s r_1)} \right\} \cos n\varphi \quad \dots\dots\dots (25)$$

但 
$$\mathfrak{A}_s = \frac{2}{\left[ r^2 \left\{ \frac{J_n'(\lambda_s r)}{J_n(\lambda_s r_1)} - \frac{Y_n'(\lambda_s r)}{Y_n(\lambda_s r_1)} \right\}^2 \right]_{r_1}^{r_2}} \int_{r_1}^{r_2} f(r) \left\{ \frac{J_n(\lambda_s r)}{J_n(\lambda_s r_1)} - \frac{Y_n(\lambda_s r)}{Y_n(\lambda_s r_1)} \right\} r dr$$

$\lambda_s$  は  $\frac{J_n(\lambda_s r_2)}{J_n(\lambda_s r_1)} - \frac{Y_n(\lambda_s r_2)}{Y_n(\lambda_s r_1)} = 0$  の正解

其れ故に

$$F = k^2 \sum_s \frac{\mathfrak{A}_s}{\lambda_s^2} \left\{ \frac{J_n(\lambda_s r)}{J_n(\lambda_s r_1)} - \frac{Y_n(\lambda_s r)}{Y_n(\lambda_s r_1)} \right\} \cos n\varphi \quad \dots\dots\dots (26)$$

故に (23) 及 (25) の如き温度分布に應ずる應力函数  $F$  は下式で表される。

$$\left. \begin{aligned} F &= \left\{ A r^m + B r^{-n} + C r^{n+2} + D r^{-n+2} + k^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}_s}{\lambda_s^2} J_n(\lambda_s r) \right\} \cos n\varphi \\ \text{or } &= \left\{ A r^m + B r^{-n} + C r^{n+2} + D r^{-n+2} + k^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\mathfrak{A}_s}{\lambda_s^2} \left\{ \frac{J_n(\lambda_s r)}{J_n(\lambda_s r_1)} - \frac{Y_n(\lambda_s r)}{Y_n(\lambda_s r_1)} \right\} \right\} \cos n\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

圓板に於ては (27) の上式を用ひ  $r$  の正幂のみをとる、 $Y_n$  は  $r=0$  に於て無限大となるを以てある、輪狀板では上下何れの式をも用ひられる。級數の convergency を假定すること

を許すならば吾々は尙上の解を  $n$  について superpose して一層一般的の温度分布に應ずる應力函数を得べし、即

$$\left. \begin{aligned}
 t &= \sum_n \sum_s \mathfrak{U}_{s,n} \left( \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} \right) J_n(\lambda_s r) \\
 F &= \sum_n \left\{ A r^n + B r^{-n} + C r^{n+2} + D r^{-n+2} + k^2 \sum_s \frac{\mathfrak{U}_{s,n}}{\lambda_s^2} J_n(\lambda_s r) \right\} \left( \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

但  $\mathfrak{U}_{s,n} = \frac{2}{\pi r_0^2 J_n'(\lambda_s r_0)^2} \int_0^{r_0} \int_0^{2\pi} t(r, \theta) \left( \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} \right) J_n(\lambda_s r) r dr d\varphi$

$\lambda_s$  は  $J_n(\lambda_s r_0) = 0$  の正解

又は

$$\left. \begin{aligned}
 t &= \sum_n \sum_s \mathfrak{U}_{s,n} \left( \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} \right) \left( \frac{J_n(\lambda_s r)}{J_n(\lambda_s r_1)} - \frac{Y_n(\lambda_s r)}{Y_n(\lambda_s r_1)} \right) \\
 F &= \sum_n \left\{ A r^n + B r^{-n} + C r^{n+2} + D r^{-n+2} + k^2 \sum_s \frac{\mathfrak{U}_{s,n}}{\lambda_s^2} \left\{ \frac{J_n(\lambda_s r)}{J_n(\lambda_s r_1)} - \frac{Y_n(\lambda_s r)}{Y_n(\lambda_s r_1)} \right\} \right\} \left( \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

但  $\mathfrak{U}_{s,n} = \frac{2}{\pi \left[ r_2^2 \left\{ \frac{J_n'(\lambda_s r)}{J_n(\lambda_s r_1)} - \frac{Y_n'(\lambda_s r)}{Y_n(\lambda_s r_1)} \right\}^2 \right] r_1} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} t(r, \theta) \left( \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi} \right) \left( \frac{J_n(\lambda_s r)}{J_n(\lambda_s r_1)} - \frac{Y_n(\lambda_s r)}{Y_n(\lambda_s r_1)} \right) r dr d\varphi$

$\lambda_s$  は  $\frac{J_n(\lambda_s r_2)}{J_n(\lambda_s r_1)} - \frac{Y_n(\lambda_s r_2)}{Y_n(\lambda_s r_1)} = 0$  の正解

此れ等の式に於ける  $A, B, C, D$  の決定については邊緣條件にて充分なること前例と同じ。

**第四 温度分布及應力函数が Bessel 函数にて與へらるゝ場合**

前節末に追加したる如く温度分布が Bessel 函数で與へられる如な場合に於ては其の取扱ひを少しく變更して次の如くすることを得。

基本式 (1) を先づ  $k^2$  で除して

$$\nabla^2 \nabla^2 G = -\nabla^2 t \quad \text{但} \quad G = \frac{F}{k^2} \dots \dots \dots (1)$$

此處で  $t \propto G$  又は  $t = \lambda^2 G$  ( $\lambda^2$  は常數) と置くときは式 (1) は

$$\nabla^2(\nabla^2 + \lambda^2) G = 0 \dots\dots\dots(2)$$

故に  $\nabla^2 G_1 = 0$  及  $\nabla^2 G_2 + \lambda^2 G_2 = 0$  の解は (2) 式の解である。其の和  $G = G_1 + G_2$  も勿論 (2) 式の解である。然るに

$$G_1 = (A'r^n + B'r^{-n}) \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} \quad \text{但 } A', B' \text{ 常數} \dots\dots\dots(3)$$

$$G_2 = \{AJ_n(\lambda r) + BY_n(\lambda r)\} \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} \quad \text{但 } A, B \text{ 常數} \dots\dots\dots(4)$$

夫れ故に求むる應力函數及これに應ずる溫度分布は

$$\left. \begin{aligned} F &= k^2(G_1 + G_2) \\ t &= \lambda^2(G_1 + G_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5)$$

斯くの如き溫度分布は勿論一般的とは云ひ難いけれども此れを Elementary solution と考へて重ね合すことにより此れを一般化することが出来るわけである。

(1) 外力を受けざる圓板

原點  $r=0$  に於て無限大とならざる項のみをとると

$$G_1 = A'r^n \cos n\varphi, \quad G_2 = AJ_n(\lambda r) \cos n\varphi$$

夫れ故に

$$\left. \begin{aligned} F &= k^2 A \{ar^n + J_n(\lambda r)\} \cos n\varphi \\ t &= \lambda^2 A \{ar^n + J_n(\lambda r)\} \cos n\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

常數  $A, a, \lambda$  の内  $A$  は溫度により定め  $a$  と  $\lambda$  とは邊縁條件から決定する。應力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= Ak^2 \left\{ (n-n^2) ar^{n-2} - \frac{n^2}{r^2} J_n(\lambda r) + \frac{dJ_n(\lambda r)}{r dr} \right\} \cos n\varphi \\ \sigma_t &= Ak^2 \left\{ (n^2-n) ar^{n-2} + \frac{d^2}{dr^2} J_n(\lambda r) \right\} \cos n\varphi \\ \tau &= Ak^2 \left\{ (n^2-n) ar^{n-2} - \frac{nJ_n(\lambda r)}{r^2} + \frac{n}{r} \frac{d}{dr} J_n(\lambda r) \right\} \sin n\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

$r=r_1$  に於て  $\sigma_r=0, \tau=0$  なる故

$$\left. \begin{aligned} (n-n^2) ar_1^{n-2} - n^2 J_n(\lambda r_1) + r_1 \frac{d}{dr} J_n(\lambda r_1) &= 0 \\ (n-1) ar_1^{n-2} - J_n(\lambda r_1) + r_1 \frac{d}{dr} J_n(\lambda r_1) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(8)$$

$\frac{d}{dr} J_n(\lambda r) = \lambda \left\{ \frac{n}{\lambda r} J_n(\lambda r) - J_{n+1}(\lambda r) \right\}$  を入れ  $a$  を消去するときは

$$\lambda r_1 J_{n+1}(\lambda r_1) - \frac{n^2(n-1)}{n^2+1} J_n(\lambda r_1) = 0 \dots\dots\dots (9)$$

此の式より  $\lambda$  を得、次に (8) 式に (9) の関係を入れて  $a$  についてとくとき

$$a = - \frac{n^2+n+1}{n^2+1} \frac{J_n(\lambda r_1)}{r_1^n} \dots\dots\dots (10)$$

夫れ故に

$$\left. \begin{aligned} F &= k^2 A \left\{ - \frac{n^2+n+1}{n^2+1} \frac{J_n(\lambda r_1)}{r_1^n} r^n + J_n(\lambda r) \right\} \cos n\varphi \\ t &= \lambda^2 A \left\{ - \frac{n^2+n+1}{n^2+1} \frac{J_n(\lambda r_1)}{r_1^n} r^n + J_n(\lambda r) \right\} \cos n\varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

(9) は  $\lambda$  に就いて無限数の解ある故これを重ね合すときは

$$\left. \begin{aligned} F &= k^2 \left\{ - \frac{n^2+n+1}{n^2+1} \frac{r^n}{r_1^n} \sum_{s=1}^{\infty} A_s J_n(\lambda_s r_1) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s J_n(\lambda_s r) \right\} \cos n\varphi \\ t &= \left\{ - \frac{n^2+n+1}{n^2+1} \frac{r^n}{r_1^n} \sum_{s=1}^{\infty} A_s \lambda_s^2 J_n(\lambda_s r_1) + \sum_{s=1}^{\infty} A_s \lambda_s^2 J_n(\lambda_s r) \right\} \cos n\varphi \end{aligned} \right\} \dots (12)$$

次に吾々は下の如き一般の温度分布を (12) 下式によつて表しうべきことを證明せん、

$$t = f(r) \cos n\varphi \quad \text{但 } f(r) \text{ は } r \text{ のみの任意の函数}$$

今  $t$  を 2 部分に分ち  $t_1$  及  $t_2$  とする。

$$t = t_1 + t_2 = \{f_1(r) + f_2(r)\} \cos n\varphi$$

こゝで

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= f_1(r) \cos n\varphi = \sum_{s=1}^{\infty} A_s \lambda_s^2 J_n(\lambda_s r) \cos n\varphi \\ t_2 &= f_2(r) \cos n\varphi = - \frac{n^2+n+1}{n^2+1} \frac{r^n}{r_1^n} \sum_{s=1}^{\infty} A_s \lambda_s^2 J_n(\lambda_s r_1) \cos n\varphi \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

(13) の上式は若し  $f_1(r)$  の形を決定することが可能ならば實在し得、何となれば、 $A_s$  は下の式で與へられ常に convergent であることが知られてゐる。

$$A_s = \frac{2}{\left\{ - \frac{n^2(n-1)(n^2+n+2)}{(n^2+1)^2} + \lambda_s^2 r_1^2 \right\} \{J_n(\lambda_s r_1)\}^2} \int_0^{r_1} f_1(r) J_n(\lambda_s r) r dr \dots (14)$$

$$\text{但 } \lambda_s \text{ は } \lambda_s r_1 J_{n+1}(\lambda_s r_1) - \frac{n^2(n-1)}{n^2+1} J_n(\lambda_s r_1) = 0 \quad \text{の正根}$$

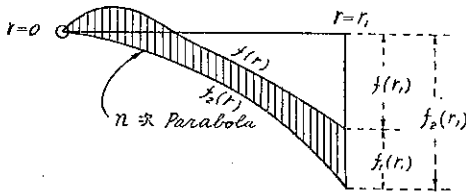
$f_2(r)$  は  $n$  次の Parabola である。何となれば  $\sum_{s=1}^{\infty} A_s \lambda_s J_n(\lambda_s r_1)$  は  $f_1(r)$  で

$r=r_1$  と置いた一つの常數に過ぎぬからである、其れ故に  $f(r_1)$  を今  $f_1(r_1)$  及  $f_2(r_1)$  に下の如き比に外分すれば

$$\frac{|f_1(r_1)|}{|f_2(r_1)|} = \frac{n^2+1}{n^2+n+1} \quad \text{且} \quad f_1(r_1)+f_2(r_1)=f(r_1)$$

これより  $f_2(r_1)$  を得、従て  $f_2(r)$  を得、 $f(r)-f_2(r)$  により  $f_1(r)$  を得 (第三圖陰影部の縦距これを表す)。

第三圖



尙吾々は多分上の結果を更に  $n$  に就いて重ねさせて一層一般の場合にすることを得やう。

$$\left. \begin{aligned} F &= k^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ -A_{s,n} \frac{n^2+n+1}{n^2+1} \frac{r^n}{r_1^n} J_n(\lambda_{s,n}r_1) + A_{s,n} J_n(\lambda_{s,n}r) \right\} \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} \\ t &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ -A_{s,n} \lambda_{s,n}^2 \frac{n^2+n+1}{n^2+1} \frac{r^n}{r_1^n} J_n(\lambda_{s,n}r_1) + A_{s,n} \lambda_{s,n}^2 J_n(\lambda_{s,n}r) \right\} \begin{pmatrix} \cos n\varphi \\ \sin n\varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

此れ等の式の第二項は Fourier-Bessel Series である故第一項の convergency を假定すれば  $A_{s,n}$  を前述の方法で決定出来るわけである。

例:  $n=1$  の場合

$$\left. \begin{aligned} t &= \lambda^2 A \{ ar + J_1(\lambda r) \} \cos \varphi \\ F &= k^2 A \{ ar + J_1(\lambda r) \} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (16)$$

$F$  の  $ar \cos \varphi$  の項は應力に無關係なる故不要、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= Ak^2 \left\{ -\frac{J_1(\lambda r)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} J_1(\lambda r) \right\} \cos \varphi \\ \sigma_t &= Ak^2 \frac{d^2}{dr^2} J_1(\lambda r) \cos \varphi \\ \tau &= Ak^2 \left\{ -\frac{J_1(\lambda r)}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} J_1(\lambda r) \right\} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

$r=r_1$  で  $\sigma_r=0, \tau=0$  なる故

$$-\frac{J_1(\lambda r_1)}{r_1^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} J_1(\lambda r_1) = 0 \quad \text{or} \quad J_2(\lambda r_1) = 0 \dots \dots (18)$$

若しも下式で  $t$  が表さるゝとすれば

$$\left. \begin{aligned} t &= f(r) \cos \varphi \\ f(r) &= ar + \sum_s \mathfrak{A}_s J_1(\lambda_s r) \\ a &= \frac{4}{r_1^4} \int_0^{r_1} f(r) r^2 dr \\ \mathfrak{A}_s &= \frac{2}{r_1^2 \{J_1(\lambda_s r_1)\}^2} \int_0^{r_1} f(r) J_1(\lambda_s r) r dr \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (19)$$

但  $\lambda_s$  は  $J_2(\lambda_s r_1) = 0$  の正根

$A_s = \frac{\mathfrak{A}_s}{\lambda_s^2}$  なるべきにより 應力函数は

$$F = k^2 \sum_s \frac{\mathfrak{A}_s}{\lambda_s^2} J_1(\lambda_s r) \cos \varphi \dots \dots \dots (20)$$

(□) 外力を受けざる輪状板

$F$  及  $t$  を次の如くとする

$$\left. \begin{aligned} F &= Ak^2 \{ ar^n + br^{-n} + J_n(\lambda r) + C Y_n(\lambda r) \} \cos n\varphi \\ t &= A\lambda^2 \{ ar^n + br^{-n} + J_n(\lambda r) + C Y_n(\lambda r) \} \cos n\varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

但  $\lambda, A, a, b, c$  常數

應力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= Ak^2 \left\{ n(1-n)ar^{n-2} - n(1+n)br^{-n-2} - \frac{n^2}{r^2} J_n(\lambda r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} J_n(\lambda r) \right. \\ &\quad \left. + C \left( -\frac{n^2}{r^2} Y_n(\lambda r) + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} Y_n(\lambda r) \right) \right\} \cos n\varphi \\ \sigma_\theta &= Ak^2 \left\{ n(n-1)ar^{n-2} + n(1+n)br^{-n-2} + \frac{d^2}{dr^2} J_n(\lambda r) \right. \\ &\quad \left. + C \frac{d^2}{dr^2} Y_n(\lambda r) \right\} \cos n\varphi \\ \tau &= Ak^2 \left\{ n(n-1)ar^{n-2} - n(1+n)br^{-n-2} - \frac{n}{r^2} J_n(\lambda r) \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{r} \frac{d}{dr} J_n(\lambda r) + C \left( -\frac{n^2}{r^2} Y_n(\lambda r) + \frac{n}{r} \frac{d}{dr} Y_n(\lambda r) \right) \right\} \sin n\varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots (22)$$

Cylindrical Functions の微分關係



$$\left. \begin{aligned} r \frac{d}{dr} J_n(\lambda r) &= n J_n(\lambda r) - \lambda r J_{n+1}(\lambda r) \\ r \frac{d}{dr} Y_n(\lambda r) &= n Y_n(\lambda r) - \lambda r Y_{n+1}(\lambda r) \end{aligned} \right\}$$

を用ひ且簡單の爲めに次の如く書き換へ

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_1^n &= r_1^n J_n(\lambda r_1), \quad \mathfrak{S}_1^{n+1} = r_1^{n+1} J_{n+1}(\lambda r_1), \quad \mathfrak{S}_2^n = r_2^n J_n(\lambda r_2), \quad \mathfrak{S}_2^{n+1} = r_2^{n+1} J_{n+1}(\lambda r_2) \\ \mathfrak{Y}_1^n &= r_1^n Y_n(\lambda r_1), \quad \mathfrak{Y}_1^{n+1} = r_1^{n+1} Y_{n+1}(\lambda r_1), \quad \mathfrak{Y}_2^n = r_2^n Y_n(\lambda r_2), \quad \mathfrak{Y}_2^{n+1} = r_2^{n+1} Y_{n+1}(\lambda r_2) \end{aligned}$$

$r=r_1$ , 及  $r_2$  に於て  $\sigma_r=0$ ,  $\tau=0$  なる邊縁條件より下の4式を得

$$\left. \begin{aligned} n(1-n)ar_1^{2n} - (1+n)nb - n(n-1)\mathfrak{S}_1^n - \lambda\mathfrak{S}_1^{n+1} \\ \quad + C\{-n(n-1)\mathfrak{Y}_1^n - \lambda\mathfrak{Y}_1^{n+1}\} &= 0 \\ -n(1-n)ar_1^{2n} - (1+n)nb + n(n-1)\mathfrak{S}_1^n - n\lambda\mathfrak{S}_1^{n+1} \\ \quad + C\{n(n-1)\mathfrak{Y}_1^n - n\lambda\mathfrak{Y}_1^{n+1}\} &= 0 \\ n(1-n)ar_2^{2n} - (1+n)nb - n(n-1)\mathfrak{S}_2^n - \lambda\mathfrak{S}_2^{n+1} \\ \quad + C\{-n(n-1)\mathfrak{Y}_2^n - \lambda\mathfrak{Y}_2^{n+1}\} &= 0 \\ -n(1-n)ar_2^{2n} - (1+n)nb + n(n-1)\mathfrak{S}_2^n - n\lambda\mathfrak{S}_2^{n+1} \\ \quad + C\{n(n-1)\mathfrak{Y}_2^n - n\lambda\mathfrak{Y}_2^{n+1}\} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots (23)$$

此の4式中の3式より  $a, b, c$  を求め第四の式に入る  $\lambda$  ときは吾々は  $\lambda$  を決定すべき式を得。従つて  $a, b, c$  をも決定することを得。

最初の3式を用ひて  $a, b, c$  を求むるときは

$$a = -\frac{\Delta_a}{\Delta}, \quad b = -\frac{\Delta_b}{\Delta}, \quad C = -\frac{\Delta_c}{\Delta} \dots \dots \dots (24)$$

但

$$\begin{aligned} \Delta &= n^2(1-n^2) \begin{vmatrix} 1 & r_1^{2n} & -n(n-1)\mathfrak{Y}_1^n - \lambda\mathfrak{Y}_1^{n+1} \\ 1 & -r_1^{2n} & n(n-1)\mathfrak{Y}_1^n - n\lambda\mathfrak{Y}_1^{n+1} \\ 1 & r_2^{2n} & -n(n-1)\mathfrak{Y}_2^n - \lambda\mathfrak{Y}_2^{n+1} \end{vmatrix} \\ \Delta_a &= n(1+n) \begin{vmatrix} 1 & -n(n-1)\mathfrak{S}_1^n - \lambda\mathfrak{S}_1^{n+1} & -n(n-1)\mathfrak{Y}_1^n - \lambda\mathfrak{Y}_1^{n+1} \\ 1 & n(n-1)\mathfrak{S}_1^n - n\lambda\mathfrak{S}_1^{n+1} & n(n-1)\mathfrak{Y}_1^n - n\lambda\mathfrak{Y}_1^{n+1} \\ 1 & -n(n-1)\mathfrak{S}_2^n - \lambda\mathfrak{S}_2^{n+1} & -n(n-1)\mathfrak{Y}_2^n - \lambda\mathfrak{Y}_2^{n+1} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\Delta_b = n(1-n) \begin{vmatrix} r_1^{2n} & -n(n-1)\mathfrak{S}_1^n - \lambda\mathfrak{S}_1^{n+1} & -n(n-1)\mathfrak{Y}_1^n - \lambda\mathfrak{Y}_1^{n+1} \\ -r_1^{2n} & n(n-1)\mathfrak{S}_1^n - n\lambda\mathfrak{S}_1^{n+1} & n(n-1)\mathfrak{Y}_1^n - n\lambda\mathfrak{Y}_1^{n+1} \\ r_2^{2n} & -n(n-1)\mathfrak{S}_2^n - \lambda\mathfrak{S}_2^{n+1} & -n(n-1)\mathfrak{Y}_2^n - \lambda\mathfrak{Y}_2^{n+1} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_c = n^2(1-n^2) \begin{vmatrix} 1 & r_1^{2n} & -n(n-1)\mathfrak{S}_1^n - \lambda\mathfrak{S}_1^{n+1} \\ 1 & -r_1^{2n} & n(n-1)\mathfrak{S}_1^n - n\lambda\mathfrak{S}_1^{n+1} \\ 1 & r_2^{2n} & -n(n-1)\mathfrak{S}_2^n - \lambda\mathfrak{S}_2^{n+1} \end{vmatrix}$$

此れ等の値を第四式に入れて

$$\mathfrak{S}^n \mathfrak{Y}^{n+1} - \mathfrak{S}^{n+1} \mathfrak{Y}^n = r^{2n+1} \left\{ J_n(\lambda r) Y_{n+1}(\lambda r) - J_{n+1}(\lambda r) Y_n(\lambda r) \right\} = -\frac{r^{2n}}{\lambda}$$

[但  $Y$  には Neumann の形をとる (Gray, Mathews, MacRobert; Bessel Function p. 25)]  
なる関係を導入すると

$$\begin{aligned} & r_1 r_2 (r_2^{2n} - r_1^{2n}) \left\{ J_{n+1}(\lambda r_1) Y_{n+1}(\lambda r_2) - J_{n+1}(\lambda r_2) Y_{n+1}(\lambda r_1) \right\} \lambda^2 \\ & + 2n \left[ r_1^{2n+1} \left\{ J_{n+1}(\lambda r_1) Y_n(\lambda r_2) - Y_{n+1}(\lambda r_1) J_n(\lambda r_2) \right\} \right. \\ & \quad \left. + r_2^{2n+1} \left\{ J_{n+1}(\lambda r_2) Y_n(\lambda r_1) - Y_{n+1}(\lambda r_2) J_n(\lambda r_1) \right\} \right] \lambda \\ & - 4n r_1^n r_2^n = 0 \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

此れ  $\lambda$  を決定すべき transcendental equation であつて多數の  $\lambda$  根を與ふ、此れ等の  $\lambda$  の値を (24) に入ると  $a, b, c$  を決定することが出来る、尙斯くして得た解を  $s$  及  $n$  に就いて重ね合せて一般形とすることも可能であらう。

$n=1$  の場合は既に屢々出て來た如に上述の解は失敗する、この場合には  $C=0$  と假定し (換言すれば  $Y$  の項を去り)  $b$  と  $\lambda$  とを求めこれを重ね合すことによつて充分一般の温度分布に適應せる解を得られやう。

### 第三章 直角座標 ( $y, z$ ) による問題

#### 第一 無限に長い細長き板

Linear Flow of Heat の場合を考ふ。温度の分布が  $y$  のみの函数と考へるとき  $\nabla^2 t = \frac{d^2 t}{dy^2}$ , 次に應力函数  $F$  も亦  $y$  のみの函数と考へるときは二軸的に見たる熱應力の最も簡單なる場合となり  $\sigma_y$  及  $\tau$  は消失し  $\sigma_x$  のみ存在する (此の際變位は尙勿論  $y, z$  の

函数である)。

基本式 (1) は

$$\frac{d^4 F}{dy^4} = -k^2 \frac{d^2 t}{dy^2} \dots\dots\dots (1)$$

夫れ故に  $F = -k^2 \int \int t dy dy + Ay^3 + By^2 + Cy + D \dots\dots\dots (2)$

$A, B, C, D$  常數

$$\sigma_z = -k^2 t + 6Ay + 2B \dots\dots\dots (2)$$

此の式より到る處  $\sigma_z = 0$  (即應力凡て 0) ならしむる爲めには温度の分布は uniformly varying (此の場合 (3) 式で  $A \neq 0$ ) なるか又は uniform (此の場合  $A = 0$ ) なるを要することが解る。

(3) 式の  $A, B$  は無限の遠くにある  $z$  端の支持法によつて決定せられるわけである、例へば全く自由に放置するときは  $y$  軸に平行なる任意の断面で  $\sigma_z$  の合成力及合成力率が 0 なるべき通常の statical condition を充たさねばならぬ、即

$$R_z = \int_0^a \sigma_y dy = 0, \quad M_z = \int_0^a \sigma_z y dy = 0$$

夫れ故に

$$\left. \begin{aligned} -k^2 t'_a + 3Aa + 2B &= 0 \\ -k^2 t''_a + 2Aa + B &= 0 \end{aligned} \right\}$$

但  $t'_a = \frac{1}{a} \int_0^a t dy, \quad t''_a = \frac{1}{a^2} \int_0^a t y dy$

此の式より  $A, B$  を求め  $\sigma_z$  式に入れば

$$\sigma_z = -k^2 \left\{ t - 6(2t''_a - t'_a) \frac{y}{a} + 2(3t''_a - 2t'_a) \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$\sigma_y$  及  $\tau$  は勿論 0 である、此の式で見ても温度分布が uniform か uniformly varying なるときは  $\sigma_z = 0$  である、換言すれば「Steady Linear Flow of Heat の場合には放置されたる細長き板では熱應力は起らない。」

(4) 式によつて如何なる Linear Flow of Heat の場合でも  $\sigma_z$  が求まるわけである、Linear Flow of Heat の屢々起り得るものは Carslaw; Conduction of Heat pp. 61-87 に例あり、又片側から周期的に熱した場合は拙論 (Über die Wärmeleitung und die Berechnung von Wärmespannungen in Eisenbetonstützmauern u. s. w. : Beton und Eisen 1926 Heft 21) にあり、 $t'_a, t''_a$  の積分が analytical に困難の場合には Intograph を用ふるとか又は

mechanical quadrature の方法による近似法を採用すればよい、又此れを其の儘 Infinitely-extended plate の断面と見るときは其の厚みの方向に Linear Flow of Heat が起つたときの自由に放置された無限に広い板の熱彎曲の問題に指針を與へるものと見られる。(板の熱彎曲に就いては拙論 On the Thermal Bending of a Plane Wall heated on one Surface. 土木學會誌第十三卷第四號を参照されたし)。

次に Semi-infinitely extended plate では無限遠では温度も應力も 0 になるものと考へるときは (3) 式で  $A=0, B=0$

$$\sigma_z = -k^2 t \dots\dots\dots (5)$$

勿論  $\sigma_y=0, \tau=0$  此れは貯水池堰堤又は擁壁の如き厚き壁が一面から熱せられた場合の断面の熱應力を與へる、斯くの如き場合に於ける熱傳導の様様に就いては Carslaw, pp. 29-60 又は拙著 Beton u. Eisen, Heft 21 を参照されたし。

## 第二 長方形の板

長方形の板の四邊を自由に放置した場合には邊縁條件として

$$y=0 \text{ 及 } y=a \text{ に於て } \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = 0, \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0$$

$$z=0 \text{ 及 } z=b \text{ に於て } \sigma_z = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0, \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = 0$$

上の條件より

$$\left. \frac{\partial F}{\partial z} \right]_{y=0} = C_1, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right]_{y=a} = C_2, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right]_{z=0} = C_3, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right]_{z=a} = C_4$$

下の條件より

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right]_{z=0} = D_1, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right]_{z=b} = D_2, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right]_{z=0} = D_3, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial z} \right]_{z=b} = D_4$$

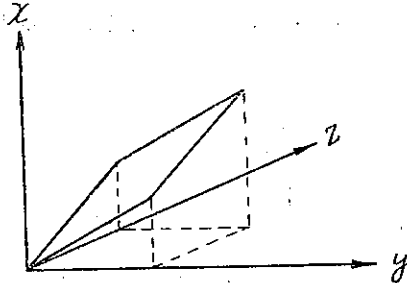
但此れ等の  $C_1, C_2, C_3, C_4, D_1, D_2, D_3, D_4$  は常數

$F$  は  $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$  と共に全領域(邊縁の隅迄も含んで)に於て連続的であるとするときは

$$C_3=C_4=D_1=D_2 \text{ 及 } C_1=C_2=D_3=D_4$$

此れ等の邊縁條件と基本式 (1) とを併せ考へるときは  $F$  は一つの傾斜せる四邊埋め込みの平板の彎曲を示す式と同一のものである、此の場合  $-k^2 \nabla^2 t$  をその垂直荷重と考へればよい(第四圖)、(此の考案は Galerkin, Hencky, Timoschenko 等の多くの人々によつて採用

第四圖



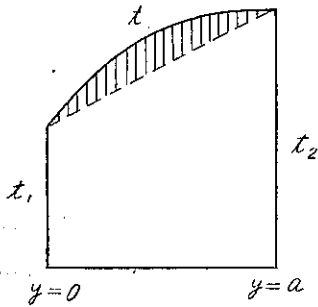
されてゐる)。

處が  $F$  の linear part は應力の値に無關係なる故に吾々はこの問題をば水平板の場合に歸せしめることが出来る。

扱温度  $t$  は Steady Flow of Heat の場合には  $\nabla^2 t = 0$  なる故垂直荷重は無くなり彎曲を起さない爲めに熱應力も 0 となる。

(此の事は  $F$  が  $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$  と共に板の隅迄連続的であつて始めて成立する定理であつて Carslaw, p. 106 にある如な隅で非連続的な温度分布に對しては假へ steady state でも成立しない又輪狀板の如く multiply-connected plate に於ても成立しないことは既に示した通りである, 此れ等の場合に於ては邊緣の支持面が上記の如くに一平面上に必ずしもないのであるから垂直荷重なくとも彎曲は起りうるわけである)。

第五圖



一般に温度の項を Fourier's Series 又は Double Fourier's Series で表し得るものと考へても差支ない, 例へば熱傳導が  $y$  軸に平行にのみ起ると考へると (換言すれば  $z=0$  及  $z=b$  では熱の絶縁體で塚されてゐると考へ) 温度の一般的の分布は  $y=0$  及  $y=a$  の邊緣に於て一定の温度差を有する場合の Steady Flow of Heat と  $y=0$  及  $y=a$  に於て温度 0 度の Unsteady Flow of Heat の項に分つことが出来る。(第五圖)

前者は應力に關係なき uniformly varying の分布であり後者は一般に次の如く表される,

$$t = \sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{Q}_r e^{-\kappa \frac{r^2 \pi^2}{a^2} \tau} \sin \frac{r\pi y}{a} \quad [\text{Carslaw, p. 67}]$$

但  $\kappa$ : Diffusivity

$\tau$ : 時

$$\sum_{r=1}^{\infty} \mathcal{Q}_r \sin \frac{r\pi y}{a} : \text{最初の狀況 } (\mathcal{Q}_r \text{ は定數})$$

二軸的の温度分布に於てはこれに相應する  $t$  の値は

$$t = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{Q}_{r,s} e^{-\kappa \pi^2 \left( \frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \right) \tau} \sin \frac{r\pi y}{a} \sin \frac{s\pi z}{b} \quad (\mathcal{Q}_{r,s} \text{ は定數})$$

上の式で  $\tau$  に或定まれる値を入れるときは此れは Fourier's Series 又は Double Fourier's Series となる。此れ等の  $t$  の  $y, z$  に関しての Second Derivatives は亦同形の函数である故 Elementary Value をとつて次の如くおくことを得。

$$-k^2 \nabla^2 t = k^2 A_r \sin \frac{r\pi y}{a} \quad \text{又は} \quad k^2 A_{r,s} \sin \frac{r\pi y}{a} \sin \frac{s\pi z}{b} \dots \dots \dots (1)$$

$$\text{但} \quad A_r = 2C_r \frac{r^2 \pi^2}{a^2} e^{-\kappa^2 \frac{r^2 \pi^2}{a^2} \tau}, \quad A_{r,s} = 2C_{r,s} \left( \frac{r^2 \pi^2}{a^2} + \frac{s^2 \pi^2}{b^2} \right) e^{-\kappa^2 \left( \frac{r^2 \pi^2}{a^2} + \frac{s^2 \pi^2}{b^2} \right) \tau}$$

扱此の (1) 式の示す垂直荷重の下にある四邊埋込の長方形板の彎曲を求めることとなる、然るに四邊埋込の長方形板の問題は近似値より以上求められないことは既に知られてゐる而も従來級數を用ふる classical の方法で求められたものは假へ近似値であつても可なり複雑なるものである (Love; Elasticity 4th. Ed. p. 493, Pigoaud; Resistance des Matériaux p. 643, Nádai; Elastische Platten S. 180), 何れにしても近似値以上に出でぬとならば、比較的單純にしてしかも近似値のよい解が實用の點から見れば便利である。斯くの如き目的に對しては恐らく Ritz, Courant 等によつて近來著しく發展して來た Calculus of Variations を Boundary problem に應用する方法が最も適してゐると思ふから此れに追從して計算を進める。

W. Ritz は  $\nabla^2 \nabla^2 F = f(y, z)$  を邊縁條件に併せて解く代りに

$$J = \iint \left[ \frac{1}{2} (\nabla^2 F)^2 - f(y, z) F \right] dy dz$$

[whole domain]

なる定積分を取つてこれを最小ならしむることを考へた。此の定積分は實は板の彎曲の勢力の式であつて Kirchhoff が此れから基本式  $\nabla^2 \nabla^2 F = f(y, z)$  を導出した所のものに外ならない (Kirchhoff の勢力の式は尙此の外に一項あれども此の項は埋込板の場合には消去するものである。Nádai; Elastische Platten S. 273), Ritz は  $F$  を次の如き Funktionfolge で近似的に表し得るものと考へ

$$F = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \dots + \alpha_n \varphi_n$$

- 但  $\varphi$ : 各々邊縁條件を充たす函数  
 $\alpha$ : 適宜に定めらるべき常數

$\alpha$  を Parameter として  $J$  の最小の條件

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \iint \left\{ \nabla^2 F \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial \alpha} - f(y, z) \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right\} dy dz = 0 \dots \dots \dots (2)$$

[whole domain]

より  $\alpha$  の最も真に近き値を算出する、Ritz は各種の邊縁條件に對して各當嵌る各種の函数  $\varphi$  を例示してゐる (W. Ritz; Oeuvres p. 215-234)。然し乍ら Weierstrass によれば Polynom が最も一般的の應用が出来るといふ。(Courant-Hilbert; Methoden der Mathematischen

Physik I, S. 69)。

吾々の場合に於ては縦横の中心線に對して  $F$  は對稱的なるが故に座標の原點を板の中心に移し縦横の中心線を座標軸にとれば  $F$  は  $y$  及  $z$  に關して偶數級の代數的多項式を用ひて表すことが出来る。

$$F = \left\{ y^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right\}^2 \left\{ z^2 - \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right\}^2 \sum_{m,n=0}^{m,n} y^{2m} z^{2n} \alpha_{mn} \dots\dots\dots (3)$$

但  $\alpha_{m,n}$  は常數,  $m, n$  は正整數

$\sum$  の外側にある factor の爲めにこの函數は各項共各々邊縁埋込の條件を充たしてゐる通常吾々は此の最初の4項程とれば實用上充分である。\*

$$F = \left\{ y^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right\}^2 \left\{ z^2 - \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right\}^2 \{ \alpha_{00} + \alpha_{11} y^2 + \alpha_{11} z^2 + \alpha_{11} y^2 z^2 \} \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{又 } f(y, z) = k^2 \nabla^2 t = k^2 A_r \cos \frac{r\pi y}{a} \quad \text{or} \quad k^2 A_s \cos \frac{r\pi y}{a} \cos \frac{s\pi z}{b} \dots\dots\dots (5)$$

但  $r, s = 1, 3, 5, \dots\dots\dots$

$$\begin{aligned} \text{又 } \nabla^2 F = \sum_{m,n=0}^{1,1} & \left[ \left\{ (2m+4)(2m+3) y^{2m+2} - 2(2m+2)(2m+1) \left( \frac{a}{2} \right)^2 y^{2m} \right. \right. \\ & \left. \left. + 2m(2m-1) \left( \frac{a}{2} \right)^4 y^{2m-2} \right\} \times \left\{ z^2 - \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right\}^2 z^{2n} + \left\{ (2n+4)(2n+3) z^{2n+2} \right. \right. \\ & \left. \left. - 2(2n+2)(2n+1) \left( \frac{b}{2} \right)^2 z^{2n} + 2n(2n-1) \left( \frac{b}{2} \right)^4 z^{2n-2} \right\} \right. \\ & \left. \times \left\{ y^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right\}^2 y^{2m} \right] \alpha_{mn} \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial \alpha_{mn}} = & \left\{ (2m+4)(2m+3) y^{2m+2} - 2(2m+2)(2m+1) \left( \frac{a}{2} \right)^2 y^{2m} \right. \\ & \left. + 2m(2m-1) \left( \frac{a}{2} \right)^4 y^{2m-2} \right\} \times \left\{ z^2 - \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right\}^2 z^{2n} + \left\{ (2n+4)(2n+3) z^{2n+2} \right. \\ & \left. - 2(2n+2)(2n+1) \left( \frac{b}{2} \right)^2 z^{2n} + 2n(2n-1) \left( \frac{b}{2} \right)^4 z^{2n-2} \right\} \\ & \times \left\{ y^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right\}^2 y^{2m} \quad \left[ \text{但 } \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} \right] = 0, 1 \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

\*) 極めて粗雑なる近似値をとつて充分なときは最初の1項丈とれば可なり。

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_{mn}} = \left\{ y^2 - \left( \frac{a}{2} \right)^2 \right\}^2 \left\{ z^2 - \left( \frac{b}{2} \right)^2 \right\}^2 y^{2m} z^{2n} \quad \left[ \text{但} \quad \begin{matrix} m \\ n \end{matrix} = 0, 1 \right] \dots\dots\dots (8)$$

此れ等の値 (5), (6), (7), (8) を (2) に入れて  $-\frac{a}{2} \leqq y \leqq +\frac{a}{2}$ ,  $-\frac{b}{2} \leqq z \leqq +\frac{b}{2}$  に亘つて積分すれば  $\alpha_{00}, \alpha_{10}, \alpha_{01}, \alpha_{11}$  を一次的に含む 4 個の獨立せる式を得、從て

此れより此れ等の  $\alpha$  の値を求め (4) 式に入れるときは  $F$  の近似値を得。從てその Second Derivatives (即  $F$  を Deflection と考へれば曲面の曲率) により應力が與へられる。\*

### 第四章 數計算例

**第一例** 半徑  $r_1, r_2$  なる自由邊を有する輪狀板が  $t = a \cos \varphi$  ( $a$  は常數) なる溫度分布の下にある場合

12 頁 (20) 式により

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{k^2 a}{3} \left\{ \frac{\alpha^3}{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3} \left( \frac{r_2}{r} \right)^3 + \frac{1 + \alpha + \alpha^2}{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3} \left( \frac{r}{r_2} \right) - 1 \right\} \cos \varphi \\ \tau &= \frac{k^2 a}{3} \left\{ \begin{array}{ccc} \text{,,} & \text{,,} & \text{,,} \end{array} \right\} \sin \varphi \\ \sigma_t &= \frac{k^2 a}{3} \left\{ -\frac{\alpha^3}{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3} \left( \frac{r_2}{r} \right)^3 + \frac{3(1 + \alpha + \alpha^2)}{1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3} \left( \frac{r}{r_2} \right) - 2 \right\} \cos \varphi \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

但  $\alpha = \frac{r_1}{r_2}$  (内外半徑の比)

$k^2 = \alpha E$  (Young's modulus と溫度伸縮係數との乘積)

$a$  (溫度の大きさを測る尺度による係數)

例へば  $\alpha = 0.6$  即  $r_1 = 0.6 r_2$  とするときは

$$\sigma_r = \frac{k^2 a}{3} K_1 \cos \varphi, \quad \tau = \frac{k^2 a}{3} K_1 \sin \varphi, \quad \sigma_t = \frac{k^2 a}{3} K_2 \cos \varphi, \quad \dots\dots\dots (2)$$

\*) 實は以上の如くして求めたる  $F$  の値は  $m, n$  を増大することによつて  $F$  の眞値に如何程でも近づけ得るも近似値としての  $F$  の Derivatives が又  $F$  の眞値の Derivatives に converge するや否やは斷言出来ないと云ふ難かしい點がある。しかも吾々の問題の要求する處は、實は  $F$  其の物ではなく寧ろその Second Derivatives たる應力の値である。Courant は近來此の點に關して Ritz 法の不備を補ふ一案を考へた (Proc. Int. Congr. App. Mech., Delft, 1924 p. 229), 然し乍ら此れは計算を一層複雑ならしむることは勿論である。此れと反對に Ritz 法の單純化も亦多くの人々によつて案出されつゝある模様である。例へば露の Galerkin, 和蘭の Biezeno, Koch 等 (Föppl; Festschrift S. 62), 吾々はこゝに深く立入ることを止め Numerical example に就いて Ritz 法が實際に應力の決定にも用ひ得るか否かを檢するに止める。



で

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= .099 \left(\frac{r_2}{r}\right)^3 + .901 \left(\frac{r}{r_2}\right) - 1 \\ K_2 &= -.099 \left(\frac{r_2}{r}\right)^3 + 2.703 \left(\frac{r}{r_2}\right) - 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

$r = \beta r_2$  として色々の  $\beta$  の値に對する  $K_1, K_2$  の値は次表の示す如くである。

$\beta$	.6 [ $r_1$ ]	.7	.8	.9	1.0 [ $r_2$ ]
$K_1$	0	-.081	-.086	-.0534	0
$K_2$	-.836	-.391	-.031	+.297	+.604

**PL. I.** (a), (b), (c) に於て (a) は (c) の如き應力強度を生ずべき温度分布の模様を示す等變温度分布によつては何等の熱應力をも生ぜないことを知るが故に (a) の温度分布に  $t = Ar \cos \varphi$  (但  $A$  は任意の常數) の如き温度を附加しても (c) の應力には變化を來たさぬわけである。(b) は斯くの如き場合の一例 ( $A = \frac{a}{r_2}$  と置いた場合) を示したものである。

**第二例** 自由邊を有する輪狀板が  $t = a \cos 2\varphi$  ( $a$  は常數) なる温度分布の下に置かれたる場合

例へば  $\alpha = .6$  即  $r_1 = .6 r_2$  とするとき 14 頁 25 式より

$$\sigma_r = \frac{k^2 a}{8} K_1 \cos 2\varphi, \quad \tau = \frac{k^2 a}{8} K_2 \sin 2\varphi, \quad \sigma_t = \frac{k^2 a}{8} K_3 \cos 2\varphi, \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但 } K_1 &= -2 \times .02561 - 6 \times .054124 \left(\frac{r_2}{r}\right)^4 + 4 \times .59409 \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 - 2 + 4 \log \left(\frac{r}{r_2}\right) \\ K_2 &= 2 \times .02561 - 6 \times .054124 \left(\frac{r_2}{r}\right)^4 + 6 \times .514345 \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 \\ &\quad + 2 \times .59409 \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 - 4 - 4 \log \left(\frac{r}{r_2}\right) \\ K_3 &= 2 \times .02561 + 6 \times .054124 \left(\frac{r_2}{r}\right)^4 + 12 \times .514345 \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 - 6 - 4 \log \left(\frac{r}{r_2}\right) \end{aligned} \right\} (5)$$

$r = \beta r_2$  と置き  $\beta$  に對する  $K_1, K_2, K_3$  の値は次表に示す通りである

$\beta$	.6 [ $r_1$ ]	.7	.8	.9	1.0 [ $r_2$ ]
$K_1$	0	+.010	-.024	-.034	0
$K_2$	0	+.062	-.017	-.056	0
$K_3$	+.822	-.145	-.313	-.093	+.548

**PL. II.** (a) は温度分布, (b) は夫れに應ずる應力分布を示す。

**第三例** 自由邊を有する輪狀板が  $t = a r^2 \cos \varphi$  (但  $a$  は常數) なる温度分布下に置かれ

たる場合

$$\begin{aligned}
 F &= \left( Ar + Br^{-1} + Cr^3 - \frac{k^2 ar^4}{15} \right) \cos \varphi \\
 \sigma_r &= \left( -2Br^{-3} + 2Cr - \frac{k^2 ar^2}{5} \right) \cos \varphi \\
 \tau &= \left( -2Br^{-3} + 2Cr - \frac{k^2 ar^2}{5} \right) \sin \varphi \\
 \sigma_t &= \left( 2Br^{-3} + 6Cr - \frac{4k^2 ar^2}{5} \right) \cos \varphi
 \end{aligned}$$

邊緣條件  $\sigma_r = \tau = 0$  ( $r = r_1$  及  $r_2$  に於て) より

$$B = \frac{k^2 a}{10} \frac{r_1^4 r_2^4 (r_2 - r_1)}{r_2^4 - r_1^4}, \quad C = \frac{k^2 a}{10} \frac{r_2^5 - r_1^5}{r_2^4 - r_1^4}$$

$r_1 = \alpha r_2$  と置けば

$$B = \frac{k^2 a}{10} \frac{(1-\alpha)\alpha^4}{1-\alpha^4} r_2^5, \quad C = \frac{k^2 a}{10} \frac{1-\alpha^5}{1-\alpha^4} r_2$$

應力は

$$\sigma_r = \frac{k^2 ar_2^2}{5} K_1 \cos \varphi, \quad \tau = \frac{k^2 ar_2^2}{5} K_1 \sin \varphi, \quad \sigma_t = \frac{k^2 ar_2^2}{5} K_2 \cos \varphi \dots (6)$$

$$\begin{aligned}
 \text{但 } K_1 &= -\frac{(1-\alpha)\alpha^4}{1-\alpha^4} \left(\frac{r_2}{r}\right)^3 + \frac{1-\alpha^5}{1-\alpha^4} \left(\frac{r}{r_2}\right) - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 \\
 K_2 &= \frac{(1-\alpha)\alpha^4}{1-\alpha^4} \left(\frac{r_2}{r}\right)^3 + \frac{3(1-\alpha^5)}{1-\alpha^4} \left(\frac{r}{r_2}\right) - 4\left(\frac{r}{r_2}\right)^2
 \end{aligned} \dots (7)$$

例へば  $\alpha = .6$  即  $r_1 = .6 r_2$  とすれば

$$\begin{aligned}
 K_1 &= -.0596 \left(\frac{r_2}{r}\right)^3 + 1.0595 \left(\frac{r}{r_2}\right) - \left(\frac{r}{r_2}\right)^2 \\
 K_2 &= .0596 \left(\frac{r_2}{r}\right)^3 + 3.1787 \left(\frac{r}{r_2}\right) - 4\left(\frac{r}{r_2}\right)^2
 \end{aligned} \dots (8)$$

$r = \beta r_2$  において  $\beta$  に対する  $K_1, K_2$  の値を求めれば次表の如くなる。

$\beta$	.6 [ $r_1$ ]	.7	.8	.9	1.0 [ $r_2$ ]
$K_1$	0	+ .078	+ .0016	+ .0615	0
$K_2$	+ .743	+ .439	+ .099	- .297	- .762

PL. III. (a) は温度, (b) は應力を示す。

第四例 半径  $r_0$  の圓板が自由邊を有し  $t = a r^2 \cos \varphi$  なる温度分布の下に置かれたる場合

$$F = \left( Ar + Cr^3 - \frac{k^2 ar^4}{15} \right) \cos \varphi$$

$$\sigma_r = \left( 2Cr - \frac{k^2 ar^2}{5} \right) \cos \varphi$$

$$\tau = \left( \dots \dots \right) \sin \varphi$$

$$\sigma_t = \left( 6Cr - \frac{4}{5} k^2 ar^3 \right) \cos \varphi$$

邊緣條件  $r=r_0$  に於て  $\sigma_r = \tau = 0$  より  $C = \frac{k^2 ar_0}{10}$  を得

$$\sigma_r = \frac{k^2 ar_0^2}{5} K_1 \cos \varphi, \quad \tau = \frac{k^2 ar_0^2}{5} K_1 \sin \varphi, \quad \sigma_t = \frac{k^2 ar_0^2}{5} K_2 \cos \varphi \quad \dots (9)$$

但 
$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \left( \frac{r}{r_0} \right) - \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \\ K_2 &= 3 \left( \frac{r}{r_0} \right) - 4 \left( \frac{r}{r_0} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

$r = \beta r_2$  とおくとき  $K_1, K_2$  の表は

$\beta$	0	.1	.2	.3	.4	.5	.6	.7	.8	.9	1.0 [ $r_0$ ]
$K_1$	0	.09	.16	.21	.24	.25	.24	.21	.16	.09	0
$K_2$	0	.26	.44	.54	.56	.50	.36	.14	-.16	-.54	-1.0

**PL. IV.** (a) は温度, (c) は應力を示す, (b) は (a) に等變溫度を附加したる一例である, 勿論此の場合も同一値の應力を生ずる, (b) 圖を見ると等變溫度が大なれば大なる程等溫線は平行線に近づく故に如何程大なる gradient を有するとも等變溫度はたとへ熱應力を生ぜざれども萬一多少でも等變分布に狂ひを生ずるときは忽ち大なる熱應力を生ずる危険あることを知る。

**第五例** 自由邊を有する輪狀板が  $t = \frac{a \cos \varphi}{r}$  の溫度の下に置かれたる場合

18 頁 (18) 式より

$$\sigma_r = \frac{k^2 a}{2r_2} K_1 \cos \varphi, \quad \tau = \frac{k^2 a}{2r_2} K_1 \sin \varphi, \quad \sigma_t = \frac{k^2 a}{2r_2} K_2 \cos \varphi \quad \dots (11)$$

$\alpha = .6$  即  $r_1 = .6 r_2$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= .264 \left( \frac{r_2}{r'} \right)^3 + .736 \left( \frac{r}{r_2} \right) - \left( \frac{r_2}{r'} \right) \\ K_2 &= -.264 \left( \frac{r_2}{r'} \right)^3 + 2.206 \left( \frac{r}{r_2} \right) - \left( \frac{r_2}{r'} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

$r = \beta r_2$  とおけば  $K_1, K_2$  の値の表は下の如し

$\beta$	.6 [ $r_1$ ]	.7	.8	.9	1.0 [ $r_2$ ]
$K_1$	0	-.141	-.144	-.086	0
$K_2$	-1.563	-.656	-.002	+ .513	+ .942

PL. V. (a), (b) は温度, (c) は應力を示す。

第六例 半径  $r_0$  の圓板が自由邊を有し  $t = A\lambda^2 J_1(\lambda r) \cos \varphi$  (但  $A$  は温度の大きさを測る尺度による係數) なる温度の下に置かれたる場合

23 頁 (16) 式により

$$F = k^2 A J_1(\lambda r) \cos \varphi$$

但  $\lambda$  は  $J_2(\lambda r_0) = 0$  の正の根

應力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -k^2 A \lambda^2 \frac{J_2(\lambda r)}{\lambda r} \cos \varphi \\ \tau &= -k^2 A \lambda^2 \frac{J_2(\lambda r)}{\lambda r} \sin \varphi \\ \sigma_t &= -k^2 A \lambda^2 \left\{ J_1(\lambda r) - \frac{J_2(\lambda r)}{\lambda r} \right\} \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

例へば  $J_2(\lambda r_0) = 0$  の最小正根をとれば

$$\lambda = \frac{5.135^*}{r_0}$$

故に

$$\sigma_r = \frac{k^2 A}{r_0^2} K_1 \cos \varphi, \quad \tau = \frac{k^2 A}{r_0^2} K_1 \sin \varphi, \quad \sigma_t = \frac{k^2 A}{r_0^2} K_2 \cos \varphi \dots \dots (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{但 } K_1 &= - (5.135)^2 \frac{J_2\left(5.135 \frac{r}{r_0}\right)}{5.135 \frac{r}{r_0}} \\ K_2 &= - (5.135)^2 \left\{ J_1\left(5.135 \frac{r}{r_0}\right) - \frac{J_2\left(5.135 \frac{r}{r_0}\right)}{5.135 \frac{r}{r_0}} \right\} \dots \dots (14) \\ &= - (5.135)^2 J_1\left(5.135 \frac{r}{r_0}\right) - K_1 \end{aligned} \right\}$$

\*) Jahnke-Emde: Funktion Tafeln S. 147

而して此れに應ずる温度は

$$t = \frac{A}{r_0^2} \nu \cos \varphi, \quad \nu = (5.135)^2 J_1\left(5.135 \frac{r}{r_0}\right) \dots \dots \dots (15)$$

$\beta = \beta r_0$  と置き  $K_1, K_2, \nu$  の値を求むれば次表の如くなる

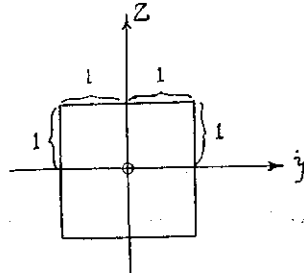
$\beta$	0	.1	.2	.4	.6	.8	1.0 [ $r_0$ ]
$K_1$	0*	-1.334	-3.132	-4.685	-4.161	-2.150	0
$K_2$	0*	-5.179	-8.707	-10.424	-3.987	+4.971	+8.965
$\nu$	0*	6.513	11.109	15.109	8.148	-2.821	-8.965

PL. IV. は此等の値を示す。

第七例 自由邊を有し cosine 形の温度分布をもつ方形板

$a = b = 2$  の場合 (右圖)

$$t = \mathfrak{U} \cos \frac{\pi y}{2} \cos \frac{\pi z}{2} \dots \dots \dots (16)$$



但  $\mathfrak{U}$  は温度の大きさを測る尺度による常数

第一段の近似値として 31 頁 (4). 式の第一項丈とるときは

$$F = (y^2 - 1)^2 (z^2 - 1)^2 \alpha_{00}$$

$$f = \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathfrak{U} \cos \frac{\pi y}{2} \cos \frac{\pi z}{2}$$

$$f \frac{\partial F}{\partial \alpha_{00}} = \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathfrak{U} (y^2 - 1)^2 (z^2 - 1)^2 \cos \frac{\pi y}{2} \cos \frac{\pi z}{2}$$

$$\nabla^2 F = \{(12y^2 - 4)(z^2 - 1)^2 + (12z^2 - 4)(y^2 - 1)^2\} \alpha_{00}$$

此れ等の値を

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_{00}} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \nabla^2 F \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial \alpha_{00}} - f \frac{\partial F}{\partial \alpha_{00}} \right\} dy dz = 0$$

に入れて下の如き  $\alpha_{00}$  を得

$$\alpha_{00} = \frac{0.79405}{53.500} \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathfrak{U} = .01484 \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathfrak{U}$$

\*) 原点  $r=0$  に於ては  $J_1(\lambda r) = 0$  及  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{J_2(\lambda r)}{\lambda r} = 0$

故に應力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4(3y^2 - 1)(z^2 - 1)^2 \alpha_{10} \\ \tau &= -\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = -16yz(y^2 - 1)(z^2 - 1) \alpha_{10} \\ \sigma_y &\text{は } \sigma_z \text{ と同一値} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

により

$z=0$  (中心線) では

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= K_1 \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{I}, \quad \tau = 0 \\ \text{但 } K_1 &= .05936 (3y^2 - 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$z = \frac{1}{2}$  では

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= K_2 \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{I}, \quad \tau = K_3 \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{I} \\ \text{但 } K_2 &= .03339 (3y^2 - 1), \quad K_3 = .05904 (y^2 - 1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$K_1, K_2, K_3$  の値は次表の如し

$y$	0	.2	.4	.6	.8	1.0
$K_1$	-.05936	-.05223	-.03087	+.00475	+.05461	+.11872
$K_2$	-.03339	-.02938	-.01736	+.00267	+.03072	+.06678
$K_3$	0	-.01701	-.02992	-.03419	-.02564	0

次に第二段近似値として四項をとり且此の場合  $\alpha_{10} = \alpha_{01}$  なるにより

$$\begin{aligned} F &= (y^2 - 1)^2 (z^2 - 1)^2 \{ \alpha_{00} + \alpha_{10}(y^2 + z^2) + \alpha_{11}y^2z^2 \} \\ f \frac{\partial F}{\partial \alpha_{00}} &= E \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{I}, \quad E \equiv (y^2 - 1)^2 (z^2 - 1)^2 \cos \frac{\pi y}{2} \cos \frac{\pi z}{2} \\ f \frac{\partial F}{\partial \alpha_{10}} &= F \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{I}, \quad F \equiv (y^2 - 1)^2 (z^2 - 1)^2 (y^2 + z^2) \cos \frac{\pi y}{2} \cos \frac{\pi z}{2} \\ f \frac{\partial F}{\partial \alpha_{11}} &= G \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{I}, \quad G \equiv (y^2 - 1)^2 (z^2 - 1)^2 y^2 z^2 \cos \frac{\pi y}{2} \cos \frac{\pi z}{2} \end{aligned}$$

$$\nabla^2 F = A \alpha_{00} + B \alpha_{10} + C \alpha_{11}$$

$$\begin{aligned} \text{但 } A &\equiv (12y^2 - 4)(z^2 - 1)^2 + (12z^2 - 4)(y^2 - 1)^2 \\ B &\equiv (30y^4 - 24y^2 + 2)(z^2 - 1)^2 + (12z^4 - 4)(y^2 - 1)^2 y^2 \\ &\quad + (12y^2 - 4)(z^2 - 1)^2 z^2 + (30z^4 - 24z^2 + 2)(y^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

$$C \equiv (30\eta^4 - 24\eta^2 + 2)(z^2 - 1)^2 z^2 + (30z^4 - 24z^2 + 2)(\eta^2 - 1)^2 \eta^2$$

此れ等の値を

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha_{00}} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \nabla^2 F \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial \alpha_{00}} - f \frac{\partial F}{\partial \alpha_{00}} \right\} dy dz \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha_{10}} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \nabla^2 F \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial \alpha_{10}} - f \frac{\partial F}{\partial \alpha_{10}} \right\} dy dz \\ \frac{\partial J}{\partial \alpha_{11}} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ \nabla^2 F \frac{\partial \nabla^2 F}{\partial \alpha_{11}} - f \frac{\partial F}{\partial \alpha_{11}} \right\} dy dz \end{aligned} \right\}$$

に入れて

$$\left. \begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ A^2 \alpha_{00} + AB \alpha_{10} + AC \alpha_{11} - \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{U} E \right\} dy dz &= 0 \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ AB \alpha_{00} + B^2 \alpha_{10} + BC \alpha_{11} - \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{U} F \right\} dy dz &= 0 \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left\{ AC \alpha_{00} + BC \alpha_{10} + C^2 \alpha_{11} - \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{U} G \right\} dy dz &= 0 \end{aligned} \right\}$$

積分値を入るれば

$$\left. \begin{aligned} 53.500 \alpha_{00} + 11.148 \alpha_{10} + .744 \alpha_{11} - .7940 \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{U} &= 0 \\ 11.148 \alpha_{00} + 22.352 \alpha_{10} + 2.352 \alpha_{11} - .1698 \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{U} &= 0 \\ .744 \alpha_{00} + 2.352 \alpha_{10} + .472 \alpha_{11} - .00908 \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{U} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

此れを解いて

$$\alpha_{00} = .01470, \quad \alpha_{10} = .00143, \quad \alpha_{11} = -.01105$$

故に應力は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= 4(z^2 - 1)^2 (3\eta^2 - 1) \alpha_{00} + 2(z^2 - 1)^2 (15\eta^4 - 12\eta^2 + 6\eta^2 z^2 \\ &\quad - 2z^2 + 1) \alpha_{10} + 2(z^2 - 1) z^2 (15\eta^4 - 12\eta^2 + 1) \alpha_{11} \\ \tau &= -16\eta z (\eta^2 - 1) (z^2 - 1) \alpha_{00} - 8\eta z (\eta^2 - 1) (z^2 - 1) (\eta^2 + z^2) \alpha_{10} \\ &\quad + 4\eta z (\eta^2 - 1) (z^2 - 1) (3\eta^2 - 1) (3z^2 - 1) \alpha_{11} \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

$\sigma_y$  は  $\sigma_z$  と同一値となる

$z=0$  (中心線) に於て

$$\sigma_z = L_1 \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{U}, \quad \tau = 0$$

但  $L_1 = 4 \times .01470(3y^2 - 1) + 2 \times .00143(15y^4 - 12y^2 + 1) \dots\dots\dots(21)$

$z = \frac{1}{2}$  では

$$\sigma_z = L_2 \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathfrak{H}, \quad \tau = L_3 \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathfrak{H}$$

但  $L_2 = \frac{9}{4} \times .01470(3y^2 - 1) + \frac{9}{16} \times .00143(30y^4 - 21y^2 + 1) - \frac{9}{32} \times .01105(15y^4 - 12y^2 + 1)$   
 $L_3 = 6 \times .01470y(y^2 - 1) + \frac{3}{4} \times .00143y(y^2 - 1)(4y^2 + 1) - \frac{3}{8} \times .01105y(y^2 - 1)(3y^2 - 1) \dots\dots\dots(22)$

$L_1, L_2, L_3$  の値は下表の如し

$y$	0	.2	.4	.6	.8	1.0
$L_1$	-.0560	-.0502	-.0321	+.0008	+.0526	+.1290
$L_2$	-.0354	-.0306	-.0168	+.0048	+.0320	+.0618
$L_3$	0	-.0178	-.0309	-.0347	-.0254	0

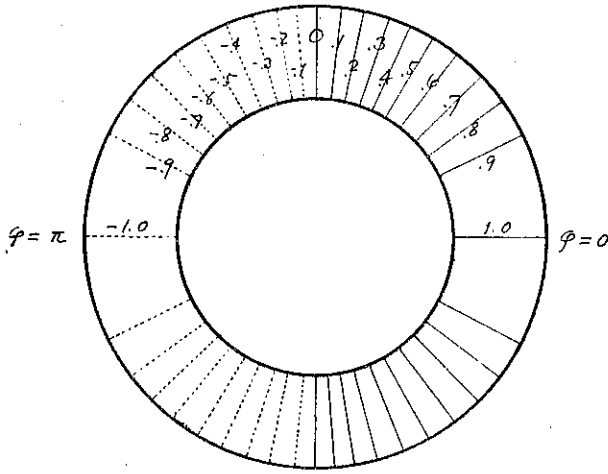
$L_1, L_2, L_3$  と  $K_1, K_2, K_3$  とを比較するときはその差僅少なるを見れば此の算法を信じ得べき? 勿論これらの値は何れも任意の断面に於て statical conditions は充分満足してゐる (PL.

VII 参照)

東京, 1927, 10 月



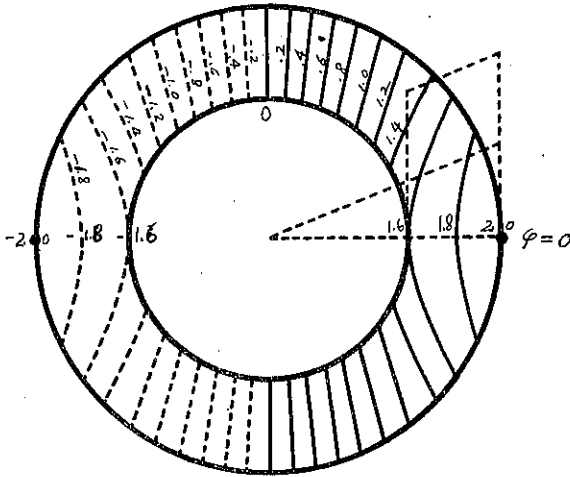
Pl. I. (a)



$$t = a \cos \varphi$$

[Fig. shows  $\cos \varphi$ ]

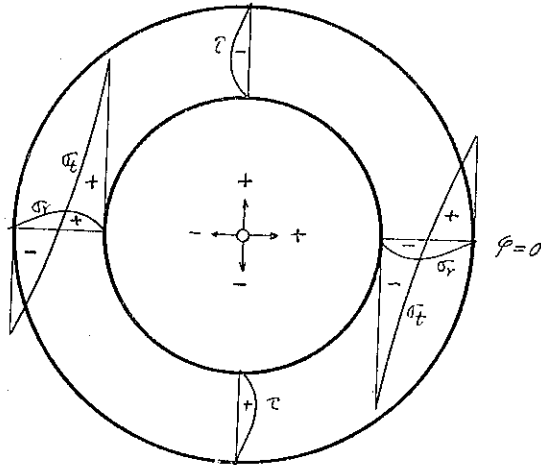
Pl. I. (b)



$$t = a \left(1 + \frac{r}{r_2}\right) \cos \varphi$$

[Fig. shows  $\left(1 + \frac{r}{r_2}\right) \cos \varphi$ ]

Pl. I. (c)

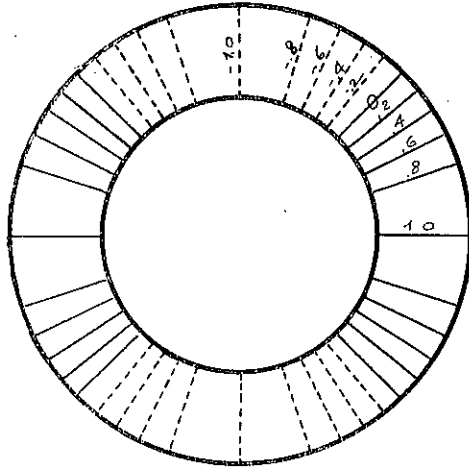


$$\sigma_r = \frac{k^2 a}{3} K_1 \cos \varphi$$

$$\tau = \frac{k^2 a}{3} K_1 \sin \varphi$$

$$\sigma_t = \frac{k^2 a}{3} K_2 \cos \varphi$$

Pl. II. (a)

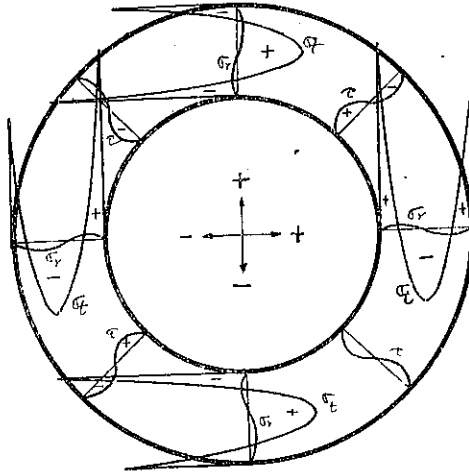


$$t = a \cos 2\varphi$$

[Fig. shows  $\cos 2\varphi$ ]

$\varphi = 0$

Pl. II. (b)



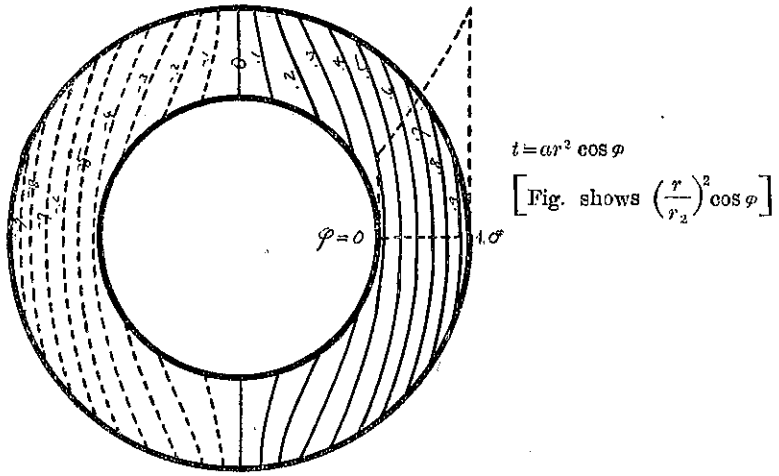
$$\sigma_r = \frac{k^2 a}{8} K_1 \cos \varphi$$

$$\tau = \frac{k^2 a}{8} K_1 \sin \varphi$$

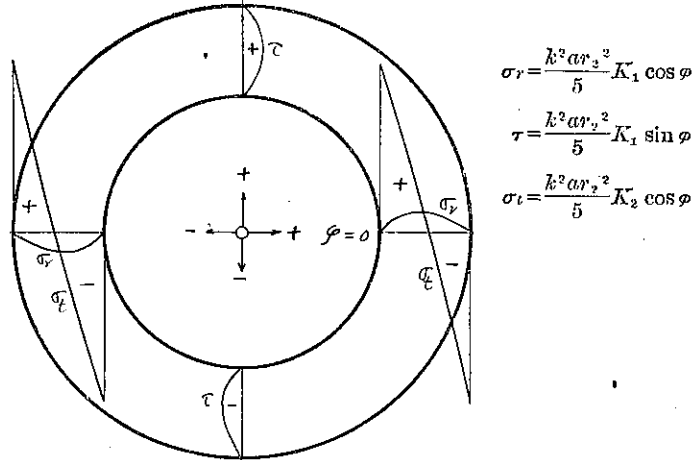
$$\sigma_t = \frac{k^2 a}{8} K_2 \cos \varphi$$

$\varphi = 0$

Pl. III. (a)

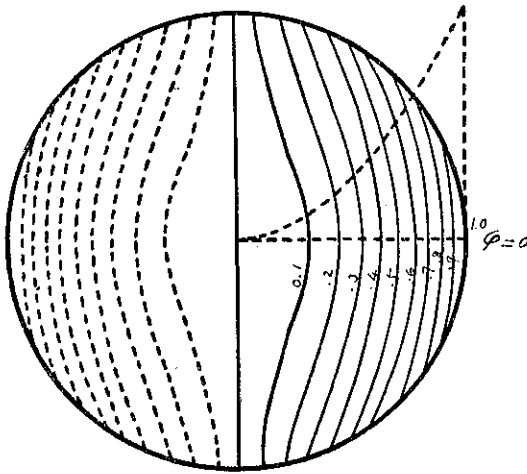


Pl. III. (b)



(土木學會誌第十三卷第六號附圖)

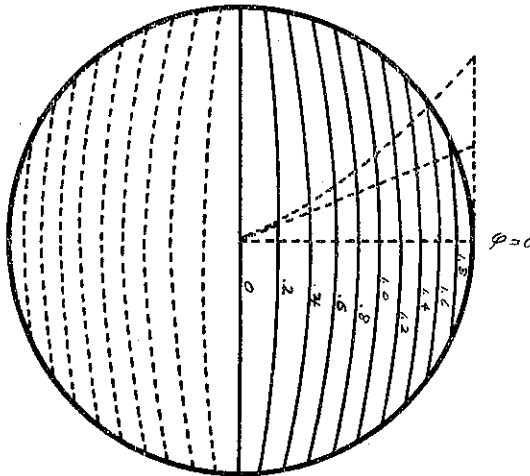
Pl. IV. (a)



$$t = ar^2 \cos \varphi = \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \cos \varphi \cdot r_0^2 a$$

[Fig. shows  $\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 \cos \varphi$ ]

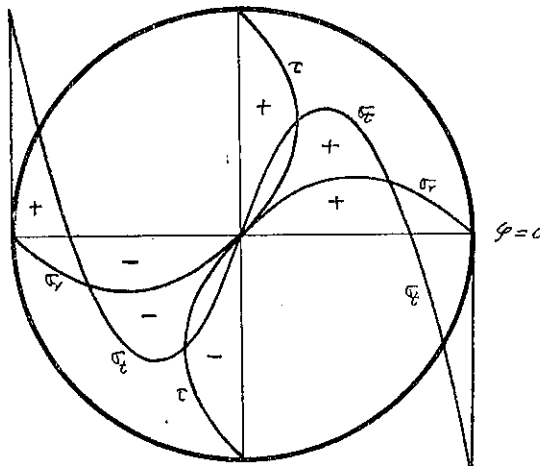
Pl. IV. (b)



$$t = a(r^2 + rr_0) \cos \varphi = ar_0^2 \left\{ \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{r}{r_0}\right) \right\} \cos \varphi$$

[Fig. shows  $\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \frac{r}{r_0} \cos \varphi$ ]

Pl. IV. (c)

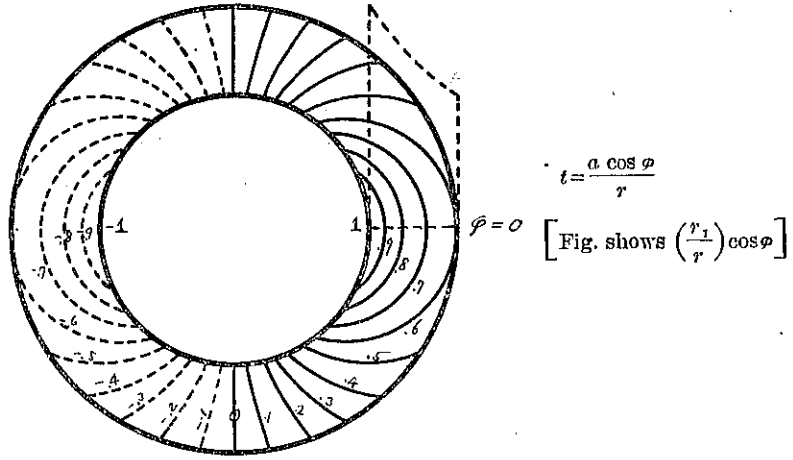


$$\sigma_r = \frac{k^2 ar_0^2}{5} K_1 \cos \varphi$$

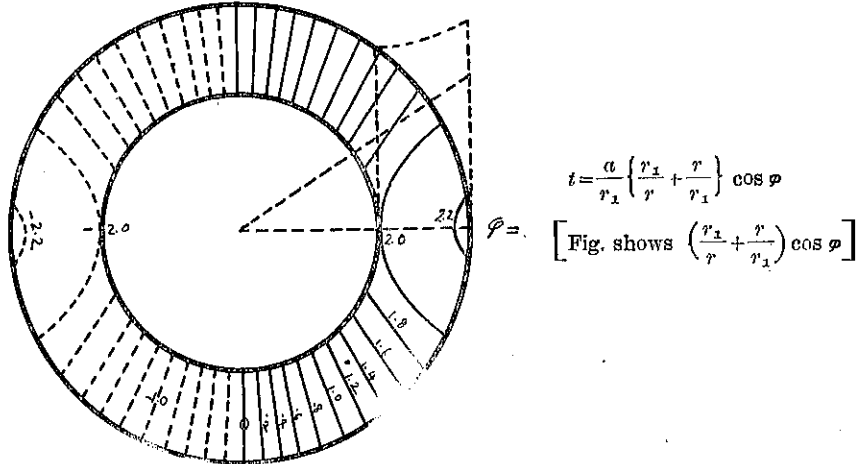
$$\tau = \frac{k^2 ar_0^2}{5} K_1 \sin \varphi$$

$$\sigma_t = \frac{k^2 ar_0^2}{5} K_2 \cos \varphi$$

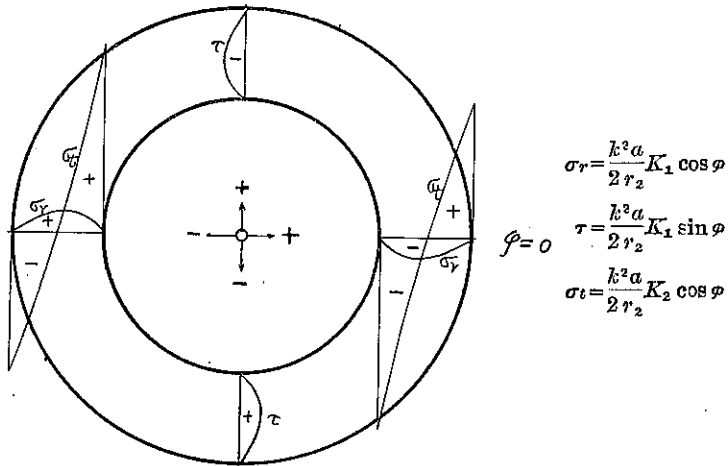
Pl. V. (a)



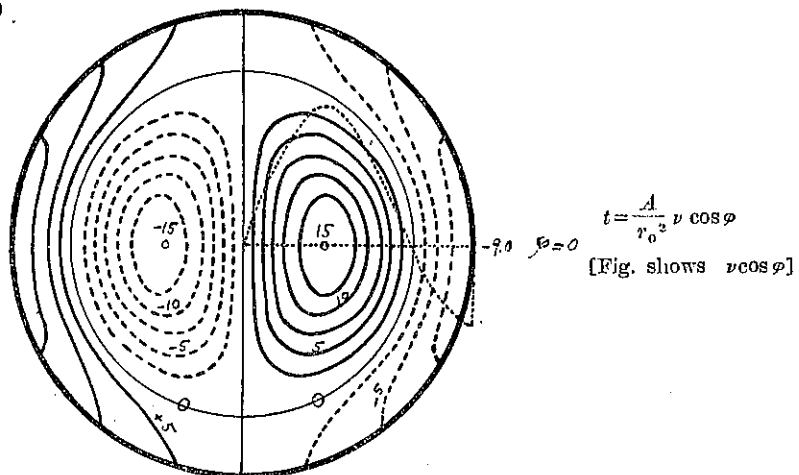
Pl. V. (b)



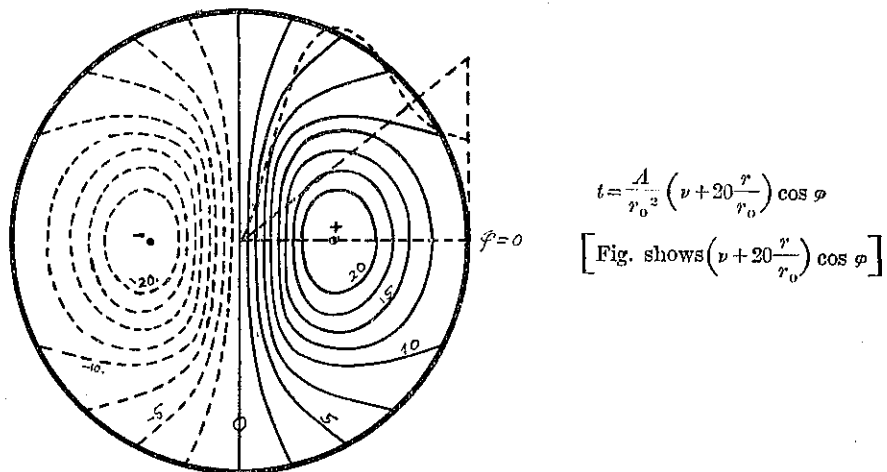
Pl. V. (c)



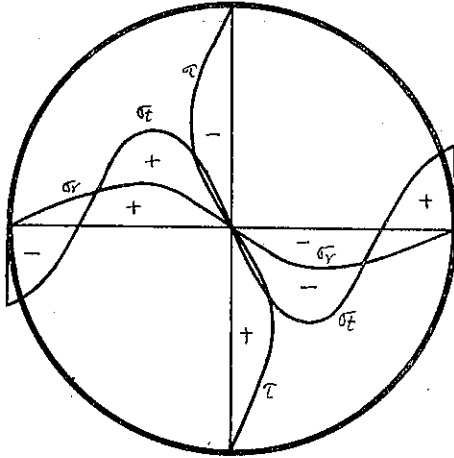
Pl. VI. (a)



Pl. VI. (b)

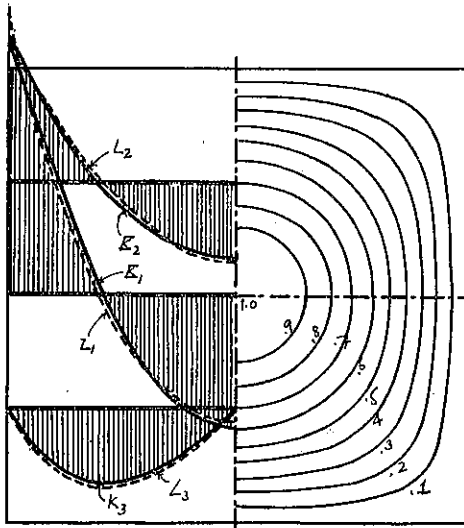


Pl VI. (c)



$$\begin{aligned} \sigma_r &= K_1 \cos \varphi \frac{k^2 A}{r_0^2} \\ \tau &= K_1 \sin \varphi \frac{k^2 A}{r_0^2} \\ \sigma_\theta &= K_2 \cos \varphi \frac{k^2 A}{r_0^2} \end{aligned}$$

Pl VII.



$$Z=0: \quad \sigma_z = \left( \frac{K_1}{L_1} \right) \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{Y}($$

$$\tau = 0$$

$$Z = \frac{1}{2}: \quad \sigma_z = \left( \frac{K_2}{L_2} \right) \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{Y}($$

$$\tau = \left( \frac{K_3}{L_3} \right) \frac{k^2 \pi^2}{4} \mathcal{Y}($$

$$i = \mathcal{Y} \left[ \cos \frac{\pi y}{2} \cos \frac{\pi z}{2} \right]$$

[ Fig. shows  $\cos \frac{\pi y}{2} \cos \frac{\pi z}{2}$  ]