參考資料

土木學會誌　第十二卷第四號　大正十五年八月

矩形斷面の水路に於ける水流に就て

(Philosophical Magazine, May, 1925, Harold Teffreys, M. A., D. Sc., 所論)

一 緒　　言

圓管中の流水は其流速が流體の粘性及び其圓管の大さに基く或限度を超過しない限は粘性體の流れの法則に從ふ事は明なことである，然れ共流速が此限度を超過すると水の運動は普通騷流 (Turbulent flow) となり，其摩擦の應力 (Frictional stress) は流速の一乘の代りに自乘に比例する樣になる，是に對して平面上を流體が流れる場合の諸問題に關しては實驗より來る諸法則が兩者よく類似して居る事は一般に知られては居るが其實驗的の方面は餘り注意せられて居なかつた樣である，上面が自由境界面なる場合の平面或は略平面である面上を流れる騷流は天然に於ては屢々起る自然界によく見らるゝ事であるが斯の如き場合の騷流に對しての面摩擦 (Skin friction) の係數及び Reynolds の標準 (Criterion) を直接の實驗より得る決定が望ましい問題で，以下是が研究に就きて述べんとするのである。嘗て L. Hopf は上述の條件に付て Reynolds の標準の決定を爲したが，然し氏は限界速度を超過せし時の面摩擦の係數は見出さなかつた，而して採用せし方法は 2 者の場合に於て著しく異なつて居る。

二 理　　論

1 純粘性水流 (Purely viscous flow)

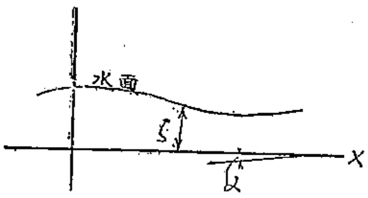
流體內に流れの方向に直角に測つて dz なる距離に 2 個の並行せる平面を考へ，其內の 1 平面が固定し，他の面が du なる速度で運動するものと想像する場合に此運動に反對して F なる力が兩平面の面積 S に働く，然らば次の關係式を得る

$$F=\mu S\frac{du}{dz}$$

上式の μ を流體の粘性係數と稱へて或特別なる流體に對しては常數で，溫度に對しては變化し，壓力に對しては變化しない値である，水の場合では

$$\mu=0.01779(1+0.033680\theta+0.000220\,99\theta^2)^{-1}\,C.G.S.\ \text{單位}$$

但 θ は攝氏の溫度である (Lamb's Hydrodynamics p. 545)，偖粘性流體が平面上を流れるものとすると其運動の式は水路の底を x 軸，是に直角の方向を z 軸にとり且つ



第　一　圖

α; 表面が水平線となす傾斜角, u; 流體の流速, ζ; 水深, ν; μ を流體の密度 ρ にて除せる商にして運動粘性 (Kinematic viscosity), g; 重力の强さ, P; 壓力とすると, 水路が均齊幅であり且流體が不可壓性とすると力學的の條件は x の方向に關しては

$$\frac{du}{dt}=g\sin\alpha-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\quad\cdots\cdots(1)$$

z の方向に關しては

$$0=-g\cos\alpha-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\quad\cdots\cdots(2)$$

Lamb. p. 547.

(2) 式に於て垂直加速度は g に比して極めて小なるを以て省略する。

次に連續に對する式を得んために x の方向に幅 dx なる斷面を通過する流量を考へれば是に流入する量は dt なる時間内には udt であつて, 流出する量は $\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}dx\right)dt$ である, 故に差引すると $-\frac{\partial u}{\partial x}dxdt$ は dx 斷面内に殘る量である, これを深さ全部に就て考へると z につきて 0 から ζ 迄積分せばよし, 而してこのものは $\frac{\partial\zeta}{\partial t}dt\,dx$ に等し, 故に連續式は次の如し

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\int_0^\zeta\frac{\partial u}{\partial x}dz\quad\cdots\cdots(3)$$

定流 (Steady flow) の場合では (3) 式は兩邊とも 0 となる、又 (2) 式は $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ が $\tan\alpha$ に比較にならない程のものである間は壓力の項は (1) 式より省略し得る事を示す, 是は一般的の場合を言つて居るのであつて (1) 式の解は定流なるを以て $\frac{\partial u}{\partial t}=0$, 且 $u\frac{\partial u}{\partial x}$ は二次なるを以て尙上述により壓力の項を各省略せば (1) 式は次の如くになる

$$0=g\sin\alpha+\nu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

積分すると

$$g\sin\alpha+\nu\frac{\partial u}{\partial z}+C_1=0$$

尙一度積分すると

$$\frac{1}{2}g\sin\alpha\, z^2+\nu u+C_1 z+C_2=0$$

C_1 及 C_2 は常數である，之等の値を定めるために境界の條件を入れると，$z=0$ 即底では流速 $u=0$ なる故，第二式に是を入れると $C_2=0$ となる，次に $z=\zeta$ 即自由表面では $\frac{\partial u}{\partial z}=0$（上述）なる故第一式に入れると $C_1=-g\sin\alpha\zeta$ となる，由つて是等の常數を第二式に入れると結局次の式となる

$$u=\frac{g\sin\alpha}{2\nu}(2z\zeta-z^2) \quad\ldots\ldots(4)$$

表面流速 u_1 を求めんには (4) 式に於て $z=\zeta$ と置くと

$$u_1=g\sin\alpha\frac{\zeta^2}{2\nu} \quad\ldots\ldots(5)$$

を得る、次に又平均流速 u_0 を得んとせば自由表面以下の各深さに於ける流速を平均したるものである故に (4) に依つて

$$u_0=\frac{g\sin\alpha}{2\nu\zeta}\int_0^{\zeta}(2z\zeta-z^2)dz=g\sin\alpha\frac{\zeta^2}{3\nu} \quad\ldots\ldots(6)$$

(6) 式を (5) 式に比較すると平均流速は表面流速の常に 2/3 である事を知る。

流れの方向に垂直なる單位横斷面の流量は，全水深に付ては

$$Q=u_0\zeta=g\sin\alpha\frac{\zeta^3}{3\nu} \quad\ldots\ldots(7)$$

故に Q 及 ν を測定せば深さ並に任意の深さに於ける流速が知られる，又反對に Q 及 u 或は ζ を測定すると運動粘性 ν を決定する事が出來る。

2 騷　流 (Turbulent flow)

流體内の渦動は其形を變へつゝ流れの主要部内を流下する，渦動のかくの如き運動が起つた場合には或定點に於ける速度の大さ及び方向は多少不規則ながら週期的に變化する，是を騷流と云ふ。

今 u を以て考へる深さに於ける平均流速とすると（即渦動流速 Eddy velocity は平均として考へる），底面の單位面積の摩擦力は $\kappa\rho u_1^2$ である，但 κ は面摩擦の常數である，水が流下する場合に加速度を生じないためには重力と面摩擦との間に次の關係が必要である。

即　　$\kappa\rho u_1^2=g\rho\zeta\sin\alpha$

或は　　$\kappa u_1^2=g\zeta\sin\alpha \quad\ldots\ldots(1)$

騷流の場合では平均流速と表面流速との比は不確定のものである，今此比を m として其値を決定せんとす。(1) 式を用ひて

$$Q=mu_1\zeta=m\left(\frac{g\zeta\sin\alpha}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}}\zeta=m\left(\frac{g\sin\alpha\,\zeta^3}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2}}\;\ldots\ldots\ldots(2)$$

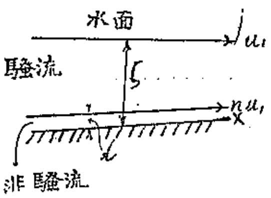
$$=\frac{m\,\kappa\,u_1^3}{g\sin\alpha}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

上式に於て若し m の値が既知であれば Q 及 u_1 或は ζ を測定せば k を知る事が出來る。

騷流に於ては流體と水路を構成する固體との境界に接近して急速に剪斷 (rapid shearing) せらるゝ層流 (Laminar flow) の區界 (Region) がある，今斯の如き騷流層 (Turbulent layer) と非騷流層 (Non-turbulent region) との間の境界の流速を nu_1 なりとし非騷流層の厚さを l とする，但し l は ζ に比し小なりと假定す(後出)，流體と固體との接觸面に於ける條件は

$$u=0\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$\nu\frac{\partial u}{\partial z}=\kappa u_1^2\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$



第　二　圖

第二次項 $l^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ を省略し得る程 l が小なるものとせば (5) は

$$\nu nu_1/l=\kappa u_1^2$$

或は

$$l=\nu n\kappa/u\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

尙騷流層に於ける條件は渦動粘性 (Eddy viscosity) K なる均齊係數により表示し得るものとすれば此層の內部に於ては (1) に於けると同樣に只 ν の代りに K を用ひ，且境界の條件としてでは $z=\zeta$ の場合に $u=u_1$ 及 $\frac{\partial u}{\partial z}=0$ として積分の定數を決定すると下式を得る

$$u=u_1-\frac{g\sin\alpha}{2K}(\zeta-z)^2\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$z=l$ なる深さでは $u=nu_1$ とす，是等の値を上式に入れ，且 l は ζ に比し小なるを以て省略すると

$$(1-n)u_1=g\sin\alpha\zeta^2/2K\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

騷流層に於ける平均流速は

$$\frac{1}{\zeta-l}\int_l^\zeta u\,dz=\frac{1}{\zeta-l}\int_l^\zeta\left\{\frac{g\sin\alpha\,\zeta^2}{2K(1-n)}-\frac{g\sin\alpha}{2K}(\zeta-z)^2\right\}dz$$

$$=\frac{g\sin\alpha\,\zeta^2}{2K(1-n)(\zeta-l)}\int_l^\zeta dz-\frac{g\sin\alpha}{2K(\zeta-l)}\int_l^\zeta(\zeta-z)^2dz$$

$$=\frac{g\sin\alpha}{2K}\left\{\frac{\zeta^2}{1-n}-\frac{(\zeta-l)^2}{3}\right\}$$

$$=\frac{g\sin\alpha\zeta^2}{2K}\left(\frac{1}{1-n}-\frac{1}{3}\right)$$

$$=u_1\left(\frac{2}{3}+\frac{n}{3}\right)$$

而して非騒流層に於ての平均流速は $\frac{1}{2}nu_1$ なり，依つて全水深の平均流速はは下式により與へらる

$$mu_1\zeta=(\zeta-l)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n\right)u_1+l\frac{1}{2}nu_1 \dots\dots\dots\dots\dots(9)$$

實用には

$$m=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}n \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(10)$$

にて充分なり，以上により表面速度及び非騒流層の境界に於ける速度を測定すれば平均流速を知る，尙 (8) 及 (1) から

$$2K=\frac{g\sin\alpha\zeta^2}{(1-n)u_1}=\frac{\kappa^2u_1^3}{(1-n)g\sin\alpha}$$

$$=\frac{\kappa Q}{m(1-n)} \quad \text{(3) に依る} \dots\dots\dots\dots(11)$$

斯くして渦動粘性を決定する事が出來る，尙 (6) を書き直すと

$$\frac{l}{\zeta}=\frac{\nu nm}{\kappa u_1\zeta m}=\frac{mn}{\kappa}\bigg/\frac{Q}{\nu}$$

となる，是より l/ζ の小なるためには Q/ν が nm/κ に比して大なる事が必要である，若し此條件が滿足せられなければ非騒流層は水の深さの可なり大部分を占めるを以つて從つて重要なる更正が必要になる，

3 The Reynolds number

力學的な表はし方により平面上の水の運動に對する抵抗力は普通次の形により示さる，

$$F=\kappa\rho u_1^2 f\left(\frac{Q}{\nu}\right)\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

No-dimensional parameter Q/ν はこゝでは Reynolds の標準 (Criterion) として用ひる，夫は Q 及 ν は直接に自由にする事が出來る利益がある，即 Q は水の供給を調節する事により，ν は溫度を變化するか又は溶解せる物質の量を加減する事による。

Q/ν が非常に大なる時は $f(Q/\nu)$ は實用には 1 となり，小なれば (1) より次の如くなる

$$f\left(\frac{Q}{\nu}\right)\doteqdot\frac{4}{3}\frac{\nu}{\kappa Q} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

これによると純粘性運動より騒流に移るのは Q/ν が $\frac{4}{3\kappa}$ の附近なる時である事が判かる乍然共移り方は突然ではない。

三 實 驗

4 略

5 水流に就ての研究

長さ 364 cm, 幅 10.2 cm, 深さ 5 cm (何れも內法)の木樋を用ゐた, 其上端は閉鎖し下端は開かれ全部ペンキ塗とす, 木樋の床よりの兩端の高さは塊により高くも, 低くも爲し得られる仕掛とす, 給水の方法は水槽より取り, その水頭は常に同一なる樣に設計せられる, 而して水が木樋に入る前に水流の不規則を減ずるために Mallock 氏の裝置を通過する樣に作らる, 此方法では最初眞鍮版の數多の孔を通じて滲透し, 次で2個の堰を越へて遂に滑かなる金屬の棧を過ぎて木樋の頭部に入る, 非常に緩やかなる速度の時には棧の全部を濕ほす事は困難であるを以て其時を除き水は樋と殆ど等しき幅の均齊なる薄き層になつて木樋に入る。

ν 或は κ を決定するには 3 量 Q, u, 及び ζ の內の 2 者を測定する必要がある, Q の測定には 2,000 C.C. の容器に水が充滿する時間を測定せば水の供給の全量を知る, 而して木樋の幅にて1秒間の流器を除せば可なり, 水深を見出すには仲々困難である, 水面が實際に平面であるとすると木樋の頂に橫に四角斷面の棧を置き, 而して底と水面とを鋼尺にて棧木からの下方の高さを測定すればよきも, 水面は常に波を以つて蔽はれて居る, 最も目立つは表面張力により起されたる膜が乾ける所の端より船の波(Ship wave)の如くに廣がる處の Standing wave である, 此現象は手を側板に沿て走らせ且濕りかへせば短時間に可なり減じ得る事が出來る, 此外に普通進行波 (Progressive wave) があつて其振幅大なるを以つて明瞭である, 然し進行速きために認める事は困難である, 是等の 2 形式の波のために深さの測定は 1 mm 以內の信用は不可能である, 但全體の深さは普通僅に約 5 mm であつた, 而して計算に於ては立方されるので此方法は放棄した, Hopf 氏は深さの測定の困難なる事に就て評論したが著者の實驗よりは以上の成功を收めた樣である。

依て著者は觀測に際しては既知の距離を認識され得る物體を流して其通過時間を讀みて u_1 を知る方法を採つた, 最初には廣さ約 1 cm² の紙片を木樋の上流部より 50 cm の所に落して殘りの距離 314 cm を通過する時間を測つた, 此方法は普通充分に役立つたが水深が淺い時は紙片が底部に曳かれ勝ちであるために此時は容易に認められるから觀測から除外した, 此方法よりもインキの一滴を水に落して夫を觀測する方が, より好成績であつた事が證せられた, インキの點(Patch)の前端が表面速度を與へる, 此方法は紙片による結果と全く一致した。

水流が騷流になる Q の最少量に該當する限界の Reynolds number は水にインキを落す前記の方法により見出す事が出來る, インキが表面張力に由るものか, 表面上に淡く均齊に染められたる斑點を殘す代りに粘性水流では細き線を曳くが, 騷流の場合ではインキの點の前端が均齊でなくて斑らになり, 染め色が連續的に變化する樣に見える處の長き區域に涉つ

て後方にぼかす，此觀測に用ひたインキは青黑の萬年ペンインキが大部分であつた，その密度は水よりも可なり大であつた，又僅かのメチルが混入されて居るアルコールを加へて水の密度にしてある赤インキを用ひたが規則正しき差異は示さなかつた，是恐らくは兩方の場合に於てインキが加へられた時の混合法が密度の差に關して注意が充分に周到でなかつたためである。

木樋の長さが底の最急勾配線に添はねばならぬ事は重要なる事である，換言せば側板に垂直なる底の線は水平でなければならぬ，然らざれば水は一側を流下する，其他粘性或は面摩擦係數に對して過小の結果を得る。

Q 及 u_1 が觀測せられると ν 或は $m\kappa$ は次の公式から得られる，$m\kappa$ に對しては (2) の (3) 式を書き直して

$$m\kappa = \frac{Qg\sin\alpha}{u_1^3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ν に對しては (1) の (5) 及 (7) 式より ζ を消去して

$$\nu = \frac{9}{8}\frac{Q^2 g\sin\alpha}{u_1^3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

是等の結果は次に表にして Q の大さの順序に配列した，$m\kappa$ 及び ν は觀測の各組に對して夫々計算した。

實驗から見出した ν の最初の値（次表參照）は水の眞の粘性に殆ど相等し，實際の溫度に於て水に對する表より見出された更正の値は 0.0131, 0.0119 及 0.0115 である，故に給水の是等の速さに對し水流は推測上全く或は殆ど全く薄片 (Laminar) である，然し Q の總ての他の値に對し公式 (2) より見出した ν の値は眞の粘性よりは非常に大である，故に運動は騷流である，由つて $m\kappa$ を見出すために初めの 3 者を省略して殘りの 21 を用ひる，1,000 $m\kappa$ の色々の値の度數の分布は 1.7～1.9 が 2 回; 1.9～2.1 が 2 回; 2.1～2.3 が 6 回; 2.3～2.5 が 3回; 2.5～2.7 が 3 回; 2.7～2.9 が 4 回; 2.9 より以上が 1 回である，算術平均値が 2.38 で標準偏倚は 0.31 である，故に算術平均の概然的誤差は 0.05 である，斯くて $m\kappa$ は 0.00238±0.00005 である。

Q	u_1	cosec α	ν	$m\kappa$	n
cm^2/sec	cm^2/sec		10^{-2}cm^2/sec.X	10^{-3}X	
2.97	32.9	22.3	1.20	3.68	
3.46	37.5	24.3	1.03	2.65	
4.29	45.0	22.2	1.01	2.08	
6.35	50.0	22.3	1.60	2.24	
7.35	68.0	12.3	1.54	1.87	
7.46	53.0	24.3	1.66	1.99	
7.60	58.0	22.3	1.75	2.05	

12.60	48.0	43.0	3.68	2.60	
12.60	73.0	12.3	——	2.58	
13.70	60.0	24.3	——	2.57	0.87
16.40	68.0	22.3	——	2.28	0.77
17.80	65.0	22.3	——	2.87	0.75
18.60	67.0	22.2	——	2.73	0.84
18.90	87.0	12.3	——	22.8	
18.90	95.0	7.9	——	2.75	0.81
18.90	70.0	23.0	——	2.33	
22.20	71.0	22.2	——	2.75	0.88
26.70	79.0	22.2	——	2.38	0.82
31.30	85.0	22.2	——	2.26	0.87
37.60	83.0	22.3	——	2.90	
40.00	131.0	7.35	——	2.38	
40.00	106.0	15.6	——	2.12	
40.00	61.0	69.0	——	1.74	
40.00	103.0	15.6	——	2.30	

平均値より偏倚を引起す主なる要素は速度の測定の不正確である，木樋を流れる水の觀測時間は平均約5秒である，而して是は1/5秒時迄刻まれたストップ•ウオッチにて測定した，各讀みは數度反覆した，而してきまつて觀測は1秒の1/5乃至2/5の差があつた，斯くて速度の概然的の誤差の比較は 4% であるが計算では立方せられ m_κ では 12% の誤差となる，これは測定の標準偏倚に略等し，Q 及 α は漸く 1 或は 2 % より大なる誤差である，故に速度の測定がより正確であれば概然的誤差は可なり減少せられるのである。

6　m の決定

速度を測るのにインキを水に落す方法の場合には水中のインキの點の前及び後の双方を必ず木樋に沿つて時間を測る，渦が騷流層を通じて垂直にインキを分布すると想像するのが尤もらしい，インキが非騷流層に入り込むと騷流層に於けるインキよりは非常に色が薄らいで早く長さの方向に廣がる，故に騷流に於て n はインキの點の背後は騷流及非騷流の間を移動する速度に該當するものと思はれる，此假定に於て n の値は先の表にて與へられる，平均値は 0.8±30.02 なる故に (2) の (10) によつて m は 0.94±0.01 である，かくて κ は 0.00253 ±0.00006 である。

7　The Critical Reynolds number

1/15 及 1/23 の傾斜の木樋にて水の運動が實際に騷流であるか否かを知るために數滴のインキを加へる，各場合に Q が約 $3.8cm^2/sec$ なる時騷流となる事を知つた，溫度は 12°.4 の

時粘性は 0.0123 cm^2/sec となる，かくて Critical Reynolds number は Q/ν より約 310 となる。

Hopf は他の方法で 300 乃至 330 を得た，又 ν に對しても (5) の (2) と同樣の公式から得た，或極限以上の Q の値に對しては定數となり次で Q と共に殆ど直線的に增加し始める，此極限が Critical Reynolds no. を與へるのである，此値に達する迄は運動は純粹の粘性であつて平均速度は表面速度の 2/3 である事は前記の通りである，夫以上は騷流層の垂直の區域は一般に增加し且同時に比が昇る。

水の摩擦の 2法則は Reynolds no. の $\frac{4}{3\kappa}$ 即 530 なる時は同値となる，故に 1 法則より他の法則へは漸次に移らねばならぬ即 Q/ν が 310 に達する場合には直線の法則より自乘の法則に急激に變ずるのではない。

8　渦動粘性 (The eddy viscosity)

n 及 κ に對して見出された値を (2) の (11) 式に代入すると一般に次の式を得る。

$$K=0.008\,Q \quad \cdots\cdots (1)$$

此結果は水の供給が Reynolds の標準値以上に多量なる事及び K は裏面以下の總ての距離に對して同樣なる事の假定の許に立脚して居る，夫は n の不同のために變化せんも然し如斯き不同の範圍は大ならざる樣である，若し不同が起るものとせば夫は多分より速き速度に於ては表面を底から，より多く無關係になす方向に働くのであらう，かくて n は減少す可し，乍然 n が 0 となるも K は只 3/4 κQ 即 0.00192 Q に變化するのみである，故に K の大さの次 (order) は何れの場合にも固定である樣だ，實驗に用ひた Q の最大値即 40cm^2/sec に對しては K は 0.32cm^2/sec として見出された。

9　非騷流層 (The non-turbulent layer)

水流の速さが限界速度の僅か 2 或は 3 倍の時にはインキの 1 滴を騷流を通過して非騷流層の流れの內に置き，且其層に於ける剪力に由つて長き直線の filament に引き伸さる，騷流に置かれたインキは自然に散ばり且前方へ突出してくる，流れが速くなるに從つて非騷流層は次第に薄くなり漸次認めるのに困難になる，底に接近せる流れにインキを單に入れるも望める效果を齎らさなかつた，是恐らくは水中に强て注入したインキの働きが水自身の內に騷流の或量を局處的に誘起し，而して騷流の流體は直ちに騷流の層と混じて搬び去られた，インキの多量例へば 0.5 c.c. が底に殆ど垂直に注入せられた時にはよりよく成功した，此場合にはインキの僅少部分は非騷流層中に混亂し去つた，1 m/sec 以上の速度に相當する樣に用ゐた Q 及 α の最大値にて此方法にて注入した或インキは其後數秒間表面流速の凡そ 1 % の流速で流線上を進行するのを認める事を得た。

四　關係ある色々の結果の相互間の比較

面摩擦の係數として見出した値 0.00256 は G. I. Taylor に由り各種の高さに於ける風の測定より見出した値即 light wind に對しては 0.0023; moderate wind に對しては 0.0032 及 strong wind に對しては 0.0022 と比較することが出來る，乍然此等兩者の問題は稍條件が異なつて居る，空氣中では高さに由る溫度の實際の場合と斷熱的の遞減率 (Adiabatic lapse-rates) の場合との差による安定度は殆ど永久的の傾向がある，是は本問題には缺いて居る事である，尙著者の公式は自由表面に於ける水の速度の項にて面摩擦を表示する，Taylor の公式は檢風氣球により記錄された最低高度に於ける速度の項を以つて面摩擦を表示して居る，然るに自由表面に於ける速度の氣象上の類似は恐らく geostrophic wind である，かくて著者と Taylor との係數の數字が大さの項 (order) につき一致したのは偶然である。

次に淺海に於ける潮流摩擦の試驗にて Taylor と著者とは潮流に於ける面摩擦の係數を表面速度を基準として用ひて 0.002 なる結果を得た，此論文の結論は約 25% 大なる係數を示して居る，次に水理學にては樋管の計算は普通 Chézy の公式に基礎を置く，今上來の符號を用ひれば同公式は次の如し

$$mu_1 = C(\zeta \sin \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

但 C は Chézy の係數である，是を (2) の (1) 式と比較すると次式が得られる

$$\kappa = m^2 g / C^2$$

水深か幅に比して淺き時は不均一の板底の場合の Chézy の係數は米/秒單位で約 55 (Merriman's Treatise on Hydraulics) である，此値と m の値より κ の値は 0.00286 なる事を知る，純セメントの底では C は 64 で上と同樣に κ は 0.00221 となる，然し引用せる表に於て與へられたる最小深は 880cm²/sec の Q に對するものであるが著者の實驗では約3～40cm²/sec の範圍である，一方 κ が $(\nu/Q)^{\frac{1}{4}}$ (cf. T. Von Kármán, Z s.f. ange, Math. u. Mech. i. pp. 233—252) に眞に比例する事を想像せば多くの實驗の結果は一致する，由て 880cm²/sec に等しき Q に對する 0.0022 の κ の 1 値は 40cm²/sec に等しき Q に對する 0.0045 なる 1 値に該當する，其場合に著者の出せる低き方の値は底がより大なる滑かさか或は Q の大なる値に充用すべき法則と適度の値に對するものゝ摩擦の背離の何れかのためである。

Bazin に從へる Merriman はより深き深さに對する C のより高き値を引照して居る，然し多分是は幾分か側の影響に負ふものである，一方 C のより低き値即 17 迄の範圍は底の他の形式に對して與へられ，最低は雜草である，底の性質の變種の面摩擦に於ける影響の理論は寧ろ困難である樣だ，底面の突起が非騷流層の厚さに比して小なる間及び流體が底を潤し

て居る間は突起は幾分摩擦に影響する事は事實らしからざる樣である，是を簡單に知るには眞鍮及びガラス板上を流れる水に對する Q/ν の臨界値の Hopf の測定と平坦なる板底に對する著者の測定とが相一致するの事實により認められる，然し突起が非騒流層を突き拔く程の大なるものであれば其突起は騒流の性質に影響を及ぼす可し，また突起は水流を妨害するために摩擦を可なり增加する，Von Kármán の指摘せる如くに突起は速度の自乘に摩擦が比例する事の正確度を更改する，雜草は動くを以て他の突起物とは異なる，雜草中の水流は粘性が多くて密生して居る場合には殊に然りである，斯くて雜草は流れの有效深を大いに減ずる突起の高さと水深及び非騒流層の厚さの比は水流に於ける摩擦の法則に重大なる關係のある事項たる事は眞實である。

圓管に於ける水流に於ては騒流は普通 u_0a/ν が 1,015 に達する時に發生す，こゝに u_0 は平均流速，a は半徑である，矩形斷面の場合では Q は實際上斷面の濕潤長に對し斷面を通過する流量の比である，即圓管ではこれは $\pi a^2u_0/2\pi a=\frac{1}{2}u_0a$ である，かくて Q/ν の同樣の臨界値は 525 である（樋に對して見出せる 310 の代りに），此差異は自由表面のために導入せられる不安定に歸す可きものである，然し騒流の流れに於ては風ある可く決して平坦なる表面でない，表面は常に震へつゝあつて且不規則に反射する，圓管に於ける面摩擦は單位面積に對し約 0.0025 ρu_0^2 である，若し最大流速の項にて表はすものとすると數字係數は自由表面の流れの場合に於けるものよりも小である。

五 進行波 (Progressive wave)

既に實驗中に水の上に進行波が存在する事は參照された，現に如斯波の構成の理論を試す可き根本的の實驗が企てられた，Vanghan Cornish はアルプスの導水渠（平面底にて矩形斷面）に於ける水が波の群になつて流れて定流をなさぬ事を注意した，波の高さは約 3吋の水深に比較し得可き程のものであつた，而して其波の速度は水の表面速度よりも成分が大である，如斯き大さの波の發生は或る種々の條件に於て水流の均齊なる流れの根本的の不安定に基因するものなる事は想像し得られる，而して研究の結果如斯不安定は底面の勾配がある定數の値を超過する場合に起る事が發見せられた，此不安定は laminar flow より騒流に移る樣に導く處の不安定とは性質上異なるものなる事が注意せられる，そは水流が既に騒流である事を豫想す，而して平面或は殆ど平面なる自由面を有つ普通の水流から可動の横の峯により徴示さるゝ表面を有する或異なる騒流に移れる事を示す。

次の理論に於ては運動は通じて騒流なりと想像す，摩擦は速度の自乘に比例し且定流の動搖の波長は水深と比較せられる程の長さとす。近似値として速度 u は總ての水深に於て等しとする，連續の方程式は

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}(u\zeta) \quad\cdots\cdots(1)$$

力學的の方程式は水深に關して勾配を下に運動の方程式を積分せば得られる，積分の範圍は底より自由表面迄である。

$$\zeta\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\left(g\sin\alpha-g\cos\alpha\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)\zeta-\kappa u^2 \quad\cdots\cdots(2)$$

定流の場合では

$$\zeta=h, \qquad u=U \quad\cdots\cdots(3)$$

とし，動搖せる運動では

$$\zeta=h+\zeta', \qquad u=U+u' \quad\cdots\cdots(4)$$

とする，定流の場合には (2) の左邊と右邊の $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ は 0 となり且 ζ は h に，u は U となるを以て次式を得る，是定流の條件である

$$g\,h\sin\alpha=\kappa U^2 \quad\cdots\cdots(5)$$

簡單にするために $\partial/\partial t$ の代りに σ, $\partial/\partial x$ の代りに p とせば(1)及び(2)の式は次の如くになる

$$(\sigma+Up)\zeta'=-hpu' \quad\cdots\cdots(6)$$

$$(\sigma+Up)u'=\left(\frac{g}{h}\sin\alpha-gp\cos\alpha\right)\zeta'-\frac{2\kappa U}{h}u' \quad\cdots\cdots(7)$$

上式に於て定流との差異たる ζ' 及 u' の自乘及び相乘積の各項は省略する，消去法及び (5) を用ひて u' 及び ζ' の双方を消せば

$$\begin{aligned}(\sigma+Up)^2\zeta'&=-h(\sigma+Up)pu'\\&=-hp\left\{\left(\frac{g}{h}\sin\alpha-gp\cos\alpha\right)\zeta'-\frac{2\kappa U}{h}u'\right\}\\&=-hp\left(\frac{g}{h}\sin\alpha-gp\cos\alpha\right)\zeta'-\frac{2\kappa U}{h}(\sigma+Up)\zeta'\end{aligned}$$

ζ' の係數を求めば

$$(\sigma+Up)^2+\frac{2\kappa U\sigma}{h}+3gp\sin\alpha-ghp^2\cos\alpha \quad\cdots\cdots(8)$$

最初存在し得る定流の狀態の或僅かの動搖は x の倍數 multiple の sine 及び cosine の結合としてか，或は β を純實數とせる $e^{i\beta x}$ なる形の項の結合としてかで表はす事が出來る，然らば後の形式の各項は A 及 γ が定數なる $Ae^{\gamma t+i\beta x}$ なる形で (8) の解が與へらる可し，A は全く初めの條件による，γ は (8) に於て p の代りに $i\beta$ を及び σ の代りに γ を入れた結果の式を 0 に等しと置きて γ に關して解けば見出さる，若 γ の結果の値が 0 或は負の實數

部を有せば定流は安定である，然し夫が正の實數部であれば考へられたる形式のある初めの小動搖は周期の自乘が最早省略され能はぬ程に周期が大になる迄指數的に增加す可し，下式を解く事により見出さる

$$\gamma=-Ui\beta-\frac{\kappa U}{h}\pm\left(\frac{g}{h}\right)^{\frac{1}{2}}(\kappa\sin\alpha-i\beta h\sin\alpha-\beta^2h^2\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}\quad\ldots\ldots(9)$$

$$\beta h=\lambda\quad\ldots\ldots(10)$$

と置く，λ は純粹の數である，(5) により

$$\beta U=\lambda\left(\frac{g\sin\alpha}{\kappa h}\right)^{\frac{1}{2}}\quad\text{或は}\quad\frac{\kappa U}{h}=\left(\frac{\kappa g\sin\alpha}{h}\right)^{\frac{1}{2}}\quad\ldots\ldots(11)$$

及び

$$\gamma=\left(\frac{g\sin\alpha}{h\kappa}\right)^{\frac{1}{2}}\left[-i\lambda-\kappa\pm(\kappa^2-i\kappa\lambda-\kappa\lambda^2\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}\right]\quad\ldots\ldots(12)$$

此結果より β の任意の値に對して少なくとも γ の共軛値の一つは負の實數部を有する事，尙若 α が充分に小なりとせば共軛値は双方共負の實數部を有する事明かである，是は實測の普通の事實に該當す，即小勾配の流れに於ける波は消滅する傾向がある，不安定となるには が 0 實數部の値を採れば起り能う，然し γ が純粹の虛數である可き條件は (12) 式に於ける平方根が $\kappa+i\delta$（但 δ は實數）なる形である可き事である，是が等しき事を表して方程式とせば

$$\kappa^2-i\kappa\lambda-\kappa\lambda^2\cot\alpha=\kappa^2+2i\kappa\delta-\delta^2\quad\ldots\ldots(13)$$

實數部と虛數部とを夫々等しと置くと

$$\delta=-\tfrac{1}{2}\lambda\,;\qquad\delta^2=\kappa\lambda^2\cot\alpha\ldots\ldots(14)$$

δ を消去せば簡單に

$$\tan\alpha=4\kappa\quad\ldots\ldots(15)$$

かくて定流は勾配が丁度 4κ 即實地的には 1/100 より大なる時第一に不安定となる，最初に發生する波に對しては γ は虛數部$\left(\frac{g\sin\alpha}{\kappa h}\right)^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{3}{2}i\lambda\right)$を有す，故に波の速度は下流に進み且 $-\gamma/\beta$ 或 $3/2\,U$ に等し，故に波は水の速度の 1.5 倍進行す，不安定は波が水深に比し大であれば總ての波長に對し同様に發生する。

若勾配が限界値 4κ であれば α が小なる場合には $\tan\alpha=\sin\alpha$ なるを以て水の速度は(5)により丁度 $2(gh)^{\frac{1}{2}}$ に等しく且波の速度は $\frac{3}{2}U$ 即 $3\,(gh)^{\frac{1}{2}}$ なるを以て水の速度に$(gh)^{\frac{1}{2}}$ 丈け超過して居る事が知られる，而して $(gh)^{\frac{1}{2}}$ は丁度 standing water に於ける長波の速度である，Cornish は彼の導水樋に於ける波が同じ深さの standing water に於ける波の速度に等しき速度を有する波が水の上に出來る事の事實につき論じて居る，此論證は兎も角も波の形成の始めに於て此事實を明かにするに適する事は明白である。

波が一度形成し初めた時には波の頂上の水は表面が下流に波を追つて來る bores の群に變づる迄波の谷を越へて突き下る傾向がある事は明かである，最後の階級たる量的の計算には可なりに理論を擴張するの要がある，こゝに述べた理論は roll wave の發生の最初階段をのみ取扱う，而して roll wave は勾配が 1/100 を超過せる矩形斷面の總ての樋に於て發生する事を示す，Cornish により說明せられたるものは夫々 1/14 及び 1/22 の勾配を有す，導水樋の底が平面でなく曲率斷面にて夫が均齊なる間は何故に同樣の不安定が rollwaves を起さぬかの理由が見へぬ乍然若底が不規則であれば此障害により生じた波は横に反射し而して彼等の速度は底にある突起物のために不規則の間隔に變じた，故に彼等は或代表的の roll wave を引起す事なくて單に表面に騷流の一般的の外見が加はるのみである，此理由により一般に規則的の roll wave は，溪流に於ては見られぬ事は推測せられる。

著者は樋に於ける travelling waves の性質を硏究す可く企てたが決定的の結果は得られなかつた，travelling waves の速度は水の速度よりも判然と大なる事は明かである，其波の速度を決定するために或る測られたる距離に對して時間を測つた，然し其結果は或理論に明確なる檢査を與へるのには充分精確なるものとは云へなかつた。

進行波（travelling waves）は水の速度の半分か或は同じ深さの standing water に於ける波の速度の何れかの水に關する波の速度と一致す，夫は是等の2値の間に差別する事が不可能である事を證する，勿論樋に於ては波は充分の大さには成らぬ，波の振幅は恐らく 1 mm は決して超過せぬ（而して若假りに波が 1 mm 以上にもなつたなれば此論文にて爲した面摩擦の係數の測定は破壞せられたであらう），此事實は樋が短かき事に歸せられる，Cornish は Grünnbach に於て水が長さ 465 呎，平均水深が 3吋 なる導水渠に沿て流れる時に roll wave が完全に形成せられなかつた事を述べて居る，かくて平均水深 5 mm に對しては水は此階級のものが發生するのにも著者が用ひた樋の長さの約 3 倍なる 30 呎を進行せねばならぬ。

六　摘　　要

測定は平面板底の矩形斷面の縱勾配のある木樋に於ける水流に付て爲した，如斯方式で Q/ν として Reynolds の標準を決定した，但し Q は單位幅の水の全流量の單位時間に於けるものである，而して ν は運動の粘性である，Reynolds の數は圓管に對するものよりも明かに少なき約 310 なる時に騷流が始めて發生した事を見出した，Reynolds の數が限界値の 2 乃至 13 倍の間にある時は觀測は 0.00253±0.00006 なる面摩擦係數 κ と一致する，こゝに底の單位面積に對する摩擦力は u_1 を表面速度とせば $\kappa\rho u_1^2$ なり，平均速度は表面速度の約 0.94 なり。

樋の底に於ける laminar flow に於ける水の layer の存在する事は試驗された最高速度に於ける時さへも確められた，上の解說は均齊の渦動粘性は自由表面と非騷流の間の總ての深さに於て存在する事の推定の上に爲されたる實驗上の結果の上に置かれたものである，同樣の假定を以つて渦動粘性は 0.008 Q に等しからざるべからざる事が判る。

Vanghan Cornish は急勾配の導水樋を以て觀測して，ある travelling wave に對して或る理論を組成した，平面なる自由表面を有する流水の均齊騷流は平均勾配が 1/100 を超過する時は不安定となり，次で水より速く進行する bores の群のために置き換へられる事を知る，觀測の形跡は理論と定性的には一致するも未だ定量的には試驗せらる可き幾多の事項が殘つて居る。

附記： 本譯文は上記論文の飜譯の外に讀者の便を計るために二，三註譯の積りで蛇足を附したつもりである。本飜譯に際しては中央氣象臺技師中野理學士の指導を受けたる事多大である、記して以て謝意を表す。

（完）

今度帝國鐵道協會に於て下記の催しがあるといふ通牒を受けましたから特に掲載する事と致しました。

懸賞論文募集

題　　大都市附近電車の理想的經營

文は論文でなくとも良い，記述でも良い，要は實際的最良の經營法を詳述するにある。

審　査　帝國鐵道協會選定の審査委員に依る。

應募規程　字數には制限なし。

締切は大正十五年十二月卅一日。

應募者の資格には何等の制限なし。

論文は住所，氏名を明記して帝國鐵道協會書記長宛厳封して送附する事。

論文の版權は帝國鐵道協會の所有とす。

原稿は一切返付せず。

當選論文は帝國鐵道協會の會報に掲載す。

發　表　大正十六年三月末

賞　　一等　壹人　金五百圓
　　　二等　壹人　金參百圓
　　　三等　貳人　各金百圓

大正十五年八月　　帝國鐵道協會

以上