

論 說 幸 報 告

土木學會誌 第十卷第六號 大正十三年十二月

矩形床版の撓度並に應力に就て

會員 工學士 井 口 鹿 象

内 容 梗 概

矩形床版の撓度は、Karl Huger 氏の方法に倣ひ、三角函數の無限級數を以て表はさるるものと假定し、W. Ritz 氏の解法に依りて其未定係數の値を求め、床版に關する一般理論を應用して、任意の點に於ける撓度、彎曲力率及び裁力等の公式を誘導し、更に床版内の特別の點に對しては、矩形の兩邊の比が種々の値となる時、撓度、彎曲力率、裁力等の計算に必要な係數を算出し、是等を圖表に表し、以て實地應用の便に資せんとす。

目 次

	頁
第一章 總說	2
第二章 豫備的公式	3
第一節 平版に關する一般的公式	3
第二節 W. Ritz 氏の解法	6
第三章 W. Ritz 氏解法の桁に關する應用	7
第一節 桁に關する一般公式	8
第二節 滿載等布荷重を受くる單桁	8
第三節 滿載等布荷重を受くる固定桁	13
第四節 滿載等布荷重を受くる突桁	18
第五節 等變荷重を受くる突桁	21
第四章 矩形床版の解法	24
第一節 概說	24
第二節 四邊に於て支承せられ、滿載等布荷重を受くる矩形床版	25
第三節 四邊に於て固定せられ、滿載等布荷重を受くる矩形床版	45
第四節 三邊に於て固定せられ、一邊 Free なる矩形床版	69
第一項 滿載等布荷重を受くる場合	69
第二項 Free side に於ける荷重の強度が最大にして、之に對する	

固定邊に於ける強度が零なる如き等變荷重を受くる場合	85
第三項 Free side に於ける荷重の強度が零にして、之に對する固 定邊に於ける強度が最大なる如き等變荷重を受くる場合	94
第五節 床版内の任意の點に於ける斜斷面に對する應力強度、彎曲力 率及び裁力	99

## 第一章 總 說

床版（又は平版、Slab or Plate）に關する理論は、從來各國の學者に依りて研究せられ、薄き平版に對する最も一般的なる力學的關係は、稍理論的に之を微分方程式を以て表はすことを得るも、(Love,—Mathematical Theory of Elasticity Hans Lorenz,—Technische Elastizitäts—Lehre. Föppl,—Vorlesungen über technische Mechanik, Band V 參照) 平版の形狀、終端條件 (End condition) の如何、荷重の状態等一々異なる場合に付き解くこと殆ど不可能にして、薄き平圓版 (Thin circular plate) の中心より一定の距離に在る圓周上の凡ての點が、等しき荷重を受くる如き、特種の場合に對してのみ解くことを得るに過ぎず。

近時鐵筋混凝土工法の發達に伴ひ、土木建築工事に於て、所謂床版を應用すること漸次多きを加へ、就中方形床版に遭遇すること尠からず、然るに此種の床版に對する應力、變位等の公式は、純理論的に誘導すること不可能なるを以て近時各國の學者技術者等に依り、精細なる實驗又は種々の假定を設けて近似的公式を案出せられ、廣く建築物橋梁等の設計に應用せらるゝこと、幾多の著書に記述せらるゝ所なり。

著者固より寡讀にして、平版に關する理論を歴史的に研究せるものに非ず、淺學克く諸先輩の説を批判すること能はずと雖も、曾て Karl Hager 氏の Berechnung ebener, rechteckiger Platten mittels trigonometrischer Reihen を讀むに當り、大に得る所あり、其首肯し難きを更へ、算式を簡明にして種々の計算を施し、以て實地應用の便に資せむとす、就中扶壁式擁壁の如く、三邊固定せられ、一邊 Free なりと見做すことを得べき矩形床版に對しては、著者不幸にして之を論じたるものあるを聞かず、著者の方法亦甚だ獨斷的にして、決して正鵠を得たるものと斷言すること能はざるのみならず、計算の結果と實際とを、實驗に依りて比較研究するの便宜を有せざるが故に、果して那邊迄信賴することを得るや、判定

するに苦むは大に遺憾とする所、唯だ先輩諸賢の批判と叱正とを請ひ、高教を仰ぐことを得ば、著者の幸福之に過ぐるものなし。

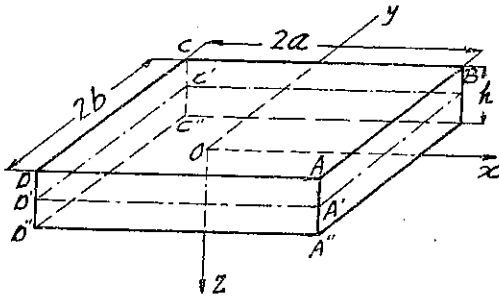
## 第二章 豫備的公式

### 第一節 平版に関する一般的公式

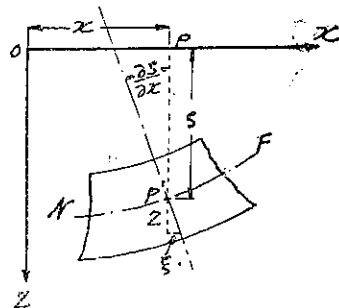
等質弾性體 (Isotropic elastic body) の薄き平版に関する一般的公式は、種々の著書に記述せらるゝ所なるを以て、茲には其誘導の方法を省略し、便宜上其結果のみを記載することとせり、下記各公式は Hans Lorenz, —Technische Elastizitäts-Lehre に依るものなり。

#### (一) 變位 (Displacement) に関する公式

第一圖に於て、與へられたる矩形床版  $ABCD$  の相隣る二邊の長さを、 $2a$ 、及び  $2b$ 、其厚さを  $h$  とし、矩座標軸原點を、此平版の中立面 (Neutral plane) 中の任意の點に撰び、 $ox$  及び  $oy$  を夫々  $2a$  及び  $2b$  なる長さを有する二邊に並行



第一圖



第二圖

なる座標軸、 $oz$  を平版の面に直角なる座標軸とす。

今此平版が、 $z$  軸の方向に作用する或る荷重の爲め、彎曲を爲したるものとすれば、中立面中の任意の點  $P(x, y)$  は、第二圖に示す如く、 $z$  軸の方向にとなる撓度 (Deflection) を生ずべく、此  $z$  は一般に  $x$  及び  $y$  の函數を以て表はさるべし、而して中立面より、 $z$  軸の方向に  $z$  なる距離に在る點の、 $x$  及び  $y$  軸の方向に於ける變位を、夫々  $\xi$  及び  $\eta$  とすれば、一般に次の關係あり。

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= f(xy) \\ \eta &= -z \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \xi &= -z \frac{\partial \zeta}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

(二) 應力強度に関する公式

第一 直面應力強度 (Normal stress intensities)

第三圖の如く、平版中の任意の點に於て、 $dx dy dz$  なる Elementary volume を有する直六面體を考へ、其各面に作用する應力の中

$\sigma_x = x$  軸に直角なる面に於て、該軸の方向に働

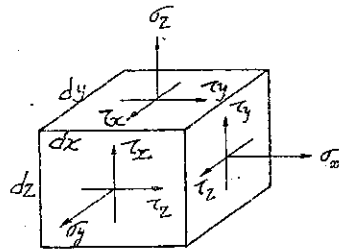
く直面應力強度

$\sigma_y = y$  軸に直角なる面に於て、該軸の方向に働

く直面應力強度

$\sigma_z = z$  軸に直角なる面に於て、該軸の方向に働

く直面應力強度



第三圖

とし且つ

$E$  = 床版の彈性係數 (Modulus of Elasticity)

$\mu$  = 横縮 (又は伸) 係數 (Coefficient of transverse contraction)

$p$  = 任意の點に於ける平版の單位面積に對する荷重

とする時は、一般に次の關係あり

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{-Ez}{1 - \frac{1}{\mu^2}} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y &= \frac{-Ez}{1 - \frac{1}{\mu^2}} \left( \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_z &= -\frac{6p}{h^3} \left( \frac{z^3}{3} - \frac{h^2 z}{4} \right) - \frac{p}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

第二 切面應力強度 (Tangential stress intensities)

第三圖に示す三つの切面應力強度  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$  及び  $\tau_{xz}$  に関しては次の關係あり

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{E}{1 - \frac{1}{\mu^2}} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \left( \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \right) \\ \tau_{yx} &= \frac{E}{1 - \frac{1}{\mu^2}} \left( \frac{z^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \left( \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} \right) \\ \tau_{xz} &= -2Gz \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

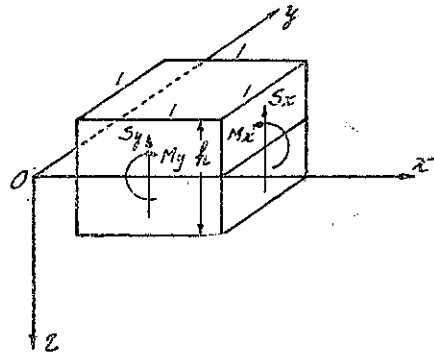
但し  $G = \frac{E}{2\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)}$  . . . . . 歪係數 (Modulus of rigidity)

(三) 彎曲力率 (Bending moment) に関する公式

第四圖に於て

$M_x = x$  軸に直角なる断面の、 $y$  軸の方向に於ける幅員單位長なる面積 ( $1 \times h$ ) 内に生ずる力率 ( $\sigma_x$  に依りて生ずるもの)

$M_y = y$  軸に直角なる断面の、 $x$  軸の方向に於ける幅員單位長なる面積 ( $1 \times h$ ) 内に生ずる力率 ( $\sigma_y$  に依りて生ずるもの)



第 四 圖

とすれば一般に次の關係あり

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -K \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -K \left( \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

但し  $K = \frac{EI}{1 - \frac{1}{\mu^2}}$  . . . . . Plattensteifigkeit.

(四) 裁力 (Shear) に関する公式

第四圖に示すが如く、 $x$  及び  $y$  軸に直角なる断面の、 $1 \times h$  なる面積内に生ずる裁力を夫々  $S_x$  及び  $S_y$  とすれば次の關係あり

$$\left. \begin{aligned} S_x &= -K \left( \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \right) \\ S_y &= -K \left( \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (5)$$

(五) 中立面の方程式 (Equation of neutral plane) 内働及び外働 (Internal and external works) に関する公式

$p$  = 平版上の任意の點に於ける單位面積に對する荷重

$\omega_i$  = 内働

$\omega_e = \text{外働}$

とすれば次の關係あり

$$p = K \left( \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial^2 x \partial^2 y} + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial y^4} \right) \dots \dots \dots (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \frac{K}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{2}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + 2 \left( 1 - \frac{1}{\mu} \right) \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &= \frac{K}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{2}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right] dx dy \quad \tau_z \text{ の影響を無視せる時} \\ \omega_e &= \frac{1}{2} \iint p \zeta dx dy \end{aligned} \right\} (7)$$

### 第二節 W. Ritz 氏の解法

弾性體に對する力學的關係は、一般に微分方程式を以て與へらるゝも、之を各種の場合に應じて解くことは、二三の特別の場合を除くの外、殆ど不可能なり、例へば、薄き平板に關しては、公式(6)に示す微分方程式を解き、之を或る定まれる函數として表はすことを得ば、任意の點に於ける  $\zeta, \sigma, \tau, M, S$  等は、公式(2)乃至(5)に依りて算定することを得るも、該微分方程式に對しては、其一般解式として

$$\zeta = f_1(y+ix) + \alpha f_2(y+ix) + \varphi_1(y-ix) + \alpha \varphi_2(y-ix) + \frac{p}{K} \frac{x^4}{4}$$

を得るも (A. R. Forsyth, —Differential Equations. P. 384 又は Föppl, —Vorlesungen über technische Mechanik, Band V 參照) 之を特種の場合に適合せしむべき、 $f_1, f_2, \varphi_1$  及び  $\varphi_2$  なる四つの Arbitrary functions の形を定むることは極めて困難なり、

W. Ritz 氏は、弾性力學に關する問題の近似的解法として、次の如き方法を案出した (Hans Lorenz, —Technische Elastizitäts-Lehre s. 397 參照)

$\zeta = \text{彈性體内の任意の點の或る座標軸の方向に於ける變位}$

$A_1, A_2, A_3 \dots A_m \dots = \text{Arbitrary constants}$

$F_1, F_2, F_3 \dots F_m \dots = \text{或る與へられたる函數}$

とし、 $\zeta$  は次の如き方程式を以て表はさるゝものとす

$$\zeta = \sum A_m F_m = A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3 + \dots + A_m F_m + \dots (8)$$

此式と公式(7)とに依り、内働  $\omega_i$  及び外働  $\omega_e$  は共に  $A_1 A_2 \dots A_m \dots$  等の

函数として表はさるべく、 $\omega_i$  と  $\omega_e$  とは、平衡の状態に在る弾性體の性質に依り、次の關係あり

$$\omega_i = \omega_e \dots \dots \dots (9)$$

次に Castigliano's Theorem を應用して、 $A_1, A_2, A_3 \dots$  等の未定係数は、内働  $\omega_i$  の値を最小ならしむる様に撰ぶべきものとすれば、公式 (9) の關係と組合せて一般に

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial A_1} \cdot \frac{\partial \omega_e}{\partial A_m} = \frac{\partial \omega_i}{\partial A_m} \cdot \frac{\partial \omega_e}{\partial A_1} \dots \dots \dots (10)$$

を得べく、更に多少の演算上の變化を施せば、次の公式を得可し

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega_i}{\partial A_1} &= 2 \frac{\partial \omega_e}{\partial A_1} \\ \frac{\partial \omega_i}{\partial A_2} &= 2 \frac{\partial \omega_e}{\partial A_2} \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial \omega_e}{\partial A_m} &= 2 \frac{\partial \omega_e}{\partial A_m} \quad \text{一般式} \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

是等の式は何れも未定係數  $A_1, A_2, A_3 \dots$  等に関する一次方程式にして、この式が  $m$  個の定まれる項數より成る時は、公式 (11) を聯立方程式として解けば  $A_1, A_2, A_3 \dots A_m$  等の値を見出すことを得べし、而して、 $F_1, F_2, F_3 \dots$  等は、最初より與へられたる函数なるが故に、 $A_m$  の値を知りたる以上は

$$\xi = \sum_1^m A_m F_m$$

は完全に決定せられたる方程式となる可し、この式が、無限級數を以て表はされたる場合と雖も、特種の場合に於ては、 $A_m$  の値を見出すことを得ること、次章以下に叙ぶるが如し。

### 第三章 W. Ritz 氏解法の桁に関する應用

普通の桁に對する撓度方程式を、以下叙ぶるが如く三角函数の無限項の和とし、之に W. Ritz 氏の解法を適用すれば、其凡ての結果は、普通の Statics 即ち Common theory of elasticity に依りて求めたる結果と全然一致するを見る可し、從て特に本章を設けて之を論ずるの要なしと思惟せられざるに非ざるも、一は Ritz 氏

解法の用法を示して其合理的なるを首肯し、進で之を矩形床版解説の道程たらしめんとす。

第一節 桁に関する一般公式

普通の桁に対する一般的公式は、所謂 Common theory of elasticity に依りて求むることを得るは論を俟たずと雖も、公式(2)乃至(7)に依りても直ちに之を求むることを得可し、即ち普通の桁に於て假定する如く、横縮(又は伸)を受けざるものとすれば

$$\mu = \infty, \quad \text{従て} \quad K = EI$$

故に  $x$  軸を桁の軸線とし、桁の任意の點に於ける撓度を  $\zeta$  とすれば、公式(4)乃至(7)に依りて次の關係を得可し。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -EI \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \\ S_x &= -EI \frac{d^3 \zeta}{dx^3} \\ p &= EI \frac{d^4 \zeta}{dx^4} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= \frac{EI}{2} \int \left( \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right)^2 dx \\ \omega_e &= \frac{1}{2} \int p \zeta dx \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

第二節 満載等布荷重を受くる單桁

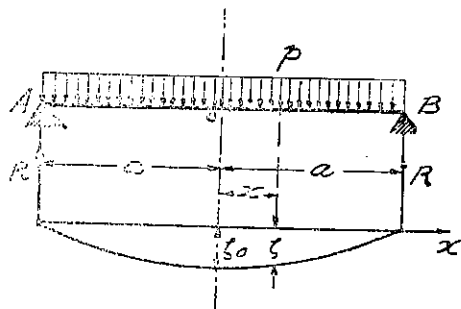
第五圖に示すが如き、満載等布荷重を受くる單桁の彎曲力率  $M_x$  は、左右の支點に於て零、徑間の中央に於て最大なり、即ち

$$x = \pm a \text{ ならば } M_x = 0$$

$$x = 0 \text{ ならば } M_x = \text{最大}$$

$m$  を位置の整数とすれば

$$\left| \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right|_{x=\pm a} = 0,$$



第五圖



$$\left| \cos \frac{\pi (2m+1)x}{2a} \right|_{x=0} = 1 \text{ 最大}$$

となる、而して  $M_x$  は公式 (12) に依り、 $\frac{d^2\zeta}{dx^2}$  に正比例するが故に

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\zeta}{dx^2} &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos \frac{\pi (2m+1)x}{2a} \\ \text{但し } A_m &\text{ は未定係数} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

と置けば、 $M_x$  に對する終端條件 (Grenzbedingungen) は、凡て満足せらることを知る可し。

(14) 式を積分すれば

$$\int \frac{d^2\zeta}{dx^2} dx = \frac{d\zeta}{dx} = \frac{2a}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{2m+1} \sin \frac{\pi (2m+1)x}{2a} + C$$

然るに、 $\left| \frac{d\zeta}{dx} \right|_{x=0} = 0$  なるを要す

$\therefore C=0$

是に依りて次の式を得可し

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{2a}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{2m+1} \sin \frac{\pi (2m+1)x}{2a} \dots \dots \dots (15)$$

更に (15) 式を積分し、 $x = \pm a$  なる時、 $\zeta = 0$  なる條件を入れば、次の式を得可し

$$\zeta = -\frac{4a^2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(2m+1)^2} \cos \frac{\pi (2m+1)x}{2a} \dots \dots \dots (16)$$

尙ほ (14) 式を微分すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^3\zeta}{dx^3} &= -\frac{\pi}{2a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (2m+1) \sin \frac{\pi (2m+1)x}{2a} \\ \left| \frac{d^3\zeta}{dx^3} \right|_{x=\pm a} &= \pm \frac{\pi}{2a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (-1)^m (2m+1) \dots \text{最大} \\ \left| \frac{d^3\zeta}{dx^3} \right|_{x=0} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (17)$$

$S_x$  は  $\frac{d^3\zeta}{dx^3}$  に比例するが故に、(17) 式は裁力  $S_x$  に對する終端條件を満足せし

むるものなることを知るべし

公式 (13) の第二式及び (16) 式に依り

$$\begin{aligned} \omega_e &= \frac{p}{2} \int_{-a}^a \zeta dx = p \int_0^a \zeta dx = -\frac{4pa^2}{\pi^2} \int_0^a \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(2m+1)^2} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right\} dx \\ &= -\frac{4pa^2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(2m+1)^2} \left[ \frac{2a}{\pi(2m+1)} \sin \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right]_0^a \\ &= -\frac{4pa^2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(2m+1)^2} \cdot \frac{2a(-1)^m}{\pi(2m+1)} \end{aligned}$$

故に次の公式を得べし

$$\left. \begin{aligned} \omega_e &= -\frac{8pa^3}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m A_m}{(2m+1)^3} \\ \frac{\partial \omega_e}{\partial A_m} &= -\frac{8pa^3}{\pi^3} \cdot \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

次に公式 (13) の第一式に依り。

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial A_m} = EI \frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^a \left( \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right)^2 dx$$

今  $\cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x = X_m$

とし、且つ  $r$  を  $m$  以外の整数とすれば

$$\left( \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right)^2 = \left( \sum_{m=1}^{\infty} A_m X_m \right)^2 = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^2 X_m^2 + 2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m X_m \sum_{r=0}^{\infty} A_r X_r + 2A$$

但し、 $A$  は  $m$  を含まざる項の二つ宛の積の和を表はすものとす。

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^a \left( \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right)^2 dx &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_0^a X_m^2 dx + 2 \sum_{r=0}^{\infty} A_r \int_0^a X_m X_r dx \\ &= 2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_0^a X_m^2 dx + 2 \sum_{r=0}^{\infty} A_r \int_0^a X_m X_r dx - 2 \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_0^a X_m^2 dx \end{aligned}$$

是に依りて次の關係を得可し

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial A_m} = EI \frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^a \left( \frac{d^2 \zeta}{dx^2} \right)^2 dx = 2EI \sum_{r=0}^{\infty} A_r \int_0^a X_m X_r dx \dots \dots (19)$$

扱て

$$\int_0^a X_m X_r dx = \int_0^a \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \cos \frac{\pi(2r+1)}{2a} x dx$$

$$= \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{2a} (2m+1-2r-1)x}{\frac{\pi}{a} (2m+1-2r-1)} - \frac{\sin \frac{\pi}{2a} (2m+1+2r+1)x}{\frac{\pi}{a} (2m+1+2r+1)} \right]_0^a$$

$$= \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \pi (m-r)}{\pi (m-r)}$$

$$\therefore \frac{\partial \omega_i}{\partial A_m} = aEI \sum_{r=0}^{\infty} A_r \frac{\sin \pi (m-r)}{\pi (m-r)}$$

然るに、

$$\frac{\sin \pi (m-r)}{\pi (m-r)} = 1, \quad r=m \text{ の時}$$

$$= 0, \quad r \neq m \text{ の時}$$

故に次の式を得べし。

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial A_m} = EI a A_m \dots \dots \dots (20)$$

(18) の第二式と (20) 式とを、公式 (11) の一般式即ち

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial A_m} = 2 \frac{\partial \omega_a}{\partial A_m}$$

に代入し、 $A_m$  に付て解けば、直ちに次の公式を得可し。

$$A_m = -\frac{16pa^2}{\pi^3 EI} \cdot \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \dots \dots \dots (21)$$

公式 (12), (14), (16), (17), 及び (21) に依り次の式を得

$$\zeta = \frac{64pa^4}{\pi^5 EI} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^5} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \dots \dots \dots (22)$$

$$\zeta_0 = \frac{64pa^4}{\pi^5 EI} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^5} = \frac{5pa^4}{24 EI} \quad \dots \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536}$$

$$M_x = \frac{16pa^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \dots \dots \dots (23)$$

$$M_0 = \frac{16pa^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{p}{2} a^2 \quad \dots \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{32}$$

$$S_x = -\frac{8pa}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \dots \dots \dots (24)$$

$$S_A = -S_B = \frac{8pa}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = pa \quad \dots \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

是等の公式に依り  $x=0$ , 又は  $x=\pm a$  に對する  $M_x, S$  等の値は、凡て普通の Statics に依りて求めたるものと全く一致することを知るべし、嘗に斯の如き特別の點に於てのみならず、此方法に依りて求めたる  $M_x, S$  と等は、桁の凡ての點に於て普通の Statics に依りて求めたるものと全く相合致することを證明することを得可し、

例へば、 $M_x$  に付て示さんに、MacRobert, — Functions of a Complex Variable. (p. 130) に依り

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{なる時は} \\ & \sin \theta - \frac{\sin 3\theta}{3^2} + \frac{\sin 5\theta}{5^2} - \frac{\sin 7\theta}{7^2} + \dots \dots \dots \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \sin \pi (2m+1) \theta = \frac{\pi}{4} \theta \end{aligned} \right\} (25)$$

此式の兩邊を  $\theta$  に付て積分すれば

$$-\cos \theta + \frac{\cos 3\theta}{3^2} - \frac{\cos 5\theta}{5^2} + \frac{\cos 7\theta}{7^2} - \dots = \frac{\pi}{8} \theta^2 + C$$

此式の左邊は、 $\theta = \frac{\pi}{2}$  なる時は零なり

$$\therefore C = -\frac{\pi^2}{32}$$

となるが故に、次の關係を得可し、

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{なる時は} \\ & \cos \theta - \frac{\cos 3\theta}{3^2} + \frac{\cos 5\theta}{5^2} - \frac{\cos 7\theta}{7^2} + \dots \dots \dots \\ & = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \cos (2m+1) \theta = \frac{\pi}{8} \left( \frac{\pi^2}{4} - \theta^2 \right) \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

公式 (26) に於て

$$-a \leq x \leq a, \quad \dots \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi x}{2a} \leq \frac{\pi}{2}$$

故に公式 (26) を適用して

$$M_x = \frac{16 p a^2}{\pi^3} \cdot \frac{\pi}{8} \left\{ \frac{\pi^2}{4} - \left( \frac{\pi x}{2a} \right)^2 \right\} = \frac{p}{2} (a^2 - x^2)$$

是れ即ち普通の Statics に依つて得べきものと全く同一の結果なり、其他  $S_x, \zeta$  等に付ても同様に證明することを得可し。

(14) 式の  $\frac{d^2\zeta}{dx^2}$ , 及び (16) 式の  $\zeta$  に關する函數は、Karl Harger 氏が、其著 *Berechnung ebener, rechteckiger Platten mittels trigonometrischer Reihen* に於て用ひたるものを其儘採用せり、從て公式 (21) 乃至 (24) に示す各結果も、Harger 氏の誘導したるものと全然相一致することも、氏は著者の誘導したる (19) 式の如き關係を利用せざりし爲め、 $A_m$  の最後の結果を得るまでに、相當煩雜なる演算を要したるのみならず、徑間の中央、即ち  $x=0$  に對しては

$$M_0 = \frac{16pa^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{p}{2} a^2$$

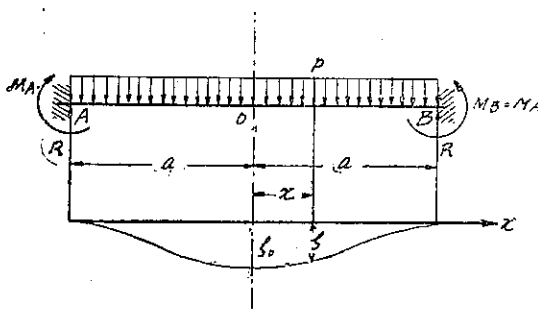
$$p = \frac{4p}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m+1} = \frac{4p}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = p$$

なる結果を得たることに依り、「徑間の中央に於ては普通の Statics に依りて得可き結果と一致す」と説くも、桁の凡ての點に於て彼此全く同一のものたることに氣付かざりしものゝ如し、從て此方法に依りて得たる式の、初めの四項だけを取り、 $A_4$  以下の項を無視して彎曲力率圖を描き、普通の Statics より得可き

$$M_x = \frac{p}{2} (a^2 - x^2)$$

なる拋物線と比較し其誤差の百分率を計算したるが如き、聊か徒勞の觀なきを得ず。

### 第三節 滿載等布荷重を受くる固定桁



第 六 圖

第六圖の如き滿載等布荷重を受くる固定桁の彎曲力率は、徑間の中央に於ては正の最大、兩端に於ては負の最大なり、故に  $C_m$  を或る定數とし

$$\frac{d^2\zeta}{dx^2} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ 1 + C_m \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \right\}$$

とすれば、 $M_x$  に對する前記各終端

條件を満足せしむることを得可し。

前式を積分すれば

$$\frac{d\xi}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left\{ x + C_m \frac{2a}{\pi(2m+1)} \sin \frac{\pi(2m+1)}{2a} x + C_m \right\}$$

$\frac{d\xi}{dx}$  の値は、 $x=0$  の時も、 $x=\pm a$  の時も零なり

$\therefore C_m = 0$

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ a + C_m \frac{2a(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} = 0, \quad \text{従て } C_m = -\frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1)$$

故に次の關係を得可し

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right\} \dots \dots (27)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ x - a (-1)^m \sin \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right\} \dots \dots \dots (28)$$

(28) 式を積分すれば

$$\xi = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \frac{x^2}{2} + \frac{2a^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x + C_m \right\}$$

$x = \pm a$  の時は、 $\xi = 0$

$$\therefore C'_m = -\frac{a^2}{2}$$

故に次の式を得可し

$$\xi = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \frac{1}{2} (x^2 - a^2) + \frac{2a^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right\} \dots \dots (29)$$

次に

$$\begin{aligned} \omega_e &= p \int_0^a \xi dx = p \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_0^a \left\{ \frac{1}{2} (x^2 - a^2) + \frac{2a^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right\} dx \\ &= p \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left[ \frac{1}{2} (a^2 - x^2) + \frac{4a^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \sin \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right]_0^a \end{aligned}$$

之に依りて次の式を得

$$\left. \begin{aligned} \omega_e &= p a^3 \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \frac{4}{\pi^2 (2m+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} \\ \frac{\delta \omega_e}{\delta A_n} &= p a^3 \left\{ \frac{4}{\pi^2 (2m+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots (30)$$

又  $1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x = X_m$  とすれば (19) 式と同様に

$$\begin{aligned} \frac{\delta \omega_i}{\delta A_m} &= j \sum_{r=0}^{\infty} A_r \int_0^a X_m X_r dx \\ X_m X_r &= 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \\ &\quad - \frac{\pi}{2} (-1)^r (2r+1) \cos \frac{\pi(2r+1)}{2a} x \\ &\quad + \frac{\pi^2}{4} (-1)^{m+r} (2m+1)(2r+1) \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \cos \frac{\pi(2r+1)}{2a} x \\ \int_0^a \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x dx &= \frac{2a(-1)^m}{\pi(2m+1)} \\ \int_0^a \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \cos \frac{\pi(2r+1)}{2a} x dx &= \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} \\ \int_0^a X_m X_r dx &= a - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \frac{2a(-1)^m}{\pi(2m+1)} \\ &\quad - \frac{\pi}{2} (-1)^r (2r+1) \frac{2a(-1)^r}{\pi(2r+1)} \\ &\quad - \frac{\pi^2}{4} (-1)^{m+r} (2m+1)(2r+1) \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} \\ &= -a + \frac{\pi^2}{8} a (-1)^{m+r} (2m+1)(2r+1) \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} \\ \frac{\delta \omega_i}{\delta A_m} &= 2 E I a \sum_{r=0}^{\infty} A_r \left\{ -1 + \frac{\pi^2}{8} (-1)^{m+r} (2m+1)(2r+1) \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} \right\} \end{aligned}$$

然るに

$$\begin{aligned} \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} &= 1 \quad m=r \text{ の時} \\ &= 0 \quad m \neq r \text{ の時} \end{aligned}$$

故に次の式を得可し。

$$\frac{\delta \omega_i}{\delta A_m} = 2 E I a \left\{ \frac{\pi^2}{8} (2m+1)^2 A_m - \sum_{r=0}^{\infty} A_r \right\} \dots (31)$$

(30) 及び (31) の關係を公式 (11) の一般式に代入すれば

$$\frac{\pi^2}{8} (2m+1)^2 A_m - \sum_{r=0}^{\infty} A_r = \frac{p a^2}{E I} \left\{ \frac{4}{\pi^2 (2m+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} \dots (32)$$

此式兩邊の  $m$  に、 $0, 1, 2 \dots i$  等の値を與へ、 $1+i$  個の方程式を作り、邊々相加へて其兩邊を  $1+i$  にて除すれば

$$\frac{\pi^2}{8} \cdot \frac{\sum_{m=0}^i (2m+1)^2 A_m}{1+i} - \sum_{r=0}^{\infty} A_r = \frac{pa^2}{EI} \left\{ \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\sum_{m=0}^i \frac{1}{(2m+1)^2}}{1+i} - \frac{1}{3} \right\}$$

此式に於て、 $i$  が無限大となり時の極限值を求むれば

$$\text{Lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^i \frac{1}{(2m+1)^2}}{1+i} = \frac{\frac{\pi^2}{8}}{\text{Lim}_{i \rightarrow \infty} (1+i)} = 0$$

にして、 $\sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) A_m$  も亦或る極限值に達するものと考ふることを得るが故に

$$\text{Lim}_{i \rightarrow \infty} \frac{\sum_{m=0}^i (2m+1)^2 A_m}{1+i} = 0$$

之に依り

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r = \frac{pa^2}{3EI} \dots \dots \dots (33)$$

(33) 式の關係を (32) 式に代入すれば次の公式を得

$$A_m = \frac{pa^2}{EI} \cdot \frac{32}{\pi^4 (2m+1)^4} \dots \dots \dots (34)$$

此  $A_m$  の値を (29) 式に入れば、撓度  $\xi$  に關して次の公式を得可し

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{32 pa^4}{\pi^4 EI} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) + \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right\} \\ \xi_0 &= \frac{32 pa^4}{\pi^4 EI} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)^3} - \frac{1}{2(2m+1)^4} \right\} \\ &\quad - \frac{pa^4}{24 EI} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^5} = \frac{5\pi^5}{1536} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

彎曲力率  $M_x$  に對しては、公式 (12) の第一式、(27) 及び (34) に依り

$$M_x = -\frac{32 pa^2}{\pi^4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right\}$$



$$\begin{aligned}
 M_o &= -\frac{32 p a^2}{\pi^4} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2m+1)^4} - \frac{\pi (-1)^m}{2(2m+1)^3} \right\} \\
 &= \frac{p a^2}{6} \dots \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \\
 M_A = M_B &= -\frac{32}{\pi^4} p a^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} = -\frac{p}{3} a^2 = -2 M_o
 \end{aligned} \tag{36}$$

裁力  $S$  に對しては、公式 (12) の第二式に依り

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{8}{\pi^2} p a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \\
 S_A = -S_B &= -\frac{8}{\pi^2} p a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \\
 &= p a \dots \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}
 \end{aligned} \tag{37}$$

上記の結果に依り、徑間の中央及び兩端に於けると、 $M_o, S$  等は凡て普通の Statics に依りて求めたるものと全く一致することを見る可し、唯に斯の如き特別の點に於てのみならず、桁の凡ての點に於て彼此全く同一の結果となることを證明することを得可し、例へばとに付て叙べんに、公式 (35) の第一式に依り

$$\zeta = \frac{32 p a^4}{\pi^4 EI} \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^5} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right\}$$

(26) 式を  $\theta$  に付て 2 回積分し、 $\theta$  に特別の値を與へて Arbitrary constant の値を求むれば

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^5} \cos (2m+1) \theta = \frac{\pi}{32} \left( \frac{5\pi^4}{48} + \frac{\pi^2}{2} \theta^2 + \frac{\theta^4}{3} \right) \dots \dots \tag{38}$$

を得べく、從て

$$\begin{aligned}
 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^5} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x &= \frac{\pi^5}{1536 a^4} (5a^4 - 6a^2 x^2 + x^4) \\
 \dots \zeta &= \frac{32 p a^4}{\pi^4 EI} \left\{ \frac{\pi^4}{192} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) + \frac{\pi^4}{768 a^4} (5a^4 - 6a^2 x^2 + x^4) \right\} \\
 &= \frac{p}{24 EI} (a^4 - 2a^2 x^2 + x^4) = \frac{p}{24 EI} (a^2 - x^2)^2
 \end{aligned}$$

是れ普通の Statics に依りて求めたるものと全く同一なり、其他  $M_x, S$  等に付

ても同様に證明することを可し、

Karl Harger 氏は、徑間の中央に於ける彎曲力率は正の最大、兩端に於ては負の最大にして、且つ後者の絶対値は前者の 2 倍となるを要すとの謂を以て

$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \cos \frac{\pi(2m+1)}{a} x - \frac{1}{3} \cos \frac{2\pi(m+1)}{a} x \right\}$$

として計算を行ひて次の結果を得たり

$$A_m = \frac{3 p a^2}{5 \pi^2 EI} \left\{ \frac{3}{(2m+1)^2} + \frac{1}{(2m)^2} \right\}$$

是に依れば

$$M_0 = \frac{p}{6} a^2, \quad M_A = -\frac{p}{3} a^2$$

となり、普通の Statics に依りて得可き結果と一致するも、著者の方法に依りて求めたるものゝ如く、 $\zeta, M_x, S$  等が桁の凡ての點に於て彼此相合致せしむること能はざるのみならず、凡ての演算上煩雜を來すを免れず。

#### 第四節 満載等布荷重を受くる突桁

第七圖の如き満載等布荷重を受くる突桁の彎曲力率は固定端に於て負の最大、放端に於て零なり、故に

$$\frac{d^2 \zeta}{dx^2} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ 1 - (-1)^m \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \right\} \dots \dots \dots (39)$$

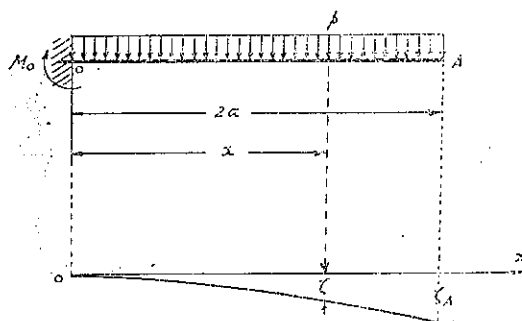
とすれば上記彎曲力率に對する終端條件を満足せしむることを得可し

上式を微分すれば

$$\begin{aligned} \frac{d^3 \zeta}{dx^3} &= -\frac{\pi}{4a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (-1)^m \\ &\quad \times (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \end{aligned}$$

$$\therefore \left. \frac{d^3 \zeta}{dx^3} \right|_{x=0} = -\frac{\pi}{4a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (-1)^m \times (2m+1) \dots \text{最大}$$

$$\left. \frac{d^3 \zeta}{dx^3} \right|_{x=2a} = 0$$



第七圖

是に依り、裁力に對する終端條件をも満足せしむることを知るべし、

(39) 式を積分すれば

$$\frac{d\zeta}{dx} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ x + \frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)}{4a} x + C_m \right\}$$

然るに

$$\left. \frac{d\zeta}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad \therefore C_m = -\frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)}$$

是に依りて次の關係を得可し

$$\frac{d\zeta}{dx} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ x + \frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)}{4a} x - \frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \quad \dots (41)$$

又 (41) 式を積分し、 $x=0$  の時  $\zeta=0$  なる條件を入れるれば、次の關係を得可し

$$\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)} x + \frac{16a^2(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \right\} \quad \dots (42)$$

$$\begin{aligned} \omega_e &= \frac{p}{2} \int_0^{2a} \zeta dx = \frac{p}{2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_0^{2a} \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)} x \right. \\ &\quad \left. + \frac{16a^2(-1)^m}{\pi^2(2m+1)} \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \right\} dx \\ &= \frac{p}{2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \frac{4}{3} a^3 - \frac{8a^3(-1)^m}{\pi(2m+1)} + \frac{64a^3(-1)^m}{\pi^3(2m+1)^3} \right\} \end{aligned}$$

故に

$$\left. \begin{aligned} \omega_e &= \frac{2pa^3}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \frac{\pi^3}{3} - \frac{2\pi^2(-1)^m}{2m+1} + \frac{16(-1)^m}{(2m+1)^3} \right\} \\ \frac{\partial \omega_e}{\partial A_m} &= \frac{2pa^3}{\pi^3} \left\{ \frac{\pi^3}{3} - \frac{2\pi^2(-1)^m}{2m+1} + \frac{16(-1)^m}{(2m+1)^3} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

又  $1 - (-1)^m \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x = X_m$  とすれば、(19) 式に依り

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_e}{\partial A_m} &= EI \sum_{r=0}^{\infty} A_r \int_0^{2a} X_m X_r dx \\ &= EI \sum_{r=0}^{\infty} A_r \int_0^{2a} \left\{ 1 - (-1)^r \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \right\} \left\{ 1 - (-1)^r \sin \frac{\pi(2r+1)}{4a} x \right\} dx \\ &= EI \sum_{r=0}^{\infty} A_r \int_0^{2a} \left\{ 1 - (-1)^m \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x - (-1)^r \sin \frac{\pi(2r+1)}{4a} x \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{m+r} \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \sin \frac{\pi(2r+1)}{4a} x \right\} dx \end{aligned}$$

$$\int_0^{2a} \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x dx = \frac{4a}{\pi(2m+1)},$$

$$\int_0^{2a} \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \sin \frac{\pi(2r+1)}{4a} x dx = a \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)}$$

$$\therefore \frac{\partial \omega_i}{\partial A_m} = EI \sum_{r=0}^{\infty} A_r \left\{ 2a - \frac{4a}{\pi(2m+1)} - \frac{4a}{\pi(2r+1)} + a(-1)^{m+r} \cdot \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} \right\}$$

然るに、

$$\frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} = 1, \quad m=r \quad \text{の時}$$

$$= 0, \quad m \neq r \quad \text{の時}$$

故に次の關係を得べし

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial A_m} = \alpha EI \left[ A_m + 2 \left\{ 1 - \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} A_r - \frac{4}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A_r}{2r+1} \right] \quad (44)$$

公式 (11), (43) 及び (44) に依り

$$A_m + 2 \left\{ 1 - \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} A_r - \frac{4}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A_r}{2r+1}$$

$$= \frac{4pa^2}{\pi^2 EI} \left\{ \frac{\pi^3}{3} - \frac{2\pi^2(-1)^m}{2m+1} + \frac{16(-1)^m}{(2m+1)^3} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

此式に於て  $m$  に  $0, 1, 2, \dots, i$  等の値を與へて  $1+i$  個の方程式を作り、邊々相加へ、兩邊を  $1+i$  にて除し、 $i$  が無限大となりし時の極限值を求むれば

$$2 \sum_{r=0}^{\infty} A_r - \frac{4}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A_r}{2r+1} = \frac{4pa^2}{3EI}$$

此關係を (45) 式に代入し、更に多少の變化を施せば次の式を得べく

$$\frac{\pi}{4} (-1)^m (2m+1) A_m - \sum_{r=0}^{\infty} A_r = \frac{2pa^2}{\pi^2 EI} \left\{ -\pi^2 + \frac{4}{(2m+1)^2} \right\} \dots \dots (46)$$

此方程式に於て前と同様の極限值を求むれば

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r = \frac{2pa^2}{EI} \dots \dots \dots (47)$$

(46) 及び (47) 式に依り、 $A_m$  は次式を以て表さるべし

$$A_m = \frac{64 pa^2}{\pi^3 EI} \cdot \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \dots \dots \dots (48)$$

(42) 及び (48) 式に依り、撓度に関して次の公式を得

$$\xi = \frac{64 pa^4}{\pi^3 EI} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \left\{ \frac{x^2}{2a^2} - \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cdot \frac{x}{a} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{16(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \Big\} \\ \zeta_A = \frac{128 pa^4}{\pi^3 EI} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} - \frac{4}{\pi(2m+1)^4} + \frac{8(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^5} \right\} \dots (49) \\ & = \frac{2pa^4}{EI} \end{aligned} \right\}$$

彎曲力率に對しては

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{64 pa^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \left\{ 1 - (-1)^m \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \right\} \\ M_0 &= -\frac{64 pa^2}{\pi^3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = -2pa^2 \end{aligned} \right\} \dots (50)$$

裁力に對しては

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{16}{\pi^2} pa \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \\ S_0 &= \frac{16pa}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = 2pa \end{aligned} \right\} \dots (51)$$

此場合に於ても、 $\zeta, M_x, S$  等は桁の凡ての點に於て、普通の Statics に依りて得可き結果と全然相一致することを證明することを得可し、例へば  $S$  に付て叙べんに

Macrobert.—Functions of a complex Variable. (P. 285) に依り

$$\left. \begin{aligned} & 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{なる時は} \\ & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \pi(2m+1)\theta}{(2m+1)^3} = \frac{\pi}{8} \theta(\pi-\theta) \end{aligned} \right\} \dots (52)$$

此式の兩邊を  $\theta$  に就て微分すれば

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos (2m+1)\theta}{(2m+1)^2} = \frac{\pi}{8} (\pi-2\theta) \dots (53)$$

此關係と (51) 式の第一式とに依り

$$S - p(2a-x)$$

を得可し、是れ普通の Statics に依りて得可き結果と全く同一なり。

### 第五節 等變荷重を受くる突桁

第八圖に示すが如く、放端  $A$  に於て最大、同定端  $O$  に於て零なる如き等變荷

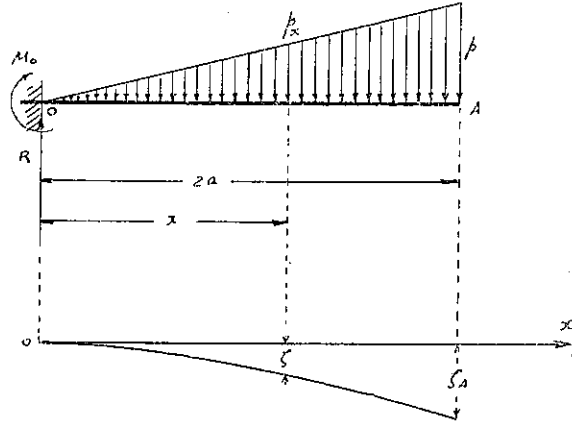
重を受くる突桁に就て考ふるに、 $\zeta$ ,  $M_m$ ,  $S$  等に対する終端條件は、前節に叙べたる満載等布荷重を受くる突桁と全く同様なり、故に此場合に於ける

$\zeta, \frac{d\zeta^2}{dx^2}$  等の函數は (39) 乃至 (42) 式

に示すものを其儘用ふることを得可し、而して任意の點に於ける荷重の強度を  $p_x$  とすれば

$$p_x = \frac{p}{2a} x \text{ なるが故に}$$

$$\omega_e = \frac{1}{2} \int_0^{2a} \zeta p_x dx$$



第八圖

$$\begin{aligned} &= \frac{p}{4a} \int_0^{2a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \frac{x^3}{2} - \frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)} x^2 + \frac{16a^2(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} x \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \right\} dx \\ &= \frac{p}{4a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ 2a^4 - \frac{32a^4(-1)^m}{3\pi(2m+1)} + \frac{16a^2(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} \cdot \frac{16a^2(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} \right\} \end{aligned}$$

故に次の關係を得可し

$$\left. \begin{aligned} \omega_e &= pa^3 \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \frac{1}{2} - \frac{8(-1)^m}{3\pi(2m+1)} + \frac{64}{\pi^4(2m+1)^4} \right\} \\ \frac{\partial \omega_e}{\partial A_m} &= pa^3 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{8(-1)^m}{3\pi(2m+1)} + \frac{64}{\pi^4(2m+1)^4} \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (54)$$

内働  $\omega_e$  に就ては前節と全く同様なるが故に、(44) 式を其儘用ふることを得、故に

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_e}{\partial A_m} &= aEI \left[ A_m + 2 \left\{ 1 - \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} A_r - \frac{4}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A_r}{2r+1} \right] = 2 \frac{\partial \omega_e}{\partial A_m} \\ &= pa^3 \left\{ 1 - \frac{16(-1)^m}{3\pi(2m+1)} + \frac{128}{\pi^4(2m+1)^4} \right\} \end{aligned}$$

是より次の式を得可し

$$\begin{aligned} A_m + 2 \left\{ 1 - \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} A_r - \frac{4}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A_r}{2r+1} &= \frac{pa^2}{EI} \left\{ 1 - \frac{16(-1)^m}{3\pi(2m+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{128}{\pi^4(2m+1)^4} \right\} \dots \dots (55) \end{aligned}$$

此方程式に於て  $m$  に  $0, 1, 2 \dots i$  等の値を與へ、 $1+i$  個の方程式を作り、邊々相加へ、兩邊を  $1+i$  にて除し、 $i=\infty$  なる極限值を求むれば

$$2 \sum_{r=0}^{\infty} A_r - \frac{4}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A_r}{2r+1} = \frac{pa^2}{EI}$$

之と (55) 式とに依り

$$A_m - \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)} \sum_{r=0}^{\infty} A_r = \frac{pa^2}{EI} \left\{ -\frac{16(-1)^m}{3\pi(2m+1)} + \frac{128}{\pi^2(2m+1)^4} \right\}$$

此方程式に於て前と同様の極限值を求むれば

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r = \frac{4pa^2}{3EI} \dots \dots \dots (56)$$

之を前の式に代入すれば次の公式を得可し

$$A_m = \frac{pa^2}{EI} \cdot \frac{128}{\pi^4(2m+1)^4} \dots \dots \dots (57)$$

從て、 $M_x, S$  等に関しては次の關係を得。

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{128 pa^4}{\pi^4 EI} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} \left\{ \frac{x^2}{2a^2} - \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cdot \frac{x}{a} \right. \\ &\quad \left. + \frac{16(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \right\} \dots \dots \dots (58) \\ \zeta_A &= \frac{128 pa^4}{\pi^4 EI} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{2}{(2m+1)^4} - \frac{8(-1)^m}{\pi(2m+1)^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{16}{\pi^2(2m+1)^2} \right\} = \frac{22 pa^4}{15 EI} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -\frac{128}{\pi^4} pa^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} \left\{ 1 - (-1)^m \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \right\} \\ M_o &= -\frac{128}{\pi^4} pa^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} = -\frac{4}{3} pa^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots (59)$$

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{32}{\pi^3} pa \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \cos \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \\ S_o &= \frac{32}{\pi^3} pa \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} = pa \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (60)$$

公式 (58) 乃至 (60) の結果は、桁の凡ての點に於て、普通の Statics に依りて求めたるものと、全く一致することを得るも、茲には公式 (12) の第三式、即ち

$$p_x = EI \frac{d^4 \zeta}{dx^4}$$

が満足せらるることを示すべし。

(40) 式を微分すれば

$$\frac{d^4 \zeta}{dx^4} = \frac{\pi^2}{16a^2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (-1)^m (2m+1)^2 \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x$$

$$\therefore p_x = \frac{8p}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x = \frac{8p}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi x}{4a} = \frac{p}{2a} x$$

之れ第八圖に示す如き等變荷重の配布を示す關係式なり。

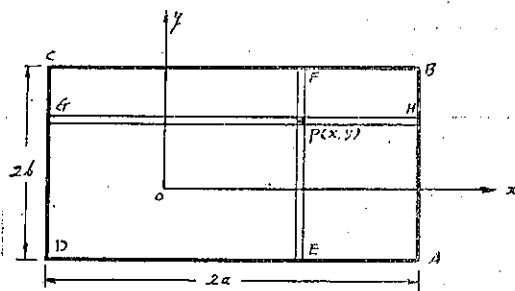
### 第四章 矩形床版の解法

#### 第一節 概説

彎曲を受くる矩形床版の任意の點  $P(x, y)$  に於ける撓度を  $\zeta$  とすれば、 $\zeta$  は一般に

$$\zeta = F(x, y)$$

を以て表はさるべし而して第九圖に示す如く、座標軸  $ox$  及び  $oy$  を、夫々二邊  $AD$  及び  $AB$  に並行に撰べば、 $y$  の値一定なる凡ての點、即ち邊  $AD$  に並行な



第九圖

る Strip  $GH$  上の凡ての點の撓度は、單に  $w$  の函數を以て表はされ、此撓度を示す曲線は、Strip  $GH$  を  $2a$  なる徑間を有する桁と見做したる時の撓度と、其形狀に於て類似せるものと推定することを得可し、他の邊  $AB$  に並行なる Strip  $EF$  に付ても同様なり、故

に  $GH$  及び  $EF$  を普通の桁と見做したる時の撓度の函數を夫々  $w$  及び  $Y$  とすれば、二つの strip の交叉點  $P(x, y)$  に對する撓度  $\zeta$  は

$$\zeta = AX Y \quad \text{但し } A \text{ は或る定數}$$

又は  $m$  及び  $n$  を或る整數とし

$$\zeta = \sum A_{mn} X_m Y_n$$

の如く表はすは、強度不當の假定に非るものと思惟することを得可し、而して  $X, Y$



又は  $X_m$  及び  $Y_n$  は、夫々  $x$  軸及び  $y$  軸に並行なる Strip を、普通の桁と見做したる場合の撓度の函數なるが故に、 $X$  及び  $X_m$  は  $x$  のみの、 $Y$  及び  $Y_n$  は  $y$  のみの函數なること明かなり。

次節以下に於て著者の論ぜんとするは、前章に於て叙べたる桁の各場合に對する三角函數を以て  $X_m$  又は  $Y_n$  に代用し、W. Ritz 氏の方法に依りて  $A_{mn}$  の値を定め、以てこの式を Determinate ならしめ、公式 (4), (5) 等を適用して矩形床版の任意の點に於ける撓度、彎曲力率、裁力等に關する公式を誘導せんとする。

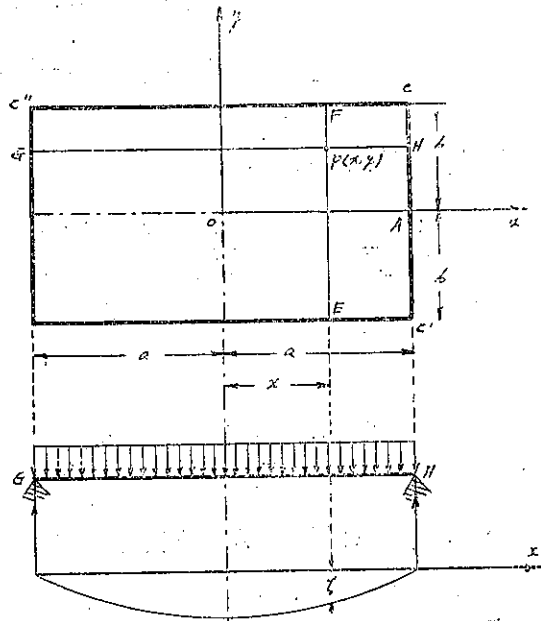
第二節 四邊に於て支承せられ、滿載等布荷重を受くる矩形床版

第一法 撓度方程式が三角函數の Double sigma の無限級數を以て表はされたる場合

(一) 撓度方程式の假定

第十圖に於て、 $GH$  及び  $EF$  を、夫々  $2a$  及び  $2b$  なる徑間を有する單桁と見做せば、 $X_m$  及び  $Y_n$  は、前章第二節の (16) 式と同様の形を有するものと考ふることを得可し、從て此場合に於ては、次の如き關係を有するものと假定す。

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} X_m Y_n \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} \\ &\quad x \cos \frac{\pi(2n+1)}{2b} y \dots \dots (61) \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} X_m'' Y_n \\ &= -\frac{\pi^2}{4a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} (2m+1)^2 \cos \\ &\quad \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \cos \frac{\pi(2n+1)}{2b} y \\ &\quad \dots \dots (62) \end{aligned}$$



第十圖

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} X_m Y_n'' \\ &= -\frac{\pi^2}{4b^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} (2n+1)^2 \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \cos \frac{\pi(2n+1)}{2b} y \end{aligned} \right\} \dots\dots(63)$$

(二) 係数  $A_{mn}$  の算出

公式 (7) の第三式に依り

$$\begin{aligned} \omega_e &= 2p \int_0^a \int_0^b \zeta dx dy = 2p \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^a X_m dx \int_0^b Y_n dy \\ \int_0^a X_m dx &= \int_0^a \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x dx = \frac{2a(-1)^m}{\pi(2m+1)} \\ \int_0^b Y_n dy &= \int_0^b \cos \frac{\pi(2n+1)}{2b} y dy = \frac{2b(-1)^n}{\pi(2n+1)} \end{aligned}$$

故に次の關係を得可し

$$\left. \begin{aligned} \omega_e &= \frac{8pab}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{mn} (-1)^{m+n}}{(2m+1)(2n+1)} \\ \frac{\partial \omega_e}{\partial A_{mn}} &= \frac{8pab}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)(2n+1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(64)$$

公式 (7) の第二式に依り

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega_e}{\partial A_{mn}} &= 2K \left\{ \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 dx dy + \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 dx dy \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} dx dy \right\} \end{aligned} \right\} (65)$$

$$\text{又} \quad \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = \int_0^a \int_0^b \left( \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} X_m'' Y_n \right)^2 dx dy$$

にして (19) 式を誘導したると同様の方法に依り

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = 2 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} \int_0^a X_m'' X_r'' dx \int_0^b Y_n Y_s dy \dots\dots(66)$$

を得可く

$$\int_0^a X_m'' X_r'' dx = \frac{\pi^4}{16a^4} (2m+1)^2 (2r+1)^2 \int_0^a \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \cos \frac{\pi(2r+1)}{2a} x dx$$

$$= \frac{\pi^4}{32a^3} (2m+1)^2 (2r+1)^2 \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)}$$

$$\int_0^b Y_n Y_s dy = \int_0^b \cos \frac{\pi(2n+1)}{2b} y \cos \frac{\pi(2s+1)}{2b} y dy = \frac{b}{2} \cdot \frac{\sin \pi(n-s)}{\pi(n-s)}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 dx dy$$

$$= \frac{\pi^4 b}{32a^3} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} (2m+1)^2 (2r+1)^2 \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} \cdot \frac{\sin \pi(n-s)}{\pi(n-s)}$$

然るに、 $\frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)}$ 、及び  $\frac{\sin \pi(n-s)}{\pi(n-s)}$  は夫々  $m=r$ 、及び  $n=s$  の時は共に

1 にして  $m \neq r$ 、及び  $n \neq s$  の時は共に零なり。而して  $\frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 dx dy$

に就ても同様に計算することを得るが故に次の關係を得可し

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= \frac{\pi^4 b}{32a^3} (2m+1)^4 A_{mn} \\ \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 dx dy &= \frac{\pi^4 a}{32b^3} (2n+1)^4 A_{mn} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (67)$$

$$\text{次に} \quad \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} dx dy = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^2 \int_0^a X_m'' X_m dx \int_0^b Y_n Y_n'' dy$$

$$\int_0^a X_m'' X_m dx = -\frac{\pi^2}{4a^2} (2m+1)^2 \int_0^a \cos^2 \frac{\pi(2m+1)}{2a} x dx = -\frac{\pi^2}{8a} (2m+1)^2$$

$$\int_0^b Y_n Y_n'' dy = -\frac{\pi^2}{8b} (2n+1)^2$$

故に次の式を得可し。

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} dx dy = \frac{\pi^4}{32ab} (2m+1)^2 (2n+1)^2 \dots \dots (68)$$

(67) 及び (68) 式の關係を (65) 式に代入すれば

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial A_{mn}} = \frac{\pi^4 K}{16ab} (2m+1)^2 (2n+1)^2 \left\{ \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{(2n+1)^2}{(2m+1)^2} + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(2m+1)^2}{(2n+1)^2} + \frac{\mu}{2} \right\} A_{mn} \dots (69)$$

然るに

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial A_{mn}} = 2 \frac{\partial \omega_c}{\partial A_{mn}}$$

$$\therefore \frac{\pi^4 K}{16ab} (2m+1)^2 (2n+1)^2 \left\{ \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{(2n+1)^2}{(2m+1)^2} + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(2m+1)^2}{(2n+1)^2} + \frac{2}{\mu} \right\} A_{mn} = \frac{16pab}{\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)(2n+1)}$$

是より直ちに次の公式を得可し

$$\left. \begin{aligned} A_{mn} &= \frac{p}{K} \alpha^2 b^2 \bar{A}_{mn} \\ \bar{A}_{mn} &= \frac{256}{\pi^6} \cdot \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)^3 (2n+1)^3 D_{mn}} \\ D_{mn} &= \frac{a^2}{b^2} \left( \frac{2n+1}{2m+1} \right)^2 + \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{2m+1}{2n+1} \right)^2 + \frac{2}{\mu} \end{aligned} \right\} \dots (70)$$

此公式に依り  $\bar{A}_{mn}$  の値は  $\frac{a^2}{b^2}$  に依りて變化し、其最大は  $D_{mn}$  が最小の時

起ることを知る。而して

$$\frac{d D_{mn}}{d \left( \frac{a}{b} \right)} = 0 \quad \text{よ} \quad \frac{a}{b} = \frac{2m+1}{2n+1}$$

を得るが故に次の公式を得可し

$$\left. \begin{aligned} \max. A_{mn} &= \frac{256}{\pi^6} \cdot \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)^3 (2n+1)^3 \left\{ \frac{2n+1}{2m+1} + \frac{2m+1}{2n+1} + \frac{2}{\mu} \right\}} \\ \text{但し} \quad \frac{a}{b} &= \frac{2m+1}{2n+1} \quad \text{の時起せる} \end{aligned} \right\} \dots (71)$$

$\mu=4$ , 及び  $\mu=10$  の場合に於て、 $a:b$  の種々の値に對する  $\bar{A}_{mn}$  の値を計算すれば Table 1 又は PL. I-1 に示すが如し。

Table 1. Values of  $\bar{A}_{mn}$  for different values of  $a:b$ .

$\frac{a}{b}$	$\mu=4$				$\mu=10$			
	$\bar{A}_{00}$	$-\bar{A}_{01}$	$-\bar{A}_{10}$	$1000\bar{A}_{11}$	$\bar{A}_{00}$	$-\bar{A}_{01}$	$-\bar{A}_{10}$	$1000\bar{A}_{11}$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.00265	0.00084	0.00061	0.00363	0.00266	0.00087	0.00061	0.00365
0.2	0.01043	0.00271	0.00004	0.01430	0.01055	0.00295	0.00004	0.01447
0.3	0.02276	0.00383	0.00010	0.03122	0.02330	0.00439	0.00010	0.03204
0.4	0.03855	0.00370	0.00017	0.05286	0.04028	0.00422	0.00017	0.05526
0.5	0.05406	0.00309	0.00028	0.07690	0.05984	0.00341	0.00027	0.08208
0.6	0.07320	0.00244	0.00039	0.10010	0.07978	0.00263	0.00039	0.10940
0.7	0.08786	0.00192	0.00052	0.12053	0.09751	0.00203	0.00053	0.13380
0.8	0.09853	0.00153	0.00067	0.13518	0.11084	0.00161	0.00069	0.15204
0.9	0.10465	0.00124	0.00084	0.14354	0.11853	0.00129	0.00087	0.16273
1.0	0.10651	0.00103	0.00103	0.14610	0.12104	0.00106	0.00106	0.16603
1.1	0.10508	0.00086	0.00122	0.14400	0.11905	0.00089	0.00127	0.16370
1.2	0.10108	0.00073	0.00143	0.13865	0.11407	0.00074	0.00149	0.15647
1.3	0.09573	0.00063	0.00164	0.13133	0.10730	0.00064	0.00173	0.14728
1.4	0.08965	0.00054	0.00186	0.12297	0.09972	0.00055	0.00197	0.13679
1.5	0.08336	0.00047	0.00208	0.11434	0.09200	0.00043	0.00222	0.12620
1.6	0.07717	0.00042	0.00229	0.10585	0.08452	0.00042	0.00247	0.11594
1.7	0.07126	0.00037	0.00251	0.09777	0.07750	0.00038	0.00271	0.10630
1.8	0.06577	0.00033	0.00271	0.09022	0.07104	0.00034	0.00296	0.09744
1.9	0.06070	0.00030	0.00291	0.08327	0.06514	0.00030	0.00319	0.08936
2.0	0.05606	0.00028	0.00309	0.07690	0.05984	0.00027	0.00341	0.08208

(三) 撓度に関する公式

(61) 及び (70) に依り、撓度  $\zeta$  に関しては、次の公式を得可し。

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{p}{K} a^2 b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} X_m Y_n, & K &= \frac{EI}{1 - \frac{1}{\mu^2}} \\ X_m &= \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x, & Y_n &= \cos \frac{\pi(2n+1)}{2b} y \end{aligned} \right\} \dots (72)$$

$\zeta$  の最大値  $\zeta_0$  は平版の中央、即ち  $x=0, y=0$  の點に起ること明かなり

故に

$$\zeta_0 = \frac{p}{K} a^2 b^2 \bar{\zeta}_0, \quad \bar{\zeta}_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \quad (73)$$

正方形床版、即ち  $a=b$  なる時は次の關係あり。

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= 0.10460 \frac{p}{K} a^4 = 0.09806 \frac{pa^4}{EI}, & \mu=4 & \text{の時} \\ \zeta_0 &= 0.11909 \frac{p}{K} a^4 = 0.11790 \frac{pa^4}{EI}, & \mu=10 & \text{の時} \end{aligned} \right\} \dots (74)$$

初めの4項だけを取り、 $\bar{A}_{02}, \bar{A}_{20} \dots$ 等を見捨てる場合に於て、 $a:b$ の種々の値に對する $\bar{\zeta}_0$ の値は Table 2 (第33頁) 又は PL. I-2 に示すが如し。

$2a$ なる徑間を有する普通の單桁に對しては、公式(24)に依り

$$\zeta_0 = \frac{5pa^4}{24EI} = 0.20833 \frac{pa^4}{EI}$$

なるを以て、正方形床版に對するものゝ約2倍となる。

Hans Lorenz 氏は、其著 'Technische Elastizitäts-Lehre' に於て

$$\zeta = \zeta_0 \cos \frac{\pi}{2a} x \cdot \cos \frac{\pi}{2b} y$$

の如く唯だ1項だけを取り、公式(9)即ち  $\omega_s = \omega_i$  に依りて  $\zeta_0$  値を求めたるに

$$\zeta_0 = \frac{256}{K\pi^6} \cdot \frac{pa^2b^2}{\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right)^2} = 0.06657 \frac{pa^4}{K}, \quad a=b \quad \text{の時} \dots (75)$$

を得たり。

公式(70)と(73)とに依り

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{256}{K\pi^6} pa^4 \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{b^4 (2m+1)(2n+1)^5 + (2m+1)^5(2n+1) + \frac{2}{\mu} \cdot \frac{a^2}{b^2} (2m+1)^2(2n+1)^3} \\ \therefore \lim_{b \rightarrow \infty} \zeta_0 &= \frac{256}{K\pi^6} pa^4 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{(2m+1)^5(2n+1)} \\ &= \frac{256}{K\pi^6} pa^4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^5} \\ &= \frac{256}{K\pi^6} pa^4 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \frac{5\pi^5}{1536} = \frac{5}{24K} pa^4, \\ &= \frac{5pa^4}{24EI}, \quad \mu = \infty \quad \text{なる時} \end{aligned}$$

是滿載等布荷重を受くる單桁の撓度の公式なり是に依り單桁は、4 邊支承せられたる短形床版の相對する 2 邊の長さが無限大となりし特別の場合と見做すことを得可し。

#### (四) 彎曲力率に関する公式

公式 (4) に依り

$$M_x = -K \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -K \left( -\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)$$

此式に (62), (63) 及び (70) の關係を代入すれば次の公式を得可し

$$\left. \begin{aligned} M_x &= pb^2 \bar{M}_x \\ \bar{M}_x &= \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} X_m Y_n \left\{ (2m+1)^2 + \frac{a^2}{\mu b^2} (2n+1)^2 \right\} \\ M_y &= pa^2 \bar{M}_y \\ \bar{M}_y &= \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} X_m Y_n \left\{ \frac{b^2}{\mu a^2} (2m+1)^2 + (2n+1)^2 \right\} \\ X_m &= \cos \frac{\pi (2m+1)}{2a} x, \quad Y_n = \cos \frac{\pi (2n+1)}{2b} y \end{aligned} \right\} \dots \dots (76)$$

是等の公式に依り、平板中の任意の點に於ける彎曲力率を計算することを得可し。

徑間の中央即ち  $x=0, y=0$  に對する  $M_x$  及び  $M_y$  の値を夫々  $M_{x_0}$ 、及び  $M_{y_0}$  とすれば、次の公式を得

$$\left. \begin{aligned} M_{x_0} &= pb^2 \bar{M}_{x_0} \\ \bar{M}_{x_0} &= \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \left\{ (2m+1)^2 + \frac{a^2}{\mu b^2} (2n+1)^2 \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \left\{ \left( 1 + \frac{a^2}{\mu b^2} \right) (\bar{A}_{00} + 9 \bar{A}_{11}) + \left( 1 + \frac{9a^2}{\mu b^2} \right) \bar{A}_{01} \right. \\ &\quad \left. + \left( 9 + \frac{a^2}{\mu b^2} \right) \bar{A}_{10} + \dots \right\} \\ M_{y_0} &= pa^2 \bar{M}_{y_0} \\ \bar{M}_{y_0} &= \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \left\{ \frac{b^2}{\mu a^2} (2m+1)^2 + (2n+1)^2 \right\} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \left\{ \left( 1 + \frac{b^2}{\mu a^2} \right) (\bar{A}_{00} + 9 \bar{A}_{11}) + \left( 9 + \frac{b^2}{\mu a^2} \right) \bar{A}_{01} \right. \\ &\quad \left. + \left( 9 + \frac{b^2}{\mu a^2} \right) \bar{A}_{10} + \dots \right\} \end{aligned} \right\} \dots \dots (77)$$

$$\left. + \left(1 + \frac{9b^2}{\mu a^2}\right) \bar{A}_{10} + \dots \right\}$$

正方形床版に對しては

$$\left. \begin{aligned} M_{xo} = \bar{M}_{xo} &= 0.34525 pa^2 & \mu=4 & \text{の時} \\ &= 0.30390 pa^2 & \mu=10 & \text{の時} \end{aligned} \right\} \dots \dots (78)$$

$a:b$  の種々の値に對する  $\bar{M}_{xo}$ , 及び  $\bar{M}_{yo}$  の値は、Table 2 表及び PL. I-2 に示すが如し。

普通の單桁に對する、徑間の中央の彎曲力率は

$$\begin{aligned} M_o &= \frac{p}{2} a^2 = 1.45 \bar{M}_{xo} & (\text{for } a=b \text{ and } \mu=4) \\ &= 1.65 \bar{M}_{xo} & (\text{for } a=b \text{ and } \mu=10) \end{aligned}$$

Hans Lorenz 氏の方法に依れば

$$\begin{aligned} M_{xo} &= \frac{64}{\pi^4} pb^2 \frac{1 + \frac{a^2}{\mu b^2}}{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2} \dots \dots \dots (79) \\ &= 0.16426 \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) pa^2 & b=a & \text{の時} \end{aligned}$$

Prof. Grashof 及び Prof. Rankine の公式に依れば

$$\left. \begin{aligned} M_{xo} &= \frac{pb^2}{2} \cdot \frac{a^4}{a^4 + b^4} \\ M_{yo} &= \frac{pa^2}{2} \cdot \frac{b^4}{a^4 + b^4} \\ M_{xo} = M_{yo} &= 0.25 pa^2, & a=b & \text{の時} \end{aligned} \right\} \dots \dots (80)$$

(五) 裁力に関する公式

公式 (5) に依り

$$S_x = -K \left( \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \right), \quad S_y = -K \left( \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} \right)$$

なるが故に、次の公式を得可し

$$\left. \begin{aligned} S_x &= -pb \bar{S}_x \\ \bar{S}_x &= \frac{\pi^3}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} (2m+1) \left\{ \frac{b}{a} (2m+1)^2 \right. \end{aligned} \right\}$$



$$\left. \begin{aligned}
 & + \frac{a}{b}(2n+1)^2 \left\{ \sin \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \cos \frac{\pi(2n+1)}{2b} y \right\} \\
 S_y &= -pa \bar{S}_y \\
 \bar{S}_y &= \frac{\pi^3}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} (2n+1) \left\{ \frac{a}{b}(2n+1)^2 \right. \\
 & \left. + \frac{b}{a}(2m+1)^2 \right\} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \sin \frac{\pi(2n+1)}{2b} y
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (81)$$

此公式に於て、 $x=0$ , 及び  $y=0$  とすれば、 $\bar{S}_x=0$ ,  $S_y=0$  となるが故に、平版の中央に於ける裁力は零なることを知る。

又、 $x=a$ ,  $y=0$ , 及び  $x=0$ ,  $y=b$  と置けば、次の公式を得可し。

$$\left. \begin{aligned}
 S_{x,a} &= -pb \bar{S}_{y,a} \\
 \bar{S}_{x,a} &= \frac{\pi^3}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} (2m+1) (-1)^m \left\{ \frac{b}{a}(2m+1)^2 + \frac{a}{b}(2n+1)^2 \right\} \\
 &= \frac{\pi^3}{8} \left\{ \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) (\bar{A}_{00} - 27 \bar{A}_{11}) + \left( \frac{9a}{b} + \frac{a}{a} \right) \bar{A}_{01} - 3 \left( \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} \right) \bar{A}_{10} + \dots \right\} \\
 S_{y,b} &= -pa \bar{S}_{y,b} \\
 \bar{S}_{y,b} &= \frac{\pi^3}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} (-1)^n (2n+1) \left\{ \frac{a}{b}(2n+1)^2 + \frac{b}{a}(2m+1)^2 \right\} \\
 &= \frac{\pi^3}{8} \left\{ \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) (\bar{A}_{00} - 27 \bar{A}_{11}) - 3 \left( \frac{9a}{b} + \frac{b}{a} \right) \bar{A}_{01} + \left( \frac{a}{b} + \frac{9b}{a} \right) \bar{A}_{10} + \dots \right\}
 \end{aligned} \right\} (82)$$

正方形床版に對しては

$$\left. \begin{aligned}
 S_{x,a} = S_{y,b} &= -0.87466pa & \mu = 4 \text{ の時} \\
 &= -0.98555pa & \mu = 10 \text{ の時}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (83)$$

$a:b$  の種々の値に對する  $\bar{S}_{x,a}$  及び  $\bar{S}_{y,b}$  の値は、Table 2 又は PL.I-2 に示すが如し。

Table 2. Values of  $S_y$ ,  $M_{x0}$ ,  $M_{y0}$ ,  $S_{x,a}$  and  $S_{y,b}$ , for different Values of  $a:b$ .

$\frac{b}{a}$	$\mu$	$\bar{S}_y$	$\bar{M}_{x0}$	$\bar{M}_{y0}$	$\bar{S}_{x,a}$	$\bar{S}_{y,b}$
0.0	10	0.0	0.0			
0.1	"	0.00179	0.00425			
0.2	"	0.00757	0.01793			
0.3	"	0.01870	0.04495			
0.4	"	0.03594	0.08543	0.06032	0.38270	0.72011
0.5	"	0.05624	0.13685	0.12704	0.53106	0.79725

0.6	„	0.07687	0.18918	0.19119	0.66963	0.86344
0.7	„	0.09508	0.23636	0.24337	0.77421	0.93003
0.8	„	0.10869	0.27284	0.27961	0.89242	0.97400
0.9	„	0.11653	0.29500	0.29919	0.95444	0.99163
1.0	„	0.11909	0.30390	0.30390	0.98555	0.98555
1.0	4	0.10460	0.34525	0.34525	0.87466	0.87466
1.1	10	0.11705	0.30032	0.29644	0.99317	0.95956
1.2	„	0.11200	0.28824	0.28826	0.98232	0.91476
1.3	„	0.10508	0.27027	0.26310	0.96230	0.86486
1.4	„	0.09734	0.24954	0.24058	0.93558	0.81156
1.5	„	0.08943	0.22750	0.22172	0.91039	0.75768
1.6	„	0.08175	0.20545	0.20136	0.88323	0.70483
1.7	„	0.07452	0.18410	0.18313	0.85795	0.65772
1.8	„	0.06784	0.16364	0.16354	0.83583	0.61210
1.9	„	0.06174	0.14464	0.15072	0.81538	0.56914
2.0	„	0.05624	0.12704	0.13684	0.79725	0.53106

## (六) 反力に関する公式

邊  $CC'$  上の裁力を  $S_{xa}$ , 其反力を  $R_{cc}'$  を以て表せば公式 (81) の第二式に依り

$$S_{xa} = -pb S_{xa}$$

$$\bar{S}_{xa} = \frac{\pi^3}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} (2m+1) \left\{ \frac{b}{a} (2m+1)^2 + \frac{a}{b} (2n+1)^2 \right\} (-1)^m \cos \frac{\pi(2m+1)}{2b} y$$

$$R_{cc}' = -2 \int_0^b S_{xa} dy = 2pb \int_0^b \bar{S}_{xa} dy$$

$$\int_0^b \bar{S}_{xa} dy = \frac{\pi^3}{8} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} (-1)^m (2m+1) \left\{ \frac{b}{a} (2m+1)^2 + \frac{a}{b} (2n+1)^2 \right\} \int_0^b \cos \frac{\pi(2m+1)}{2b} y dy$$

$$= \frac{\pi^2}{4} b \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \frac{(-1)^m (2m+1)}{2n+1} \left\{ \frac{a}{b} (2m+1)^2 + \frac{a}{b} (2n+1)^2 \right\} \left| \sin \frac{\pi(2n+1)}{2b} y \right|_0^b$$

同様にして次の公式を得可し。

$$\left. \begin{aligned}
 R_{cc}' &= pb^2 \bar{R}_{cc}' \\
 \bar{R}_{cc}' &= \frac{\pi^2}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \frac{(-1)^{m+n} (2m+1)}{2n+1} \left\{ \frac{b}{a} (2m+1)^2 + \frac{a}{b} (2n+1)^2 \right\} \\
 \bar{R}_{cc}'' &= pa^2 \bar{R}_{cc}'' \\
 \bar{R}_{cc}'' &= \frac{\pi^2}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \frac{(-1)^{m+n} (2n+1)}{2m+1} \left\{ \frac{b}{a} (2m+1)^2 + \frac{a}{b} (2n+1)^2 \right\}
 \end{aligned} \right\} (84)$$

之に依り初めの4項だけを取りて計算すれば

$$\left. \begin{aligned}
 a=b, \quad \mu=4 \text{ の時は} \\
 R_{cc}' + R_{cc}'' = 2.46748 pa^2 \quad \text{但し } R_{cc}' = R_{cc}'' \quad \dots\dots\dots (85)
 \end{aligned} \right\}$$

となり、理論上は此値は  $2pa^2$  となるを要するが故に其誤差 23.4% なるを見る可し。

以上叙べたる方法の中、 $\zeta$  に關する方程式は、Karl Harger 氏の假定したるものを其儘採用せり、從て公式 (70) の  $A_{mn}$  に關する式も亦氏の誘導したるものと全く同一なり、唯だ著者は公式の誘導に付ての演算を可及的簡明ならしめ、且つ公式 (73), (77), (82) 等を根據として、Table 1 及び Table 2 の如き必要なる係數の値を計算し、圖表を作製して實地應用の便に供せんとするに過ぎず。

## 第二法 撓度方程式が三角函數の Simple sigma 無限級數を以て表はされたる場合

### (一) 撓度方程式の假定

撓度を表はす無限級數の凡ての項が、各別に既知終瑞端件を満足せしむるものなる以上は、假令之が、 $x$  及び  $y$  の二元函數なりとするも、必ずしも Double sigma の無限級數と爲すを要するものと斷定するの理由なし、故に著者は之を Single sigma を以て表はし、演算上及び凡ての公式を一層簡單ならしむることを計りたり、之がためには (61) 乃至 (63) 式に於て  $m=n$  とすれば可なるも、便宜上次の如く定めんとす。

$$\zeta = -\frac{4a^2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(2m+1)^2} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \cos \frac{\pi(2m+1)}{2b} y \dots\dots\dots (86)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \cos \frac{\pi(2m+1)}{2b} y \dots\dots\dots (87)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{a^2}{b^2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \cos \frac{\pi(2m+1)}{2b} y \dots \dots \dots (88)$$

(二) 係数  $A_m$  算出

$$\begin{aligned} \omega_e &= 2p \int_0^a \int_0^b \zeta \, dx \, dy \\ &= -\frac{8a^4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(2m+1)^2} \int_0^a \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \, dx \int_0^b \frac{\cos(2m+1)\pi}{2b} y \, dy. \\ &= -\frac{8a^4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(2m+1)^2} \cdot \frac{4ab}{\pi^2(2m+1)^2}. \end{aligned}$$

之に依り次の式を得可し。

$$\left. \begin{aligned} \omega_e &= -\frac{32pa^3b}{\pi^4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(2m+1)^4} \\ \frac{\partial \omega_e}{\partial A_m} &= -\frac{32pa^3b}{\pi^4} \cdot \frac{1}{(2m+1)^4} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (89)$$

(66) 式を適用して

$$\begin{aligned} \int_0^a X_m'' X_r'' \, dx &= \int_0^a \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \cos \frac{\pi(2r+1)}{2a} x \, dx = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} \\ &= \frac{a}{2}, \quad r=m \quad \text{の時} \\ &= 0, \quad r \neq m \quad \text{の時} \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} \int_0^b Y_m Y_r \, dy &= \frac{b}{2}, \quad r=m \quad \text{の時} \\ &= 0, \quad r \neq m \quad \text{の時} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 \, dx \, dy = 2A_m \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{1}{2} ab A_m$$

同様に

$$\frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 \, dx \, dy = \frac{a^5}{2b^3} A_m$$

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} &= \frac{a^2}{b^2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^2 \int_0^a \cos^2 \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \, dx \int_0^b \cos^2 \frac{\pi(2m+1)}{2b} y \, dy \\ &= \frac{a^2}{b^2} \sum_{m=0}^{\infty} A_m^2 \frac{ab}{4} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dx dy = \frac{a^3}{2b} A_m$$

上記三つの結果を (65) 式に代入すれば、次の關係を得可し。

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial A_m} = K A_m \frac{a^3}{b} \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu} \right) \dots\dots\dots (90)$$

(89) 及び (90) の關係を、公式 (11) の一般式に入れ、 $A_m$  に就て解けば次の公式を得可し。

$$\left. \begin{aligned} A_m &= -\frac{p}{K} b^2 \bar{A}_m, & K &= \frac{EI}{1 - \frac{1}{\mu^2}} \\ \bar{A}_m &= \frac{B}{(2m+1)^4} \\ B &= \frac{64}{\pi^4 \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu} \right)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (91)$$

$\mu=10$  及び  $\mu=4$  の場合に於て  $a:b$  の種々の値に對する  $\bar{A}_m$  の値は Table 3 又は Pl. I-3 に示すが如し

Table 3. Values of  $\bar{A}_m$  for different values of  $a:b$ .

$\frac{a}{b}$	$\mu=4$				$\mu=10$			
	$\bar{A}_0$	$10\bar{A}_1$	$100\bar{A}_2$	$1000\bar{A}_3$	$\bar{A}_0$	$10\bar{A}_1$	$100\bar{A}_2$	$1000\bar{A}_3$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.00654	0.00081	0.00105	0.00272	0.00656	0.00081	0.00105	0.00273
0.2	0.02574	0.00318	0.00412	0.01072	0.02603	0.00321	0.00416	0.01034
0.3	0.05521	0.00682	0.00883	0.02299	0.05763	0.00712	0.00922	0.02400
0.4	0.09508	0.01174	0.01521	0.03960	0.09940	0.01227	0.01590	0.04140
0.5	0.13832	0.01708	0.02213	0.05761	0.14765	0.01823	0.02362	0.06149
0.6	0.18061	0.02230	0.02890	0.07522	0.19688	0.02430	0.03150	0.08198
0.7	0.21678	0.02876	0.03469	0.09029	0.24064	0.02970	0.03850	0.10021
0.8	0.24312	0.03001	0.03890	0.10126	0.27348	0.03376	0.04376	0.11390
0.9	0.25820	0.03188	0.04131	0.10754	0.29271	0.03614	0.04683	0.12191
1.0	0.26281	0.03248	0.04205	0.10946	0.29865	0.03687	0.04778	0.12440
1.1	0.25903	0.03191	0.04144	0.10788	0.29377	0.03627	0.04700	0.12240
1.2	0.24940	0.03079	0.03990	0.10387	0.28145	0.03475	0.04522	0.11722
1.3	0.26620	0.02916	0.03779	0.09837	0.26475	0.03269	0.04236	0.11039
1.4	0.22121	0.02731	0.03539	0.09213	0.24606	0.03038	0.03937	0.10250
1.5	0.20568	0.02539	0.03291	0.08566	0.22700	0.02802	0.03632	0.09454

1.6	0.19041	0.02351	0.03047	0.07930	0.20854	0.02575	0.03337	0.08686
1.7	0.17586	0.02171	0.02814	0.07930	0.19122	0.02362	0.03059	0.07964
1.8	0.16228	0.02004	0.02597	0.06759	0.17527	0.02164	0.02804	0.07300
1.9	0.14832	0.01849	0.02396	0.06238	0.16077	0.01985	0.02572	0.06696
2.0	0.13832	0.01703	0.02213	0.05761	0.14765	0.01823	0.02362	0.06149

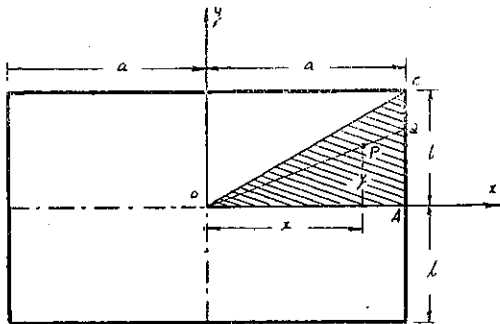
(三) 撓度に関する公式

公式 (91) と (86) 式に依り次の公式を得可し。

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{4B}{K\pi^2} p a^2 b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^6} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \cos \frac{\pi(2m+1)}{2b} y \\ \zeta_0 &= \frac{p}{K} a^2 b^2 \bar{\zeta}_0 \\ \bar{\zeta}_0 &= \frac{256}{\pi^6} \cdot \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^6} = \frac{4}{15 \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu} \right)} \end{aligned} \right\} \cdot (92)$$

正方形床版に對しては

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{p a^4}{K} \cdot \frac{2}{15 \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right)} \\ &= 0.12000 \frac{p a^4}{EI} && \mu = 10 \text{ の時} \\ &= 0.10000 \frac{p a^4}{EI} && \mu = 4 \text{ の時} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (93)$$



第十一圖

$a:b$  の種々の値に對する  $\bar{\zeta}_0$  の値は Table 4 (第44頁) 又は Pl. I-4 に示すが如し。

$x > 0, y > 0$  にして且つ  $\frac{x}{y} \geq \frac{a}{b}$  なる時、即ち第十一圖に於ける三角形  $OAC$  内の任意の點  $P(x, y)$  に對する撓度とは簡單なる五次代數式を以て表はすことを得可し。

三角術の公式に依り

$$\cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \cos \frac{\pi(2m+1)}{2b} y = \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\pi}{2} (2m+1) \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \right.$$

$$+ \cos \frac{\pi}{2} (2m+1) \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \Big\}$$

$\therefore \zeta = \frac{2B}{\pi^2 K} p a^2 b^2 \Delta$  とすれば

$$\Delta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} (2m+1) \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)}{(2m+1)^5} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} (2m+1) \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)}{(2m+1)^6}$$

而して公式 (52) を積分すれば

$0 \leq \theta \leq \pi$  なる時は

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos (2m+1)\theta}{(2m+1)^4} = \frac{\pi}{96} (\pi^3 - 6\pi\theta^2 + 4\theta^3)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \theta (2m+1)}{(2m+1)^5} = \frac{\pi}{96} (\pi^3 \theta - 2\pi\theta^3 + \theta^4)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos (2m+1)\theta}{(2m+1)^6} = \frac{\pi}{960} (\pi^5 - 5\pi^3 \theta^2 + 5\pi\theta^4 - 2\theta^5)$$

..... (94)

$\frac{\pi}{2} \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)$  は  $\Delta OAC$  内に於ては常に正にして其値は  $\pi$  より大なることなし。

即ち

$$0 \leq \frac{\pi}{2} \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right) \leq \pi$$

故に (94) の第三式に依り

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} (2m+1) \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)}{(2m+1)^6} &= \frac{\pi}{960} \left\{ \pi^5 - \frac{5}{4} \pi^3 \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{5\pi^3}{16} \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 - \frac{\pi^5}{16} \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^6 \right\} \\ &= \frac{\pi^6}{15360} \left\{ 16 - 20 \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + 5 \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 - \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^6 \right\} \end{aligned}$$

又  $\frac{\pi}{2} \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)$  は  $\frac{\pi}{2}$  より大なることなく、 $\frac{x}{y} \geq \frac{a}{b}$  なる以上は負なとること

なし、故に  $\Delta OAC$  内に於ては前と同様に

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2} (2m+1) \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)}{(2m+1)^6} &= \frac{\pi^6}{15360} \left\{ 16 - 20 \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 + 5 \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^4 \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^6 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\pi^6}{15360} \left[ 32 - 20 \left\{ \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^2 + \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^2 \right\} + 5 \left\{ \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^4 + \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^4 \right\} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)^5 + \left( \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right)^5 \right\} \right] \\ &= \frac{\pi^6}{7680} \left\{ 16 - 20 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + 5 \left( \frac{x^4}{a^4} + 6 \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} + \frac{y^4}{b^4} \right) - \left( \frac{x^5}{a^5} + 10 \frac{x^3 y^2}{a^3 b^2} + 5 \frac{x y^4}{a b^4} \right) \right\} \end{aligned}$$

故に次の公式を得可し。

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{p}{K} a^2 b^2 \zeta \\ \zeta &= \frac{f(x, y)}{60 \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu} \right)} \\ f(x, y) &= 16 - 20 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + 5 \left( \frac{x^4}{a^4} + 6 \frac{x^2 y^2}{a^2 b^2} + \frac{y^4}{b^4} \right) - \left( \frac{x^5}{a^5} + 10 \frac{x^3 y^2}{a^3 b^2} + \frac{x y^4}{a b^4} \right) \end{aligned} \right\} (95)$$

此公式に於て、 $x=a$  と置けば  $y$  の値の如何に拘らず  $f(x, y)=0$ 、従て  $\zeta$  も零となる。又  $x=0, y=0$  と置けば  $f(x, y)=16$

$$\text{従て} \quad \zeta_0 = \frac{4}{15 \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu} \right)}$$

となり公式 (92) の最後の式と一致するを見るべし、又公式 (95) に依り  $O$  を通る任意の直線  $OPQ$  (第十一圖) に沿ふ撓度曲線を描くことを得可し。

#### (四) 彎曲力率に関する公式

床版の凡ての點に對する彎曲力率は公式 (4), (87), (88) 及び (91) に依り

$$\left. \begin{aligned} M_x &= B p b^2 \left( 1 + \frac{a^2}{\mu b^2} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \\ M_{x0} &= p b^2 \bar{M}_{x0} \\ \bar{M}_{x0} &= B \left( 1 + \frac{a^2}{\mu b^2} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} B \left( 1 + \frac{a^2}{\mu b^2} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + \frac{a^2}{\mu b^2}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu}} \end{aligned} \right\} (96)$$



$$\left. \begin{aligned}
 M_y &= Bpa^2 \left(1 + \frac{b^2}{\mu a^2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \\
 M_{y_0} &= pa^2 \bar{M}_{y_0} \\
 \bar{M}_{y_0} &= B \left(1 + \frac{b^2}{\mu a^2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} B \left(1 + \frac{b^2}{\mu a^2}\right) \\
 &= \frac{2}{3} \frac{1 + \frac{b^2}{\mu a^2}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu}}
 \end{aligned} \right\} \cdot (97)$$

正方形床版に對しては

$$M_{x_0} = M_{y_0} = \frac{pa^2}{3} \dots \dots \dots (98)$$

公式 (96) 及び (97) に依り  $M_{x_0}$  及び  $M_{y_0}$  の最大値を求むる爲め、 $\frac{d\bar{M}_{x_0}}{d\left(\frac{a}{b}\right)} = 0$ ,

及び  $\frac{d\bar{M}_{y_0}}{d\left(\frac{a}{b}\right)} = 0$  として計算を行へば次の公式を得可し。

$$\left. \begin{aligned}
 \text{max. } M_{x_0} &= 0.33500pb^2 & \frac{a}{b} &= 1.0574 \text{ の時} \\
 \text{max. } M_{y_0} &= 0.33500pa^2 & \frac{a}{b} &= 0.9457 \text{ の時}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots (99)$$

$a:b$  の種々の値に對する  $\bar{M}_{x_0}$  及び  $\bar{M}_{y_0}$  の値は Table 4 第 44 頁 又は PL. I-4 に示すが如し。

$\Delta OAC$  内の任意の點に對しては、公式 (95) に依り

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= \frac{\frac{p}{K} a^2 b^2}{60 \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2j}{\mu} \right)} \cdot \frac{\partial^2 f(xy)}{\partial x^2} \\
 \frac{\partial^2 f(xy)}{\partial x^2} &= -\frac{40}{a^2} + 5 \left( \frac{12x^2}{a^4} + \frac{12y^2}{a^2 b^2} \right) - \left( \frac{20x^3}{a^5} + \frac{60xy^2}{a^3 b^2} \right) \\
 &= -\frac{20}{a^2} \left\{ 2 - 3 \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{xy^2}{ab^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \frac{x^3}{a^3} \right\}
 \end{aligned}$$

同様に  $\frac{\partial^2 f(xy)}{\partial y^2} = -\frac{20}{b^2} \left\{ 2 - 3 \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{xy^2}{ab^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \frac{x^3}{a^3} \right\}$

$$\begin{aligned} \therefore M_x &= \frac{pa^2b^2 \frac{20}{a^2}}{60 \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu} \right)} \left( 1 + \frac{a^2}{\mu b^2} \right) \left\{ 2 - 3 \left( \frac{x^2}{a^2} - \frac{xy^2}{ab^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \frac{x^3}{a^3} \right\} \\ &= \frac{pb^2}{3 \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu} \right)} \left( 1 + \frac{a^2}{\mu b^2} \right) \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \left\{ 3 \left( 1 + \frac{y}{b} \right) \left( 1 - \frac{y}{b} \right) - \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$M_y$  に就ても同様に求むることを得るが故に、次の公式を得可し。

$x > 0, y > 0$  にして且つ  $\frac{x}{y} \geq \frac{a}{b}$  の時

$$\left. \begin{aligned} M_x &= pb^2 \bar{M}_x \\ \bar{M}_x &= \frac{1 + \frac{a^2}{\mu b^2}}{3 \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu} \right)} \left( 1 - \frac{x}{a} \right) \left\{ 3 \left( 1 + \frac{y}{b} \right) \left( 1 - \frac{y}{b} \right) - \left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2 \right\} \\ M_y &= pa^2 \bar{M}_y, \quad \bar{M}_y = \frac{1 + \frac{b^2}{\mu a^2}}{1 + \frac{a^2}{\mu b^2}} \bar{M}_x \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

此公式に依り  $x=a$  とすれば、 $y$  の値の如何に拘らず  $M_x$  及び  $M_y$  は零にして、 $x=0, y=0$  に對しては公式(96)及び(97)の結果と一致することを見る可し。

### (五) 裁力に関する公式

公式(87)及び(88)に依り

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} &= -\frac{\pi}{2a} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (2m+1) \sin \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \\ \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} &= -\frac{\pi a}{2b} \sum_{m=0}^{\infty} A_m (2m+1) \sin \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \end{aligned}$$

を得るが故に任意の點に對する裁力に關しては次の公式を得可し。

$$\left. \begin{aligned} S_x &= -pb \bar{S}_x \\ S_y &= -pa \bar{S}_y \\ S_x = S_y &= \frac{\pi}{2} B \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \sin \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \end{aligned} \right\} \quad (101)$$

$$\left. \begin{aligned} S_{xA} &= -pb \bar{S}_{xA} \\ S_{yB} &= -pa \bar{S}_{yB} \\ S_x = S_{yB} &= \frac{\pi}{2} B \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2(m+1)^3} = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu}} \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

正方形床版に對しては

$$S_{xA} = S_{yB} = -\frac{pa}{1 + \frac{1}{\mu}} \dots \dots \dots (103)$$

$a:b$  の種々の値に對する  $\bar{S}_{xA}(=\bar{S}_{yB})$  の値は Table 4 及び PL. I-4 に示すが如し。

$\Delta OAC$  内の點に對しては

$$\frac{\partial^3 f(xy)}{\partial x^3} = \frac{60}{a^3} \left( \frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f(xy)}{\partial x \partial y^2} = \frac{60}{ab^2} \left( \frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right)$$

なるが故に次の公式を得可し。

$$\left. \begin{aligned} &x > 0, y > 0 \text{ にして且つ } \frac{x}{y} \geq \frac{a}{b} \text{ の時} \\ &S_x = -pb \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu}} \left( \frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \\ &S_y = -pa \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu}} \left( \frac{2x}{a} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (104)$$

此公式に依り、 $x=a, y=0$  の時は、 $S_x$  は公式 (102) に示すものと一致すること明かなり。

(六) 反力に關する公式

$x=a$  に對する  $S_x$  の値を  $S_{xa}$  とすれば、公式 (101) に依り

$$S_{xa} = -\frac{\pi}{2} Bpb \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^3} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b}$$

$$S_{xa}' = 2 \int_0^b S_{xa} \delta y = \pi Bpb \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2b}{\pi(2m+1)^4}$$

故に次の公式を得可し。

$$\begin{aligned}
 R_{cc}' &= \frac{\pi^4}{48} B p b^2 \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \\
 R_{cc}'' &= \frac{\pi^4}{48} B p a^2 \left( \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \right) \\
 R_{cc}' + R_{cc}'' &= \frac{4}{3} p (\alpha^2 + b^2) \frac{\frac{b}{a} + \frac{a}{b}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu}} \\
 &= \frac{8}{3} p \frac{a^2}{1 + \frac{1}{\mu}}, \quad a=b \text{ なる時} \\
 &= 2.1333 p a^2
 \end{aligned} \tag{105}$$

理論上は此最後の値は  $2pa^2$  となる可き筈なるが故に正方形床版に於て  $\mu=4$  の時は約 6.7% の誤差あり、而して  $\frac{8}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{\mu}} = 2$  と置けば  $\mu=3$  を得るが故に

$\mu=3$  なる時は理論上の反力と公式 (105) とが合致することを知る可し。

上叙の如く第二法に依りて、撓度に関する方程式を、三角函數の Single sigma の無限級數とすれば、 $o, A, B$  等の點に於ける  $\zeta, M, S$  等に関する無限級數は凡て其總和を求むることを得るが故に第一法の如く初めの幾項かを取り、夫以下を無視するが如き近似的計算を施すの要なく、凡て極て簡單なる代數式を以て表はさるゝが故に實用上頗る便利なり、番に  $O, A, B$  の如き特別の點に對して然るのみならず、 $x > 0, y > 0$  にして且つ  $\frac{x}{y} \geq \frac{a}{b}$  なる場合に對しては、三角函數の無限項の和は簡單なる五次代數式として表はさるること、公式 (95), (100), (104) 等に示すが如し、而して  $x, y$  兩軸は此矩形床版の對稱軸なるが故に  $\triangle OAC$  内の任意の點に對すると、 $M, S$  に就て論すれば、其對稱性に依り、床版内の凡ての點に對すると、 $M, S$  等も亦直ちに見出すことを得可し。

Table 4. Values of  $\bar{\zeta}_0, \bar{M}_{x0}, \bar{M}_{y0}$  and  $\bar{S}_{yA} = \bar{S}_{yB}$ , for different values of  $a:b$ .

$\frac{a}{b}$	$\mu$	$\bar{\zeta}_0$	$\bar{M}_{x0}$	$\bar{M}_{y0}$	$\bar{S}_{yA} = \bar{S}_{yB}$
0.0	10	0.0	0.0	0.06667	0.0
0.1	"	0.00266	0.00332	0.07318	0.09989
0.2	"	0.01093	0.02652	0.09245	0.20602

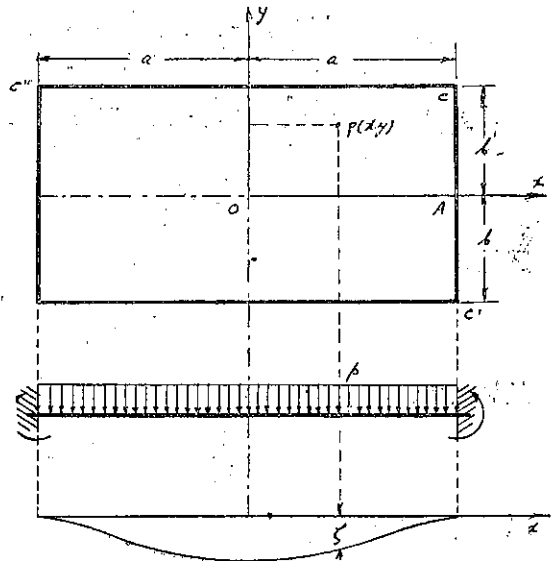
0.3		0.02339	0.05900	0.12344	0.31868
0.4		0.04034	0.10247	0.16389	0.43873
0.5	”	0.05993	0.15356	0.20974	0.56180
0.6	”	0.07989	0.20693	0.25522	0.67910
0.7	”	0.09765	0.25609	0.29396	0.77948
0.8	”	0.11100	0.29525	0.32086	0.85327
0.9	”	0.11880	0.32107	0.33369	0.89597
1.0	4	0.12121	0.33333	0.33333	0.90909
	”	0.10666	0.33333	0.33333	0.80000
1.1	10	0.11963	0.33415	0.32271	0.89832
1.2	”	0.11423	0.32671	0.30540	0.87102
1.3	”	0.10746	0.31403	0.28454	0.83378
1.4	”	0.09987	0.29860	0.26240	0.79181
1.5	”	0.09213	0.28215	0.24056	0.74858
1.6	”	0.08464	0.26577	0.21987	0.70580
1.7	”	0.07761	0.25009	0.20074	0.66595
1.8	”	0.07114	0.23547	0.18334	0.62839
1.9	”	0.06525	0.22202	0.16765	0.59369
2.0	”	0.05993	0.20974	0.15356	0.56180

### 第三節 四邊に於て固定せられ満載等布荷重を受ける矩形床版

第一法 撓度方程式が三角函数の Single sigma 無限級数を以て表はされる場合

#### (一) 撓度方程式の假定

第三章第三節に叙べたる兩端固定せられたる桁に對する方程式 (27) 及び (29) と同様に、此場合に對する撓度方程式は次の如く假定すべし。



第十二圖

$$\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} A_m X_m Y_m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \frac{1}{2}(x^2 - a^2) + \frac{2a^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \right\} \times \left\{ \frac{1}{2}(y^2 - b^2) + \frac{2b^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \right\} \quad \dots (106)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m X_m'' Y_m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ 1 - \frac{\pi}{2}(-1)^m(2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \right\} \times \left\{ \frac{1}{2}(y^2 - b^2) + \frac{2b^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \right\} \quad \dots (107)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m X_m Y_m''$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \frac{1}{2}(x^2 - a^2) + \frac{2a^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \right\} \times \left\{ 1 - \frac{\pi}{2}(-1)^m(2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \right\} \quad \dots (108)$$

(二) 係数  $A_m$  の算出

$$\omega_e = 2p \int_0^a \int_0^b \zeta dx dy = 2p \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_0^a X_m dx \int_0^b Y_m dy$$

$$\int_0^a X_m dx = \left| \frac{1}{2} \left( \frac{x^3}{3} - a^2 x \right) + \frac{2a^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \frac{2a}{\pi(2m+1)} \sin \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \right|_0^a$$

$$= a^3 \left\{ \frac{4}{\pi^2(2m+1)^2} - \frac{1}{3} \right\}$$

同様に

$$\int_0^b Y_m dy = b^3 \left\{ \frac{4}{\pi^2(2m+1)^2} - \frac{1}{3} \right\}$$

故に次の公式を得可し。

$$\frac{\partial \omega_e}{\partial A_m} = 2pa^3b^3 \left\{ \frac{4}{\pi^2(2m+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} \quad \dots (109)$$

又(66)式と同様に

$$\frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = 2 \sum_{r=0}^{\infty} A_r \int_0^a X_m'' X_r'' dx \int_0^b Y_m Y_r dy$$

$$\int_0^a X_m'' X_r'' dx = \int_0^a \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right\} \\ \times \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^r (2r+1) \cos \frac{\pi(2r+1)}{2a} x \right\} dx \\ = a \left\{ \frac{\pi^2}{8} (-1)^{m+r} (2m+1)(2r+1) \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} - 1 \right\}$$

$$\int_0^b Y_m Y_r dy = \frac{2b^5}{\pi^4} \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} - \frac{8}{(2r+1)^4} \right. \\ \left. + \frac{\pi^2 (-1)^{m+r}}{(2m+1)(2r+1)} \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} \right\}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = \frac{4ab^5}{\pi^4} \sum_{r=0}^{\infty} A_r \\ \times \left\{ \frac{\pi^2}{8} (-1)^{m+r} (2m+1)(2r+1) \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} - 1 \right\} \\ \times \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} - \frac{8}{(2r+1)^4} + \frac{\pi^2 (-1)^{m+r}}{(2m+1)(2r+1)} \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} \right\} \\ = \frac{4ab^5}{\pi^4} \sum_{r=0}^{\infty} A_r \left[ \frac{\pi^2}{8} (-1)^{m+r} (2m+1)(2r+1) \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} \left\{ \frac{\pi^4}{15} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{8}{(2m+1)^4} - \frac{8}{(2r+1)^4} \right\} - \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} - \frac{8}{(2r+1)^4} \right\} \right. \\ \left. + \frac{\pi^4}{8} \frac{\sin^2 \pi(m-r)}{\pi^2(m-r)^2} - \frac{\pi^2 (-1)^{m+r}}{(2m+1)(2r+1)} \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} \right]$$

然るに、 $\frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)}$  は  $r=m$  の時は 1 にして、 $r \neq m$  の時は零なり

$$\therefore \frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = \frac{4ab^5}{\pi^4} \left[ \left\{ \frac{\pi^4}{8} - \frac{3\pi^2}{(2m+1)^2} + \frac{\pi^6}{120} (2m+1)^2 \right\} A_m \right. \\ \left. - \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} A_r + 8 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_r}{(2r+1)^4} \right]$$

同様に  $\frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 dx dy = \frac{4a^5 b}{\pi^4} \left[ \left\{ \frac{\pi^4}{8} - \frac{3\pi^2}{(2m+1)^2} + \frac{\pi^6}{120} (2m+1)^2 \right\} A_m \right. \\ \left. - \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} A_r + 8 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_r}{(2r+1)^4} \right]$

$$\text{又} \quad \frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} dx dy = \frac{2a^3 b^3}{\pi^4} \left\{ \frac{5}{6} \pi^2 - \frac{8}{(2m+1)^2} \right\}^2 A_m$$

是等の關係を (65) 式に代入すれば、次の式を得可し。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \omega_i}{\partial A_m} = \frac{8K a^3 b^3}{\pi^4} \left\{ \left( \frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{b^2}{\alpha^2} \right) \left[ \left\{ \frac{\pi^4}{8} - \frac{3\pi^2}{(2m+1)^2} + \frac{\pi^5}{120} (2m+1)^2 \right\} A_m \right. \right. \\ \left. \left. - \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} A_r + 8 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_r}{(2r+1)^4} \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{5}{6} \pi^2 - \frac{8}{(2m+1)^2} \right\}^2 A_m \right\} \end{aligned} \right\} \dots (110)$$

(109) 及び (110) の關係を公式 (9) の一般式に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \left[ \left( \frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{b^2}{\alpha^2} \right) \left\{ \frac{\pi^4}{8} - \frac{3\pi^2}{(2m+1)^2} + \frac{\pi^5}{120} (2m+1)^2 \right\} + \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{5\pi^2}{6} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{8}{(2m+1)^2} \right\}^2 A_m - \left( \frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{b^2}{\alpha^2} \right) \left[ \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} A_r - 8 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_r}{(2r+1)^4} \right] \right\} \\ = \frac{p}{2K} \left\{ \frac{\pi^2}{3} - \frac{4}{(2m+1)^2} \right\}^2 \end{aligned} \right\} (111)$$

此式に於て、 $m$  に  $0, 1, 2, \dots, i$  等の値を與へ  $1+i$  個の方程式を作り、邊々相加へ、兩邊を  $1+i$  にて除し  $i=\infty$  なる極限值を求むれば

$$-\left( \frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{b^2}{\alpha^2} \right) \left\{ \frac{\pi^4}{15} \sum_{r=0}^{\infty} A_r - 8 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_r}{(2r+1)^4} \right\} = \frac{p\pi^4}{18K}$$

此關係を (111) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} & \left[ \left( \frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{b^2}{\alpha^2} \right) \left\{ \frac{\pi^4}{8} - \frac{3\pi^2}{(2m+1)^2} + \frac{\pi^5}{120} (2m+1)^2 \right\} + \frac{1}{\mu} \left\{ \frac{5}{6} \pi^2 - \frac{8}{(2m+1)^2} \right\}^2 \right] A_m \\ & + \left( \frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{b^2}{\alpha^2} \right) \frac{8}{(2m+1)^4} \sum_{r=0}^{\infty} A_r = \frac{p}{K} \left\{ \frac{8}{(2m+1)^4} - \frac{4\pi^2}{3(2m+1)^2} \right\} \end{aligned}$$

此式の  $A_m$  の係数を  $C_m$  を以て表はし且つ

$$A_m = \frac{p}{K} \bar{A}_m$$

とすれば

$$\bar{A}_m = \frac{8}{C_m (2m+1)^4} - \frac{4\pi^2}{3 C_m (2m+1)^2} - \left( \frac{\alpha^2}{b^2} + \frac{b^2}{\alpha^2} \right) \frac{8}{C_m (2m+1)^4} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r$$



是に依り  $\sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r$  の値を知れば、任意の  $m$  に對する  $\bar{A}_m$  の値を算出することを得可し。

上式に於て、 $m$  を  $r$  と見做して  $r$  に  $0, 1, 2, \dots, \infty$  等の値を與へて無数の方程式を作り邊々相加ふれば

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r &= 8 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r(2r+1)^4} - \frac{4\pi^2}{3} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r(2r+1)^2} \\ &\quad - 8 \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r(2r+1)^4} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r \\ \dots \left\{ 1 + 8 \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r(2r+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r \\ &= 8 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r(2r+1)^4} - \frac{4}{3} \pi^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r(2r+1)^2} \end{aligned}$$

故に次の公式を得可し。

$$\left. \begin{aligned} C_m &= NP_m + \frac{Q_m^2}{\mu} \\ N &= \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \\ P_m &= \frac{\pi^4}{8} - \frac{3\pi^2}{(2m+1)^2} + \frac{\pi^6}{120} (2m+1)^2 \\ Q_m &= \frac{5}{6} \pi^2 - \frac{8}{(2m+1)^2} \\ A_m &= \frac{p}{K} \bar{A}_m \quad K = EI \div \left( 1 - \frac{1}{\mu^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (112)$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r = \frac{\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r(2r+1)^4} - \frac{\pi^2}{6} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r(2r+1)^2}}{\frac{1}{8} + N \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r(2r+1)^4}}$$

$$\bar{A}_m = \frac{8}{C_m(2m+1)^4} \left\{ 1 - N \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r \right\} - \frac{4\pi^2}{3 C_m(2m+1)^2}$$

是等の公式に依り、 $r$  に  $0$  より  $5$  迄の値を與へて  $\bar{A}_r$  を計算し、更に  $\bar{A}_m$  の値を求むれば Table 5 (第 50 頁) 又は PL. II-1 に示すが如し。

Table 5. Values of  $\bar{A}_m$  for different values of  $a:b$ .

$\frac{a}{b}$	$\mu$	$\bar{A}_0$	$-10\bar{A}_1$	$-100\bar{A}_2$	$-100\bar{A}_3$	$-100\bar{A}_4$	$-1000\bar{A}_5$
0.0	10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	"	0.03408	0.00210	0.00264	0.00068	0.00025	0.00112
0.2	"	0.13930	0.00839	0.01053	0.00273	0.00100	0.00448
0.3	"	0.31136	0.01889	0.02354	0.00611	0.00230	0.00996
0.4	"	0.54428	0.03251	0.04100	0.01066	0.00390	0.01749
0.5	"	0.82104	0.04879	0.06170	0.01605	0.00588	0.02636
0.6	"	1.11229	0.06572	0.08337	0.02172	0.00796	0.03560
0.7	"	1.37906	0.08108	0.10314	0.02689	0.00986	0.04524
0.8	"	1.58123	0.09254	0.11828	0.03121	0.01183	0.05078
0.9	"	1.71160	0.09982	0.12724	0.03324	0.01219	0.05581
1.0	"	1.74961	0.10197	0.13014	0.03397	0.01246	0.05591
	4	1.74763	0.09724	0.12733	0.03357	0.01237	0.05563
1.1	10	1.71419	0.10014	0.12781	0.03337	0.01224	0.05491
1.2	"	1.63459	0.09568	0.12202	0.03185	0.01167	0.05240
1.3	"	1.52987	0.08966	0.11425	0.02981	0.01093	0.04904
1.4	"	1.41488	0.08302	0.10564	0.02755	0.01010	0.04530
1.5	"	1.29537	0.07624	0.09694	0.02527	0.00926	0.04154
1.6	"	1.18282	0.06982	0.08860	0.02308	0.00846	0.03794
1.7	"	1.07845	0.06377	0.08085	0.02106	0.00771	0.03460
1.8	"	0.98343	0.05825	0.07380	0.01921	0.00688	0.03156
1.9	"	0.89779	0.05327	0.06743	0.01755	0.00643	0.02882
2.0	"	0.82104	0.04879	0.06170	0.01605	0.00588	0.02636

(三) 撓度に関する公式

1 一般式

床版内の任意の點に對する撓度  $\zeta$  は (106) 及び (112) 式に依り次の式を以て表はさる可し。

$$\zeta - \frac{p}{K} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m X_m Y_m = \frac{p}{K} a^2 b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \bar{X}_m \bar{Y}_m$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_m &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) + \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \\ \bar{Y}_m &= \frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (113)$$

2 最大撓度

$\zeta$  の最大値即ち  $x=0, y=0$  に對しては

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{p}{K} a^2 b^2 \bar{\zeta}_0 \\ \bar{\zeta}_0 &= \frac{4}{\pi^4} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ \frac{\pi}{4} - \frac{(-1)^m}{2m+1} \right\}^2 \\ &= 0.01866 \bar{A}_1 + 0.50724 \bar{A}_1 + 0.13889 \bar{A}_2 + 0.34922 \bar{A}_3 + \dots \end{aligned} \right\} \dots (114)$$

正方形床版に對しては

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= 0.02718 \frac{p}{K} a^4 = 0.02691 \frac{pa^4}{EI} \quad \mu=10 \text{ の時} \\ &= 0.02737 \frac{p}{K} a^4 = 0.02566 \frac{pa^4}{EI} \quad \mu=4 \text{ の時} \end{aligned} \right\} \dots (115)$$

$a:b$  の種々の値に對する  $\bar{\zeta}_0$  の値は Table 6 (第 56 頁) 又は PL. II-2 に示すが如し。

普通の固定桁に對しては、公式 (35) に依り

$$\zeta_0 = \frac{pa^4}{24EI} = 0.04167 \frac{pa^4}{EI}$$

なるが故に、此場合の床版の最大撓度の約 1.58 倍に相當す。

Hans Lorenz 氏は

$$\zeta = \frac{\zeta_0}{4} \left( 1 + \cos \frac{\pi x}{a} \right) \left( 1 + \cos \frac{\pi y}{b} \right)$$

とし、公式 (9) 即ち  $w_i = w_e$  に依りて  $\zeta_0$  を求めたるに

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= \frac{16}{K\pi^4} \cdot \frac{pa^2b^2}{3 \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + 2} \\ &= 0.0205 \frac{pa^4}{K} \quad a=b \text{ の時} \end{aligned} \right\} \dots (116)$$

を得たり。

Grashof 氏は、 $2a$  (又は  $2b$ ) なる徑間を有する普通の桁は、 $2a$  及び  $2b$  なる邊を有する矩形床版に於て  $b=\infty$  (又は  $a=\infty$ ) なる特別の場合なりとの謂を以て、固定桁に對する撓度の公式

$$\zeta = \frac{p}{24EI} (a^2 - x^2)^2$$

を其まゝ利用して、四邊固定せられたる床版の撓度は次式を以て表はさるゝものとせり。

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{p}{24EI} \cdot \frac{(a^2-x^2)^2(b^2-y^2)^2}{a^4+b^4} \\ \zeta_0 &= \frac{pa^2b^2}{24EI} \cdot \frac{1}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}} \\ &= \frac{pa^4}{48EI} = 0.02083 \frac{pa^4}{EI} \quad a=b \text{ なる時} \end{aligned} \right\} \dots (117)$$

此式に依れば、正方形床版に對する  $\zeta_0$  は固定桁に對するもの  $\frac{1}{2}$  となることを知る可し。

(四) 彎曲力率に關する公式

1 一般式

任意の點に對する彎曲力率に關しては次の公式を得可し

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -pb^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left( X_m'' \bar{Y}_m + \frac{a^2}{\mu b^2} \bar{X}_m Y_m'' \right) \\ M_y &= -pa^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A} \left( X_m Y_m'' + \frac{b^2}{\mu a^2} X_m'' \bar{Y}_m \right) \\ \bar{X}_m &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) + \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \\ \bar{Y}_m &= \frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \\ X_m'' &= 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \\ Y_m'' &= 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \end{aligned} \right\} \dots (118)$$

2 床版の中央に於ける彎曲力率

公式 (118) に於て、 $x=0, y=0$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_{x_0} &= pb^2 \bar{M}_{x_0} \\ \bar{M}_{x_0} &= \left( 1 + \frac{a^2}{\mu b^2} \right) \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ \frac{3}{2} - \frac{\pi}{4} (-1)^m (2m+1) - \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \\ &= \left( 1 + \frac{a^2}{\mu b^2} \right) ( .07798 \bar{A}_0 + 4.06840 \bar{A}_1 \\ &\quad - 2.55432 \bar{A}_2 + 7.08873 \bar{A}_3 + \dots ) \\ M_{y_0} &= pa^2 \bar{M}_{y_0} \end{aligned} \right\} \dots (119)$$

$$\bar{M}_{y_0} = \frac{1 + \frac{b^2}{\mu a^2}}{1 + \frac{a^2}{\mu b^2}} \bar{M}_{x_0}$$

正方形床版に對しては

$$\begin{aligned} M_{x_0} &= M_{y_0} = pa^2 \bar{M}_{x_0} \\ \bar{M}_{x_0} &= \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) (0.07798 \bar{A}_0 + 4.06840 \bar{A}_1 - 2.55432 \bar{A}_2 \\ &\quad + 7.08873 \bar{A}_3 + \dots \dots \dots) \dots \dots \dots (120) \\ &= 0.10542 \quad \mu = 10 \text{ の時} \\ &= 0.12196 \quad \mu = 4 \text{ の時} \end{aligned}$$

3 固定邊  $CC'$  の中央  $A$  點に於ける彎曲力率

公式 (118) に於て  $x=a, y=0$  とすれば

$$\begin{aligned} M_{x_A} &= -pb^2 \bar{M}_{x_A} \\ \bar{M}_{x_A} &= \frac{2}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ \frac{(-1)^m}{(2m+1)} - \frac{\pi}{4} \right\} \\ &= 0.13662 \bar{A}_0 - 0.71221 \bar{A}_1 - 0.37268 \bar{A}_2 - 0.59095 \bar{A}_3 \dots \dots \dots (121) \\ M_{y_A} &= -pb^2 \bar{M}_{y_A}, \quad \bar{M}_{y_A} = \frac{\bar{M}_{x_A}}{\mu} \end{aligned}$$

正方形床版に對しては

$$\begin{aligned} M_{x_A} &= -0.24697 pb^2 & \mu = 10 \text{ の時} \\ &= -0.24635 pb^2 & \mu = 4 \text{ の時} \\ M_{y_A} &= -0.02470 pb^2 & \mu = 10 \text{ の時} \\ &= -0.06159 pb^2 & \mu = 4 \text{ の時} \end{aligned} \dots \dots \dots (122)$$

4 固定邊  $CC''$  の中央  $B$  點に於ける彎曲力率

公式 (118) に於て  $x=0, y=b$  とすれば

$$\begin{aligned} M_{x_B} &= -pa^2 \bar{M}_{x_B} \\ \bar{M}_{x_B} &= \frac{\bar{M}_{x_A}}{\mu} = \frac{2}{\mu\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ \frac{(-1)^m}{2m+1} - \frac{\pi}{4} \right\} \\ &\dots \dots \dots (123) \\ M_{y_B} &= -pa^2 \bar{M}_{y_B} \\ \bar{M}_{y_B} &= \mu \bar{M}_{x_B} = \bar{M}_{x_A} \end{aligned}$$

$a:b$  の種々の値に對する  $\bar{M}_{x_0}$ ,  $\bar{M}_{y_0}$ ,  $\bar{M}_{x_1}$  等の値は、Table 6 表又は PL. II-2 に示すが如し。

普通の固定桁に對しては

$$M_{x_0} = -\frac{1}{2} M_{x_1} = \frac{p}{6} a^2 = 0.16667 pa^2$$

にして、四邊に於て固定せられたる正方形床版に對しては公式 (120) 及び (122) に依り

$$\begin{aligned} -M_{x_1} &= \frac{0.24697}{0.10542} M_{x_0} = 2.341 M_{x_0} & \mu=10 \text{ の時} \\ &= \frac{0.12196}{0.06159} M_{x_0} = 1.981 M_{x_0} & \mu=4 \text{ の時} \end{aligned}$$

Hans Lorenz 氏の公式に依れば

$$M_x = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{pb^2}{3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + 2} \left\{ \left(1 + \cos \frac{\pi}{b} y\right) \cos \frac{\pi}{a} x + \frac{a^2}{\mu b^2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{a} x\right) \cos \frac{\pi}{b} y \right\} \dots (124)$$

$$M_y = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{1 + \frac{b^2}{\mu a^2}}{1 + \frac{a^2}{\mu b^2}} M_x$$

$$\begin{aligned} M_{x_0} &= \frac{8}{\pi^2} \cdot \frac{1 + \frac{a^2}{\mu b^2}}{3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + 2} pb^2 \\ &= \frac{1}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{\mu}\right) pa^2 \quad b=a \text{ の時} \\ &= 0.11145 pa^2 \quad b=a \text{ にして、} \mu=10 \text{ の時} \\ &= 0.12665 pa^2 \quad b=a \text{ にして、} \mu=4 \text{ の時} \\ M_{y_0} &= M_{x_0} \end{aligned} \dots (125)$$

$$\begin{aligned} M_{x_1} &= -\frac{pb^2}{3\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2}\right) + 2} \\ &= -\frac{pb^2}{\pi^2} \quad a=b \text{ の時} \end{aligned} \dots (126)$$

Prof. Grashof 及び Prof. Rankine の方法に依れば

$$\left. \begin{aligned} M_{x_0} &= \frac{pb^2}{6} \cdot \frac{a^4}{a^4+b^4}, & M_{y_0} &= \frac{pa^2}{6} \cdot \frac{b^4}{a^4+b^4} \\ M_{x_A} &= -\frac{pb^2}{3} \cdot \frac{a^4}{a^4+b^4}, & M_{y_B} &= -\frac{pa^2}{3} \cdot \frac{a^4}{a^4+b^4} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (127)$$

にして、正方形床版に對する  $M_{x_0}$  及び  $M_{x_A}$  は 夫々固定桁に對する  $M_0$  及び  $M_A$  の二分の一となる。

Prof. S. E. Slocum の公式に依れば (阿部博士、鐵筋混凝土工學參照)

$$\left. \begin{aligned} M_{y_0} &= \frac{pb^2}{60} \cdot \frac{10 + \frac{b^3}{a^3}}{1 + \frac{b^3}{a^3}} \\ &= \frac{11}{120} pa^2 = 0.09167 pa^2 && a=b \text{ の時} \\ M_{y_B} &= -\frac{pb^2}{15} \cdot \frac{5 + \frac{b^3}{a^3}}{1 + \frac{b^3}{a^3}} \\ &= -\frac{pb^2}{5} && a=b \text{ の時} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (128)$$

(五) 裁力に關する公式

公式 (5) 及び (106) に依り裁力に關しては次の公式を得可し

I 一般式

$$\left. \begin{aligned} S_x &= -pb \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left( \frac{b}{a} \bar{X}_m'' \bar{Y}_m + \frac{a}{b} \bar{X}_m' \bar{Y}_m' \right) \\ S_y &= -pa \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left( \frac{a}{b} \bar{X}_m \bar{Y}_m'' + \frac{b}{a} \bar{X}_m' \bar{Y}_m' \right) \\ \bar{X}_m &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) + \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \\ \bar{X}_m' &= \frac{x}{a} - (-1)^m \sin \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (129)$$

$$X_m'' = 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1)^2 \sin \frac{\pi(2m+1)x}{2a}$$

$$\bar{X}_m''' = \frac{\pi^2}{4} (-1)^m (2m+1)^2 \sin \frac{\pi(2m+1)x}{2a}$$

$\bar{Y}_m, \bar{Y}_m', Y_m, Y_m''$  等は  $X_m$  に関する式に於て  $a$  の代りに  $b$ ,  $x$  の代りに  $y$  と置きたるものなり。

2. 特種の點に對する裁力

$$S_{x0} = S_{xB} = S_{x0} = 0$$

$$S_{y0} = S_{yA} = S_{y0} = 0$$

$$S_{xA} = -pb \bar{S}_{xA}$$

$$\bar{S}_{xA} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{b}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m (2m+1)^2 \left\{ \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} - \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \frac{b}{a} (0.33709 \bar{A}_0 - 15.81576 \bar{A}_1 - 22.98866 \bar{A}_2 - 71.44721 \bar{A}_3 - 85.79301 \bar{A}_4 - 166.55806 \bar{A}_5 - \dots)$$

$$S_{yB} = -pa \bar{S}_{yB}$$

$$\bar{S}_{yB} = -\frac{a^2}{b^2} \bar{S}_{xA}$$

(130)

$a:b$  の種々の値に對する  $\bar{S}_{xA}$  及び  $\bar{S}_{yB}$  の値は Table 6 又は PL. III-2 に示すが如し

Table 6. Values of  $\bar{\zeta}_0, \bar{M}_{x0}, \bar{M}_{y0}, \bar{S}_{xA}$  and  $S_{yB}$ , for different values of  $a:b$

$\frac{a}{b}$	$\mu$	$\bar{\zeta}_0$	$\bar{M}_{x0}$	$\bar{M}_{y0}$	$\bar{M}_{xA}$	$\bar{S}_{xA}$	$\bar{S}_{yB}$
0.0	10	0.0	0.0		0.0		0.0
0.1	"	0.00052	0.00183	0.02013	0.00472	0.16300	0.00163
0.2	"	0.00215	0.00755	0.02643	0.01969	0.28205	0.01128
0.3	"	0.00480	0.01301	0.03533	0.01402	0.49370	0.04445
0.4	"	0.00811	0.02996	0.04792	0.07680	0.64605	0.09337
0.5	"	0.01270	0.04574	0.06247	0.11596	0.77816	0.19454
0.6	"	0.01723	0.06360	0.07844	0.15708	0.87742	0.31586
0.7	"	0.02138	0.07896	0.09063	0.19473	0.93163	0.45649
0.8	"	0.02454	0.09192	0.09989	0.22324	0.93366	0.59834
0.9	"	0.02658	0.10137	0.10535	0.24162	0.89744	0.72661



1.0	10	0.02718	0.10542	0.10542	0.24697	0.82532	0.82532
	4	0.02566	0.12196	0.12196	0.24635	0.81630	0.81630
1.1	10	0.02690	0.10524	0.10163	0.24200	0.73549	0.89003
1.2	"	0.02537	0.10226	0.09559	0.23077	0.64331	0.92645
1.3	"	0.02373	0.09772	0.08854	0.21584	0.55607	0.93980
1.4	"	0.02195	0.09244	0.08123	0.19978	0.47751	0.93590
1.5	"	0.02000	0.08663	0.07386	0.18291	0.40832	0.91863
1.6	"	0.01833	0.08009	0.06700	0.16704	0.34907	0.89547
1.7	"	0.01670	0.07556	0.06065	0.15230	0.30023	0.86785
1.8	"	0.01523	0.07085	0.05516	0.13890	0.25870	0.83330
1.9	"	0.01390	0.06636	0.05101	0.12691	0.22370	0.80758
2.0	"	0.01270	0.06217	0.04574	0.11597	0.19454	0.77316

(六) 反力に関する公式

邊  $OO'$  及び  $OO''$  に於ける反力を、夫々  $R_{cc'}$  及び  $R_{cc''}$  とすれば次の公式を得可し。

$$\left. \begin{aligned}
 R_{cc'} &= pb^2 \bar{R}_{cc'} \\
 \bar{R}_{cc'} &= \frac{b}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ 2 - \frac{\pi^2}{6} (2m+1)^2 \right\} \\
 R_{cc''} &= pa^2 \bar{R}_{cc''} \\
 \bar{R}_{cc''} &= \frac{a}{b} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ 2 - \frac{\pi^2}{6} (2m+1)^2 \right\}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (130)$$

正方形床版に於て  $\mu=10$  の時は

$$\left. \begin{aligned}
 R_{cc'} + R_{cc''} &= 1.71358 pa^2 \\
 \text{但し、} R_{cc'} &= R_{cc''} = 0.85679 pa^2
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (130)''$$

にして、理論の値  $2pa^2$  に對して約 14.3% の誤差あり、然れども、這是初めの 6 項丈となり、夫れ以下の凡ての項を無視して計算したる結果にして、 $m$  と

$$\bar{A}_m \left\{ 2 - \frac{\pi^2}{6} (2m+1)^2 \right\} \text{ の値とを圖表に示して考察すれば、} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ 2 - \frac{\pi^2}{6} (2m+1)^2 \right\}$$

なる無限級數の和は結局 1 となり

$$R_{cc'} + R_{cc''} = 2pa^2$$

にして理論上の値と一致することを推定し得可し

第二法 撓度方程式が Double sigma の三角函數の無限級數を以て表はされたる場合

## (一) 撓度方程式の假定

撓度方程式を、三角函數の Double sigma 無限級數を以て表はせば次の關係を得可し

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} X_m Y_n \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \left\{ \frac{1}{2}(x^2 - a^2) + \frac{2a^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2}(y^2 - b^2) + \frac{2b^2(-1)^n}{\pi(2n+1)} \cos \frac{\pi(2n+1)}{2b} y \right\} \end{aligned} \right\} \dots (131)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} X_m'' Y_n = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2}(y^2 - b^2) + \frac{2b^2(-1)^n}{\pi(2n+1)} \cos \frac{\pi(2n+1)}{2b} y \right\} \end{aligned} \right\} (132)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} X_m Y_n'' \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \left\{ \frac{1}{2}(x^2 - a^2) + \frac{2a^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right\} \\ &\quad \times \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^n (2n+1) \cos \frac{\pi(2n+1)}{2b} y \right\} \end{aligned} \right\} \dots (133)$$

(二) 係數  $A_{mn}$  の算出

$$\begin{aligned} \omega_c &= \frac{p}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \zeta dx dy = 2p \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \int_0^a X_m dx \int_0^b Y_n dy \\ &= 2p \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} a^3 \left\{ \frac{4}{\pi^2(2m+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} b^3 \left\{ \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} \end{aligned}$$

故に次の式を得可し

$$\left. \begin{aligned} \omega_c &= 2p a^3 b^3 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \left\{ \frac{4}{\pi^2(2m+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} \left\{ \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} \\ \frac{\partial \omega_c}{\partial A_{mn}} &= 2p a^3 b^3 \left\{ \frac{4}{\pi^2(2m+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} \left\{ \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} \end{aligned} \right\} \dots (134)$$

又 (66) 式に依り

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= 2 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} \int_0^a X_m'' X_r'' dx \int_0^b Y_n Y_s dy \int_0^a X_m'' X_r'' dx \\
 &= \int_0^a \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)}{2a} x \right\} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^r (2r+1) \right. \\
 &\quad \left. \times \cos \frac{\pi(2r+1)}{2a} x \right\} dx \\
 &= a \left\{ \frac{\pi^2}{8} (-1)^{m+r} (2m+1) (2r+1) \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} - 1 \right\} \\
 \int_0^b Y_n Y_s dy &= \int_0^b \left\{ \frac{1}{2} (y^2 - b^2) + \frac{2b^2(-1)^m}{\pi(2n+1)} \cos \frac{\pi(2n+1)}{2b} y \right\} \left\{ \frac{1}{2} (y^2 - b^2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2b^2(-1)^s}{\pi(2s+1)} \cos \frac{\pi(2s+1)}{2b} y \right\} dy = \frac{2b^5}{\pi^4} \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2n+1)^4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{8}{(2s+1)^4} + \frac{\pi^2(-1)^{n+s}}{(2n+1)(2s+1)} \frac{\sin \pi(n-s)}{\pi(n-s)} \right\} \\
 \therefore \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= \frac{4ab^5}{\pi^4} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} \left\{ \frac{\pi^2}{8} (-1)^{m+r} (2m+1)(2r+1) \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} - 1 \right\} \left\{ \frac{\pi^4}{15} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{8}{(2n+1)^4} - \frac{8}{(2s+1)^4} + \frac{\pi^2(-1)^{n+s}}{(2n+1)(2s+1)} \frac{\sin \pi(n-s)}{\pi(n-s)} \right\}
 \end{aligned}$$

此式を適當に變化して次の關係を得可し。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right)^2 dx dy &= \frac{4ab^5}{\pi^4} [I] \\
 [I] &= \frac{\pi^4}{8} \frac{(2m+1)^2}{(2n+1)^2} A_{mn} + \frac{\pi^2}{8} (2m+1)^2 \left\{ \frac{\pi^4}{15} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{8}{(2n+1)^4} \right\} \sum_{s=0}^{\infty} A_{ms} - \pi^2 (2m+1)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{ms}}{(2s+1)^4} - \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \sum_{r=0}^{\infty} A_{rn} \\
 &\quad + 8 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{rs}}{(2s+1)^4} - \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2n+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs}
 \end{aligned} \right\} \dots (135)$$

同様にして

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \right)^2 dx dy &= \frac{4 a^5 b}{\pi^2} [II] \\ [II] &= \frac{\pi^4}{8} \frac{(2n+1)^2}{(2m+1)^2} A_{mn} + \frac{\pi^2}{8} (2m+1)^2 \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} A_{rn} \\ &\quad - \pi^2 (2n+1)^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_{rn}}{(2r+1)^4} - \frac{\pi^2}{(2m+1)^2} \sum_{s=0}^{\infty} A_{ms} + 8 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{rs}}{(2r+1)^4} \\ &\quad - \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} \end{aligned} \right\} \cdot (136)$$

$$\begin{aligned} \text{又} \quad \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \xi}{r x^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\gamma y^2} dx dy &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^2 \int_0^a X_m X_m'' dx \int_0^b Y_n Y_n'' dy \\ &= \alpha^3 b^3 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^2 \left\{ \frac{5}{6} - \frac{8}{\pi^2 (2m+1)^2} \right\} \left\{ \frac{5}{6} - \frac{8}{\pi^2 (2n+1)^2} \right\} \end{aligned}$$

故に次の式を得可し

$$\frac{\partial}{\partial A_{mn}} \int_0^a \int_0^b \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dx dy = 2 \alpha^3 b^3 A_{mn} \left\{ \frac{5}{6} - \frac{8}{\pi^2 (2m+1)^2} \right\} \left\{ \frac{5}{6} - \frac{8}{\pi^2 (2n+1)^2} \right\} \quad (137)$$

(135) 乃至 (137) の關係を (65) 式に代入すれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_i}{\partial A_{mn}} &= 2K \left\{ \frac{4 a b^5}{\pi^4} [I] + \frac{4 a^5 b}{\pi^4} [II] + \frac{4}{\mu} \alpha^3 b^3 [III] \right\} \\ &= \frac{8K}{\pi^4} \alpha^3 b^3 \left\{ \frac{b^2}{\alpha^2} [I] + \frac{\alpha^2}{b^2} [II] + \frac{\pi^4}{\mu} [III] \right\} = 2 \frac{\partial \omega_e}{\partial A_{mn}} \\ &= 4p \alpha^3 b^3 \left\{ \frac{4}{\pi^2 (2m+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} \left\{ \frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} \\ \therefore \frac{b^2}{\alpha^2} [I] + \frac{\alpha^2}{b^2} [II] + \frac{\pi^4}{\mu} [III] &= \frac{\pi^4 p}{2K} \left\{ \frac{4}{\pi^2 (2m+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} \left\{ \frac{4}{\pi^2 (2n+1)^2} - \frac{1}{3} \right\} \\ &= \frac{p}{2K} \left\{ \frac{4}{(2m+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\} \left\{ \frac{4}{(2n+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\} \end{aligned}$$

故に次の關係を得可し。

$$\left( \frac{\alpha^2}{b^2} \left[ \begin{aligned} &\frac{\pi^4}{8} \frac{(2n+1)^2}{(2m+1)^2} A_{mn} + \frac{\pi^2}{8} (2m+1)^2 \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} A_{rn} \\ &\quad - \pi^2 (2n+1)^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_{rn}}{(2r+1)^4} - \frac{\pi^2}{(2m+1)^2} \sum_{s=0}^{\infty} A_{ms} \\ &\quad + 8 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{rs}}{(2r+1)^4} - \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} \end{aligned} \right] \right)$$

$$\begin{aligned}
 & \left. \begin{aligned}
 & \frac{\pi^4}{8} \frac{(2m+1)^2}{(2n+1)^2} A_{mn} + \frac{\pi^2}{8} (2m+1)^2 \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2n+1)^4} \right\} \sum_{s=0}^{\infty} A_{ms} \\
 & + \frac{b^2}{a} \left[ -\pi^2 (2m+1)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{ms}}{(2s+1)^4} - \frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \sum_{r=0}^{\infty} A_{rn} \right. \\
 & \left. + 8 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{rs}}{(2s+1)^4} - \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2n+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} \right] \\
 & + \frac{\pi^4}{\mu} \left\{ \frac{5}{6} - \frac{8}{\pi(2m+1)^2} \right\} \left\{ \frac{5}{6} - \frac{8}{\pi^2(2n+1)^2} \right\} A_{mn} \\
 & = \frac{p}{2K} \left\{ \frac{4}{(2m+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\} \left\{ \frac{4}{(2n+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\}
 \end{aligned} \right\} \quad (139)
 \end{aligned}$$

此式に於て  $m$  に、 $0, 1, 2, \dots, i$  等の値を與へて  $i$  個の方程式を作り、邊々相加へ兩邊を  $1+i$  にて除し、 $i=\infty$  なる極限值を求むれば

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha^2}{b^2} \left[ \frac{\pi^6}{120} (2n+1)^2 \sum_{r=0}^{\infty} A_{rn} - \pi^2 (2n+1)^2 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_{rn}}{(2r+1)^4} + 8 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{rs}}{(2r+1)^4} \right. \\
 & \left. - \frac{\pi^4}{15} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} \right] + \frac{b^2}{\alpha^2} \left[ -\frac{\pi^2}{(2n+1)^2} \sum_{r=0}^{\infty} A_{rn} + 8 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{rs}}{(2s+1)^4} \right. \\
 & \left. - \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2n+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} \right] = -\frac{\pi^4 p}{6K} \left\{ \frac{4}{(2n+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\} \dots \dots \dots (139)
 \end{aligned}$$

(138) 式に於て、 $n$  に就て前と同様の極限值を求むれば

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha^2}{b^2} \left[ -\frac{\pi^2}{(2m+1)^2} \sum_{s=0}^{\infty} A_{ms} + 8 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{rs}}{(2r+1)^4} - \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} \right] \\
 & + \frac{b^2}{\alpha^2} \left[ \frac{\pi^6 (2m+1)^2}{120} \sum_{s=0}^{\infty} A_{ms} - \pi^2 (2m+1)^2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{ms}}{(2s+1)^4} + 8 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{rs}}{(2s+1)^4} \right. \\
 & \left. - \frac{\pi^4}{15} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} \right] = -\frac{\pi^4 p}{6K} \left\{ \frac{4}{(2m+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\} \dots \dots \dots (140)
 \end{aligned}$$

(139) 式に於て、 $n$  に付て前と同様の極限值を求むれば

$$\begin{aligned}
 & \frac{\alpha^2}{b^2} \left\{ 8 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{rs}}{(2r+1)^4} - \frac{\pi^4}{15} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} \right\} + \frac{b^2}{\alpha^2} \left\{ 8 \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A_{rs}}{(2s+1)^4} \right. \\
 & \left. - \frac{\pi^2}{15} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} A_{rs} \right\} = \frac{\pi^4 p}{18K} \dots \dots \dots (141)
 \end{aligned}$$

(139), (140) 及び (141) 式の關係を (138) 式に代入すれば

$$\left[ \frac{\alpha^2}{b^2}(2n+1)^4 + \frac{b^2}{a^2}(2m+1)^4 \frac{8}{\mu} \left\{ \frac{5}{6}(2m+1)^2 - \frac{8}{\pi^2} \right\} \left\{ \frac{5}{6}(2n+1)^2 - \frac{8}{\pi^2} \right\} \right] A_{mn}$$

$$- \frac{\alpha^2}{b^2} \frac{8(2n+1)^2}{\pi^2(2m+1)^2} \sum_{r=0}^{\infty} A_{rn} - \frac{b^2}{a^2} \frac{8(2m+1)^2}{\pi^2(2n+1)^2} \sum_{s=0}^{\infty} A_{ms}$$

$$= \frac{64 p}{K \pi^4}$$

之に依り次の公式を得可し。

$$A_{mn} = \frac{p}{K} \bar{A}_{mn}, \quad K = EI \div \left( 1 - \frac{1}{\mu^2} \right)$$

$$\left[ \frac{\alpha^2}{b^2}(2n+1)^4 + \frac{b^2}{a^2}(2m+1)^4 + \frac{8}{\mu} \left\{ \frac{5}{6}(2m+1)^2 - \frac{8}{\mu^2} \right\} \right. \\ \left. \times \left\{ \frac{5}{6}(2n+1)^2 - \frac{8}{\pi^2} \right\} \right] \bar{A}_{mn} - \frac{\alpha^2}{b^2} \frac{8(2n+1)^2}{\pi^2(2m+1)^2} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_{rn} \\ - \frac{b^2}{a^2} \frac{8(2m+1)^2}{\pi^2(2n+1)^2} \sum_{s=0}^{\infty} \bar{A}_{ms} = \frac{64}{\pi^4} \quad \dots (142)$$

此方程式に於て、 $\sum_{s=0}^{\infty} \bar{A}_{ms}$  と  $\sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_{rn}$  とは夫々  $m$  及び  $n$  の函数なること明かなり、然れども、是等が果して如何なる式を以て表はさるゝや、之を見出すこと甚だ困難なり、故に  $m$  及び  $n$  の、或る値以上の  $\bar{A}_{mn}$  を無視し、 $\bar{A}_{00}$ ,  $\bar{A}_{01}$ ,  $\bar{A}_{10}$ ,  $\dots$  等に關する一次方程式を作り、之等を聯立方程式として解きて  $\bar{A}_{mn}$  の値を算出するの外策無し。

例へば、 $\bar{A}_{00}$ ,  $\bar{A}_{01}$ ,  $\bar{A}_{10}$ , 及び  $\bar{A}_{11}$  だけを取り、其他は凡て無視するものとすれば公式 (142) に依り

$$\left\{ \left( \frac{\pi^2}{8} - 1 \right) \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{\pi^2}{\mu} \left( \frac{5}{6} - \frac{8}{\pi^2} \right)^2 \right\} \bar{A}_{00} - \frac{b^2}{a^2} \bar{A}_{01} - \frac{a^2}{b^2} \bar{A}_{10} = \frac{8}{\pi^2}$$

$$- \frac{b^2}{9a^2} \bar{A}_{00} + \left\{ \frac{81a^2}{b^2} \left( \frac{\pi^2}{8} - 1 \right) + \frac{b^2}{a^2} \left( \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{9} \right) + \frac{\pi^2}{\mu} \left( \frac{5}{6} - \frac{8}{\pi^2} \right) \left( \frac{15}{2} - \frac{8}{\pi^2} \right) \right\} \bar{A}_{10}$$

$$- \frac{81b^2}{a^2} \bar{A}_{11} = \frac{8}{\pi^2}$$

$$- \frac{a^2}{9b^2} \bar{A}_{00} + \left\{ \frac{a^2}{b^2} \left( \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{9} \right) + \frac{81b^2}{a^2} \left( \frac{\pi^2}{8} - 1 \right) + \frac{\pi^2}{\mu} \left( \frac{5}{6} - \frac{8}{\pi^2} \right) \left( \frac{15}{2} - \frac{8}{\pi^2} \right) \right\} \bar{A}_{10}$$

$$- \frac{81b^2}{a^2} = \frac{8}{\pi^2}$$

$$-\frac{9a^2}{b^2}\bar{A}_{01} - \frac{9b^2}{a^2}\bar{A}_{10} + \left\{ \left( \frac{81\pi^2}{8} - 9 \right) \left( \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) + \frac{\pi^2}{\mu} \left( \frac{15}{2} - \frac{8}{\pi^2} \right)^2 \right\} \bar{A}_{11} = \frac{8}{\pi^2}$$

是等の方程式を解けば次の公式を得可し

$$\left. \begin{aligned} C &= \frac{8}{\pi^2} = 0.8106 \\ N &= \frac{a^2}{b^2} \\ \bar{A}_{00} &= 9C \frac{B_1 D_1 - B_1' D_2'}{D_1 D_2 - D_1' D_2'} \\ \bar{A}_{01} &= N C \frac{B_1 D_1' - B_1' D_2}{D_1 D_2 - D_1' D_2'} \\ \bar{A}_{10} &= \frac{1}{N} (C \bar{A}_{00} - \frac{\bar{A}_{01}}{N} - C) \\ \bar{A}_{11} &= \frac{1}{\beta} \left( C + 9N \bar{A}_{01} + 9 \frac{\bar{A}_{10}}{N} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (142)_1$$

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= 0.2005 N + \frac{0.2005}{N} + \frac{0.0301}{\mu} \\ D_2 &= 1.2381 N^3 + \frac{8.9342}{\mu} N^2 + \left( 39.5892 + \frac{14.2491}{\mu} \right) N + \frac{20.8707}{N^3} \\ &\quad + \frac{179.1709}{\mu N^2} + \left( 59.2219 + \frac{17.8582}{\mu^2} \right) \frac{1}{N} + \frac{192.8562}{\mu} + \frac{0.3061}{\mu^3} \\ D_1' &= 0.0136 N^2 + \frac{0.0321}{\mu} N + \frac{0.4082}{N^2} + \frac{0.04029}{\mu N} + \frac{0.0007}{\mu^2} \\ &\quad + 0.4218 \\ D_2' &= 8.3108 N^2 + \frac{6.3242}{\mu} N + \frac{9.9227}{N^2} + \frac{84.9685}{\mu N} + \frac{6.6362}{\mu^2} \\ &\quad + 18.2335 \end{aligned} \right\} (142)_2$$

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= 1.9301 N^2 + \frac{10.7407}{\mu} N + \frac{9.9227}{N^2} + \left( 0.9093 + \frac{84.9685}{\mu} \right) \frac{1}{N} \\ &\quad + \frac{6.6362}{\mu^2} + 19.0435 \\ B_1' &= 0.0212 N + \frac{0.1793}{N} + \frac{0.0150}{\mu} \end{aligned} \right\} \dots (142)_3$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 0.2337 \left( N + \frac{1}{N} \right) + \frac{0.0051}{\mu} \\ \beta &= 90.9297 \left( N + \frac{1}{N} \right) + \frac{441.6458}{\mu} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (142)_4$$

$\mu=10$  の場合は次の如くなる

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= 0.2005 \left( N + \frac{1}{N} \right) + 0.0030 \\ D_2 &= 1.2381 N^3 + 0.8934 N^2 + 39.7317 N + \frac{20.8707}{N^3} + \frac{17.9171}{N^2} \\ &\quad + \frac{59.4005}{N} + 19.2859 \\ D_1' &= 0.0136 N^2 + 0.0032 N + \frac{0.4082}{N^2} + \frac{0.0040}{N} + 0.4218 \\ D_2' &= 8.3108 N^2 + 0.6324 N + \frac{9.9227}{N^2} + \frac{8.4969}{N} + 18.2999 \\ B_1 &= 1.9301 N^2 + 1.0741 N + \frac{9.9227}{N^2} + \frac{9.4062}{N} + 19.1099 \\ B_1' &= 0.0212 N + \frac{0.1793}{N} + 0.0015 \\ \alpha &= 0.2337 \left( N + \frac{1}{N} \right) + 0.0005 \\ \beta &= 90.9297 \left( N + \frac{1}{N} \right) + 44.1646 \end{aligned} \right\} (142)_5$$

$\mu=4$  の場合は次の如くなる

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= 0.2005 \left( N + \frac{1}{N} \right) + 0.0075 \\ D_2 &= 1.2381 N^3 + 2.2336 N^2 + 40.479 N + \frac{20.8707}{N^3} + \frac{44.7928}{N^2} \\ &\quad + \frac{60.3390}{N} + 48.2189 \\ D_1' &= 0.0136 N^2 + 0.0080 N + \frac{0.4082}{N^2} + \frac{0.0101}{N} + 0.4218 \\ D_2' &= 8.3108 N^2 + 1.5811 N + \frac{9.9227}{N^2} + \frac{21.2421}{N} + 18.6473 \end{aligned} \right\} (142)_6$$



$$B_1 = 1.9301N^2 + 2.6852N + \frac{9.9227}{N^2} + \frac{22.1514}{N} + 19.4583$$

$$B_1' = 0.0212N + \frac{0.1793}{N} + 0.0038$$

$$\alpha = 0.2337\left(N + \frac{1}{N}\right) + 0.0013$$

$$\beta = 90.9297\left(N + \frac{1}{N}\right) + 110.4115$$

公式 (142) に依り、 $\bar{A}_{mn}$  は  $\frac{a}{b}$  と  $\frac{b}{a}$ 、及び  $m$  と  $n$  とに就て夫々對稱的なるが故に  $\frac{a}{b}$  の或る値に對する  $\bar{A}_{mn}$  の値は  $\frac{b}{a}$  の同じ値に對する  $\bar{A}_{nm}$  と等しかるべき筈なり、然るに上記各公式に依りて算出したる結果は、幾分是等の間に誤差を生ずるが故に(是れ初めの4項丈けを取り、他を無視せるに基因す)兩者の平均を以て所要の値とすれば Table 7 の如き結果を得可し。

Table 7. Values of  $\bar{A}_{mn}$  for different values of  $a:b$

$\frac{a}{b}$	$\mu$	$\bar{A}_{00}$	$\bar{A}_{01}$	$\bar{A}_{10}$	$\bar{A}_{11}$
0.5	10	1.5586	0.1814	0.0519	0.0072
0.6	„	1.7556	0.1638	0.0598	0.0086
0.7	„	1.9173	0.1427	0.0680	0.0099
0.8	„	2.0457	0.1259	0.0777	0.0107
0.9	„	2.1243	0.1095	0.0875	0.0112
1.0	„	2.1492	0.0976	0.0976	0.0114
„	4	2.0794	0.0820	0.0820	0.0078
1.1	10	2.1284	0.0884	0.1082	0.0113
1.2	„	2.0769	0.0817	0.1189	0.0109
1.3	„	2.0101	0.0747	0.1308	0.0105
1.4	„	1.9381	0.0695	0.1397	0.0100
1.5	„	1.8671	0.0659	0.1492	0.0096
1.6	„	1.7973	0.0619	0.1580	0.0090
1.7	„	1.7331	0.0583	0.1659	0.0085
1.8	„	1.6733	0.0557	0.1716	0.0080
1.9	„	1.6147	0.0538	0.1767	0.0076
2.0	„	1.5586	0.0519	0.1814	0.0072

(三) 撓度に関する公式

1 一般式

$$\zeta = \frac{p}{K} a^2 b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_m \bar{X}_m \bar{Y}_n$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{X}_m &= \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{a^2} - 1 \right) + \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \\ \bar{Y}_n &= \frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{2(-1)^n}{\pi(2n+1)} \cos \frac{\pi(2n+1)y}{2b} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (143)$$

2 最大撓度

$$\zeta_0 = \frac{p}{K} a^2 b^2 \bar{\zeta}_0$$

$$\bar{\zeta}_0 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \bar{X}_{m0} \bar{Y}_{n0} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{2(-1)^n}{\pi(2n+1)} \right\}$$

$$= 0.0187 \bar{A}_{00} - 0.00973 (\bar{A}_{01} + \bar{A}_{10}) + 0.5072 \bar{A}_{11} + \dots \dots \dots (144)$$

正方形床版に對しては

$$\left. \begin{aligned} \zeta_0 &= 0.0270 \frac{p}{K} a^4 \quad \mu=10 \text{ の時} \\ &= 0.0252 \frac{p}{K} a^4 \quad \mu=4 \text{ の時} \end{aligned} \right\} \text{公式 (115) 参照} \dots \dots \dots (145)$$

(四) 彎曲力率に關する公式

1 一般式

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -p b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \left( X_m'' \bar{Y}_n + \frac{a^2}{\mu b^2} \bar{X}_m \bar{Y}_n'' \right) \\ M_y &= -p a^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \left( \bar{X}_m \bar{Y}_n'' + \frac{b^2}{\mu a^2} X_m'' \bar{Y}_n \right) \\ \bar{X}_m \text{ と } \bar{Y}_n \text{ とは公式 (143) の如し} \\ X_m'' &= 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \\ Y_n'' &= 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^n (2n+1) \cos \frac{\pi(2n+1)y}{2b} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (146)$$

2 床版の中央 O 點に於ける彎曲力率

$$\begin{aligned}
 M_{x_0} &= pb^2 \bar{M}_{x_0} \\
 \bar{M}_{x_0} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \left[ \left\{ \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) - 1 \right\} \left\{ \frac{2(-1)^n}{\pi(2n+1)} - \frac{1}{2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a^2}{\mu b^2} \left\{ \frac{2(1-)^m}{\pi(2m+1)} - \frac{1}{2} \right\} \left\{ \frac{\pi}{2} (-1)^n (2n+1) - 1 \right\} \right] \quad \dots (147) \\
 &= 0.0780 \left( 1 + \frac{a^2}{\mu b^2} \right) \bar{A}_{00} - \left( 0.4065 + 0.7804 \frac{a^2}{\mu b^2} \right) \bar{A}_{01} \\
 &\quad - \left( 0.7804 + 0.4065 \frac{a^2}{\mu b^2} \right) \bar{A}_{10} + 4.0684 \left( 1 + \frac{a^2}{\mu b^2} \right) \bar{A}_{11} + \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{y_0} &= pa^2 \bar{M}_{y_0} \\
 \bar{M}_{y_0} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \left[ \left\{ \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} - \frac{1}{2} \right\} \left\{ \frac{\pi}{2} (-1)^n (2n+1) - 1 \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{b^2}{\mu a^2} \left\{ \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) - 1 \right\} \left\{ \frac{2(-1)^n}{\pi(2n+1)} - 1 \right\} \right] \quad \dots (148) \\
 &= 0.0780 \left( 1 + \frac{b^2}{\mu a^2} \right) \bar{A}_{00} - \left( 0.7804 + 0.4065 \frac{b^2}{\mu a^2} \right) \bar{A}_{01} \\
 &\quad - \left( 0.4065 + 0.7804 \frac{b^2}{\mu a^2} \right) \bar{A}_{10} + 4.0684 \left( 1 + \frac{b^2}{\mu a^2} \right) \bar{A}_{11} + \dots
 \end{aligned}$$

正方形床版に對しては

$$\begin{aligned}
 M_{x_0} &= M_{y_0} = pa \bar{M}_{x_0} \\
 \bar{M}_{x_0} &= \left( 1 + \frac{1}{\mu} \right) (0.0780 \bar{A}_{00} - 1.1869 \bar{A}_{01} + 4.0684 \bar{A}_{11} \dots) \quad \dots (149) \\
 &= 0.1208 \quad \mu=4 \text{ の時} \\
 &= 0.1080 \quad \mu=10 \text{ の時}
 \end{aligned}$$

3 固定邊  $CC'$  の中央  $A$  點に於ける彎曲力率

$$\begin{aligned}
 M_{x,A} &= -pb^2 \bar{M}_{y,A} \\
 \bar{M}_{y,A} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \left\{ \frac{2(-1)^n}{\pi(2n+1)} - \frac{1}{2} \right\} \\
 &= \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) (\bar{A}_{00} + \bar{A}_{10}) - \left( \frac{2}{3\pi} + \frac{1}{2} \right) (\bar{A}_{01} + \bar{A}_{11}) + \dots \quad \dots (150) \\
 &= 0.1366 (\bar{A}_{00} + \bar{A}_{10}) - 0.7122 (\bar{A}_{01} + \bar{A}_{11}) + \dots \\
 \bar{M}_{y,A} &= -pb^2 \bar{M}_{y,A}, \quad \bar{M}_{y,A} = \frac{\bar{M}_{y,A}}{\mu}
 \end{aligned}$$

正方形床版に對しては

$$\left. \begin{aligned} M_{x,1} &= -0.2293 p a^2 & \mu=10 \text{ の時} \\ &= -0.2313 p a^2 & \mu=4 \text{ の時} \\ M_{y,1} &= \frac{1}{\mu} M_{x,1} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (151)$$

4 固定邊  $CC'$  の中央  $B$  點に於ける彎曲力率

$$\left. \begin{aligned} M_{xB} &= -p a^2 \bar{M}_{xB} \\ \bar{M}_{xB} &= \frac{1}{\mu} \left\{ \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) (\bar{A}_{00} + \bar{A}_{01}) - \left( \frac{2}{3\pi} - \frac{1}{2} \right) (\bar{A}_{10} + \bar{A}_{11}) + \dots \right\} \\ &= \frac{1}{\mu} \left\{ 0.1366 (\bar{A}_{00} + \bar{A}_{01}) - 0.7122 (\bar{A}_{10} + \bar{A}_{11}) + \dots \right\} \\ M_{yB} &= -p a^2 \bar{M}_{yB} \quad \bar{M}_{yB} = \mu \bar{M}_{xB} \end{aligned} \right\} (152)$$

(五) 裁力に関する公式

1 一般式

$$\left. \begin{aligned} S_x &= -p b \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \left( \frac{b}{a} \bar{X}_m'''' \bar{Y}_n'' + \frac{a}{b} \bar{X}_m'' \bar{Y}_n'''' \right) \\ S_y &= -p a \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \left( \frac{a}{b} \bar{X}_m'' \bar{Y}_n'''' + \frac{b}{a} \bar{X}_m'''' \bar{Y}_n'' \right) \\ \bar{X}_m \text{ 及び } \bar{Y}_n &\text{ は公式 (143), } \bar{X}_m'' \bar{Y}_n'' \text{ は公式 (146)} \\ &\text{に示すが如し。} \\ \bar{X}_m &= \frac{x}{a} - (-1)^m \sin \frac{\pi (2m+1)x}{2a} \\ \bar{X}_m'' &= \frac{\pi^2}{4} (-1)^m (2m+1)^2 \sin \frac{\pi (2m+1)x}{2a} \\ \bar{Y}_n \text{ 及び } \bar{Y}_n'' &\text{ は上式に於て } a \text{ の代りに } b, x \text{ の代} \\ &\text{りに } y \text{ と置きたるものなり。} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (153)$$

2. 特別の點に於ける裁力

$$\begin{aligned} S_x = S_{y0} = S_{xB} = S_{yA} = S_{xC} = S_{yC} &= 0 \\ S_{x,1} &= -p b \bar{S}_{x,1} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 S_{x,1} &= \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{b}{a} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} (2m+1)^2 \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{2(-1)^n}{\pi(2n+1)} \right\} \\
 &= \frac{b}{a} \left\{ 0.3371 (\bar{A}_{00} + 9 \bar{A}_{10}) - 1.7573 (\bar{A}_{11} + 9 \bar{A}_{11}) + \dots \dots \dots \right\} \\
 S_{yB} &= -p\alpha S_{yB} \\
 S_{yB} &= \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{a}{b} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} (2n+1)^2 \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \\
 &= \frac{a}{b} \left\{ 0.3371 (\bar{A}_{00} + 9 \bar{A}_{01}) - 1.7573 (\bar{A}_{10} + 9 A_{11}) + \dots \dots \dots \right\}
 \end{aligned} \right\} \dots (154)$$

Karl Hager 氏は第三章第三節の固定桁に就て叙べたると同様の理由に依り

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \left\{ \cos \frac{\pi(2m+1)}{a} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{3} \cos \frac{2\pi(m+1)}{a} x \right\} \left[ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2} \left\{ 1 + \cos \frac{2\pi(n+1)}{b} y \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{(2n+1)^2} \left\{ 1 + \cos \frac{\pi(2n+1)}{b} y \right\} \right]
 \end{aligned}$$

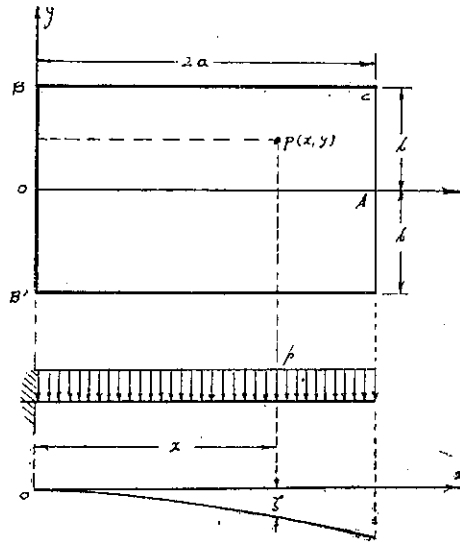
の如き、極めて複雑なる式を用ひ、且つ著者の如く(66)式の如き関係を利用せざりし爲め、中途の計算に於て極めて煩雜なる手数を要したり、而して、著者の公式(142)に於ける  $\sum_{r=0}^{\infty} A_{rn}$  及び  $\sum_{s=0}^{\infty} A_{ms}$  は、夫々  $n$  及び  $m$  の函數にして、是等の内には  $r$  も  $s$  も含まれざるものなり、従て(142)の  $\bar{A}_{mn}$  に關する方程式も亦  $a, b, m$  及び  $n$  の函數なるも、 $r$  及び  $s$  を含むことなし、然るに Hager 氏の誘導したる  $\bar{A}_{mn}$  に關する最後の方程式は、 $a, b, m, n$  の外に  $r$  及び  $s$  を含む爲め、 $A_{00}, A_{01}, A_{10} \dots$  等の算出上、著者の公式(142)<sub>1</sub> (142)<sub>2</sub>  $\dots$  等の計算に比較して、遙かに煩雜なる數字的計算を要すべし。

#### 第四節 三邊に於て固定せられ一邊 Free なる矩形床版

##### 第一項 滿載等荷重を受くる場合

##### (一) 撓度方程式の假定

第十三圖の如き、満載等布荷重を受くる短形床版に於て、 $x$  軸に平行なる 2 邊及び  $y$  軸と一致する 1 邊は、何れも固定せられ、他の 1 邊は全く Free なりとすれば、 $x$  軸に平行なる Strip の撓度は同突桁の如く  $y$  軸に平行なる Strip の撓度曲線を以て表さるゝものと見做すを得るが故に、此床版内の任意の點  $P$  の撓度をとるとすれば、(29) 及び (42) 式に依り次の關係を得可し。



第十三圖

$$\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} A_m X_m Y_m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)} x + \frac{16a^2(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \right\} \times \left\{ \frac{1}{2}(y^2 - b^2) + \frac{2b^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2b} y \right\} \quad \dots (155)$$

是に依りて

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ 1 - (-1)^m \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \right\} \left\{ \frac{1}{2}(y^2 - b^2) + \frac{2b^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2b} y \right\} \quad \dots (156)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)} x + \frac{16a^2(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} \sin \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \right\} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)}{2b} y \right\} \quad \dots (157)$$

となるべし

## (二) 係數 $A_m$ 算出

$$\omega_c = \frac{p}{2} \int_0^{2a} \int_{-b}^b \zeta dx dy = p \int_0^{2a} \int_0^a \zeta dx dy = p \sum_{m=0}^{\infty} A_m \int_0^{2a} X_m dx \int_0^b Y_m dy$$

$$\int_0^{2a} X_m dx = \frac{4 a^3}{\pi^3} \left\{ \frac{\pi^3}{3} - \frac{2 \pi^2 (-1)^m}{2m+1} + \frac{16 (-1)^m}{(2m+1)^3} \right\}$$

$$\int_0^b Y_m dy = \frac{b^3}{\pi^2} \left\{ \frac{4}{(2m+1)^2} - \frac{\pi^2}{2} \right\}$$

故に次の式を得可し

$$\omega_e = \frac{4 p a^3 b^3}{\pi^5} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ \frac{\pi^3}{3} - \frac{2 \pi^2 (-1)^m}{2m+1} + \frac{16 (-1)^m}{(2m+1)^3} \right\} \left\{ \frac{4}{(2m+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\} \dots (158)$$

$$\frac{\partial \omega_e}{\partial A_m} = \frac{4 p a^3 b^3}{\pi^5} \left\{ \frac{\pi^3}{3} - \frac{2 \pi^2 (-1)^m}{2m+1} + \frac{16 (-1)^m}{(2m+1)^3} \right\} \left\{ \frac{4}{(2m+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\}$$

$$\text{又 } \frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^{2a} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = 2 \sum_{r=0}^{\infty} A_r \int_0^{2a} X_m'' X_r'' dx \int_0^b Y_m Y_r dy$$

$$\int_0^{2a} X_m'' X_r'' dx = a \left\{ 2 - \frac{4 (-1)^m}{\pi (2m+1)} - \frac{4 (-1)^r}{\pi (2r+1)} + (-1)^{m+r} \frac{\sin \pi (m-r)}{\pi (m-r)} \right\}$$

$$\int_0^b Y_m Y_r dy = \frac{2 b^3}{\pi^4} \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} - \frac{8}{(2r+1)^4} + \frac{\pi^2 (-1)^{m+r}}{(2m+1)(2r+1)} \cdot \frac{\sin \pi (m-r)}{\pi (m-r)} \right\}$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^{2a} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 dx dy = \frac{4 a b^3}{\pi^4} \sum_{r=0}^{\infty} A_r \left\{ 2 - \frac{4 (-1)^m}{\pi (2m+1)} - \frac{4 (-1)^r}{\pi (2r+1)} + (-1)^{m+r} \frac{\sin \pi (m-r)}{\pi (m-r)} \cdot \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} - \frac{8}{(2r+1)^4} + \frac{\pi^2 (-1)^{m+r}}{(2m+1)(2r+1)} \cdot \frac{\sin \pi (m-r)}{\pi (m-r)} \right\} \right\}$$

$$= \frac{4 a b^3}{\pi^4} \sum_{r=0}^{\infty} A_r \left[ \left\{ 2 - \frac{4 (-1)^m}{\pi (2m+1)} - \frac{4 (-1)^r}{\pi (2r+1)} \right\} \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} - \frac{8}{(2r+1)^4} \right\} + \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} - \frac{8}{(2r+1)^4} \right\} (-1)^{m+r} \cdot \frac{\sin \pi (m-r)}{\pi (m-r)} + \left\{ 2 - \frac{4 (-1)^m}{\pi (2m+1)} - \frac{4 (-1)^r}{\pi (2r+1)} \right\} \frac{\pi^2 (-1)^{m+r}}{(2m+1)(2r+1)} \cdot \frac{\sin \pi (m-r)}{\pi (m-r)} + \frac{\pi^2}{(2m+1)(2r+1)} \left\{ \frac{\sin \pi (m-r)}{\pi (m-r)} \right\}^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4ab^5}{\pi^4} \left[ \frac{\pi^4}{15} - \frac{16}{(2m+1)^4} + \frac{3\pi^2}{(2m+1)^2} - \frac{8\pi(-1)^m}{(2m+1)^3} \right] A_m + \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} \right. \\
&\quad - \left. \frac{(-1)^m}{(2m+1)} \right\} \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} A_r - \frac{4}{\pi} \left\{ \frac{\pi^4}{15} \right. \\
&\quad - \left. \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A_r}{2r+1} - \frac{32}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{(-1)^m}{2m+1} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_r}{(2r+1)^4} \\
&\quad + \frac{32}{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A_r}{(2r+1)^5} \Big] \\
&= \frac{16ab^5}{\pi^4} \left[ \frac{\pi}{4} \left\{ \frac{\pi^4}{15} + \frac{3\pi^2}{(2m+1)^2} - \frac{8\pi(-1)^m}{(2m+1)^3} - \frac{16}{(2m+1)^4} \right\} A_m + \left\{ \frac{\pi}{2} \right. \right. \\
&\quad - \left. \left. \frac{(-1)^m}{2m+1} \right\} \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} A_r - \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A_r}{2r+1} \right. \\
&\quad - \left. 8 \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{(-1)^m}{2m+1} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_r}{(2r+1)^4} + 8 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A_r}{(2r+1)^5} \right] \\
&= \frac{16ab^5}{\pi^4} [I]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{又} \quad \int_0^{2a} X_m X_r dx &= 8a^3 \left[ \frac{1}{5} - \frac{(-1)^m}{\pi(2m+1)} - \frac{(-1)^r}{\pi(2r+1)} + \frac{64}{\pi^5} \left\{ \frac{\pi}{(2m+1)^4} - \frac{2(-1)^m}{(2m+1)^5} \right\} \right. \\
&\quad + \frac{64}{\pi^5} \left\{ \frac{\pi}{(2r+1)^4} - \frac{2(-1)^r}{(2r+1)^5} \right\} + \frac{16(-1)^{m+r}}{3\pi^2(2m+1)(2r+1)} - \frac{128(-1)^m}{\pi^5(2m+1)^2(2r+1)^4} \\
&\quad \left. - \frac{128(-1)^r}{\pi^5(2m+1)^4(2r+1)} + \frac{32(-1)^{m+r}}{\pi^4(2m+1)^2(2r+1)^2} \cdot \frac{\sin \pi(m-r)}{\pi(m-r)} \right] \\
\int_0^b Y_m Y_r dy &= b \left\{ \frac{\pi^2}{8} (-1)^{m+r} (2m+1)(2r+1) \frac{\sin^2 \pi(m-r)}{\pi(m-r)} - 1 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad \frac{\partial}{\partial A_m} \int_0^{2a} \int_0^b \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 dx dy &= 2 \sum_{r=0}^{\infty} A_r \int_0^{2a} X_m X_r dx \int_0^b Y_m Y_r dy = \frac{16a^5 b}{\pi^5} [II] \\
&= \frac{16a^5 b}{\pi^5} \left[ \left\{ \frac{\pi^7}{40} (2m+1)^2 - \frac{\pi^6}{4} (-1)^m (2m+1) + \frac{2\pi^5}{3} + \frac{20\pi^3}{(2m+1)^2} - \frac{64\pi^2(-1)^m}{(2m+1)^3} \right. \right. \\
&\quad - \left. \left. \frac{32\pi}{(2m+1)^4} \right\} A_m - \left\{ \frac{\pi^5}{5} - \frac{\pi^4(-1)^m}{2m+1} + \frac{64\pi}{(2m+1)^3} - \frac{128(-1)^m}{(2m+1)^5} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} A_r \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \pi^4 - \frac{16\pi^3(-1)^m}{3(2m+1)} + \frac{128}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A_r}{2r+1} + \left\{ 64\pi \right. \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{128(-1)^m}{2m+1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{A_r}{(2r+1)^4} + 128 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A_r}{(2r+1)^5} \Big] \\
\int_0^{2a} \int_0^b \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dx dy &= \sum_{m=0}^{\infty} A_m^2 \int_0^{2a} X_m X_m'' dx \int_0^b Y_m Y_m'' dy \\
\int_0^{2a} X_m X_m'' dx &= \frac{8a^2}{\pi^3} \left\{ \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2(-1)^m}{2m+1} - \frac{6\pi}{(2m+1)^2} + \frac{24(-1)^m}{(2m+1)^3} \right\} \\
\int_0^b Y_m Y_m'' dy &= \frac{b^3}{\pi^2} \left\{ \frac{8}{(2m+1)^2} - \frac{5\pi^2}{6} \right\} \\
\therefore \frac{\partial}{\partial A_m} \iint_0^{2a} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} dx dy &= \frac{16a^2 b^3}{\pi^5} A_m [III] \\
&= \frac{16a^2 b^3}{\pi^5} A_m \left\{ \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2(-1)^m}{2m+1} - \frac{6\pi}{(2m+1)^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{24(-1)^m}{(2m+1)^3} \right\} \left\{ \frac{8}{(2m+1)^2} - \frac{5\pi^2}{6} \right\} \\
\therefore \frac{\partial \omega_i}{\partial A_m} &= K \left\{ \frac{16ab^3}{\pi^5} [I] + \frac{16a^2 b}{\pi^5} [II] + \frac{2}{\mu} \cdot \frac{16a^2 b^3}{\pi^5} A_m [III] \right\} \\
&= \frac{16K a^2 b^3}{\pi^5} \left[ \frac{b^2}{a^2} [I] + \frac{a^2}{b^2} [II] + \frac{2}{\mu} [III] A_m \right] = 2 \frac{\partial \omega_e}{\partial A_m} \\
&= \frac{8p a^2 b^3}{\pi^5} \left\{ \frac{\pi^2}{3} - \frac{2\pi^2(-1)^m}{2m+1} + \frac{16(-1)^m}{(2m+1)^3} \right\} \left\{ \frac{4}{(2m+1)} - \frac{\pi^2}{3} \right\} \\
\therefore \frac{a^2}{b^2} [II] + \frac{b^2}{a^2} [I] + \frac{2}{\mu} A_m [III] &= \frac{p}{2K} \left( \frac{\pi^2}{3} - \frac{2\pi^2(-1)^m}{2m+1} \right. \\
&\quad \left. + \frac{16(-1)^m}{(2m+1)^3} \right) \left\{ \frac{4}{(2m+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\}
\end{aligned}$$

是に依りて次の公式を得可し。

$$\begin{aligned}
A_m &= \frac{p}{K} \bar{A}_m \quad K = EI \div \left( 1 - \frac{1}{\mu^2} \right) \\
\lambda m &= \frac{a^2}{b^2} \left\{ \frac{\pi^7}{40} (2m+1)^2 - \frac{\pi^6}{4} (-1)^m (2m+1) + \frac{2\pi^5}{3} + \frac{20\pi^2}{(2m+1)^2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{64\pi^2(-1)^m}{(2m+1)^3} - \frac{32\pi}{(2m+1)^4} \right\} \\
&\quad + \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{\pi^5}{60} + \frac{3\pi^3}{4(2m+1)^2} - \frac{2\pi^2(-1)^m}{(2m+1)^3} - \frac{4\pi}{(2m+1)^4} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi^2 (-1)^m}{2m+1} - \frac{6\pi}{(2m+1)^2} + \frac{24(-1)^m}{(2m+1)^3} \right\} \\
& \quad \left\{ \frac{8}{(2m+1)^2} - \frac{5\pi^2}{6} \right\} \\
\lambda_m \bar{A}_m & - \left[ \frac{a^2}{b^2} \left\{ \frac{\pi^5}{5} - \frac{\pi^4 (-1)^m}{2m+1} - \frac{6\pi}{(2m+1)^2} - \frac{128(-1)^m}{(2m+1)^3} \right\} \right. \\
& - \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{(-1)^m}{2m+1} \right\} \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \left] \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r + \left[ \frac{a^2}{b^2} \left\{ \pi^4 \right. \right. \\
& - \frac{16\pi^2 (-1)^m}{3(2m+1)} + \frac{128}{(2m+1)^4} \right] - \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{\pi^4}{15} \right. \\
& \left. - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1} - \left[ \frac{a^2}{b^2} \left\{ 64\pi - \frac{128(-1)^m}{2m+1} \right\} + \right. \\
& \left. \frac{b^2}{a^2} \left\{ 4\pi - \frac{8(-1)^m}{2m+1} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\bar{A}_r}{(2r+1)^4} + \left( 128 \frac{a^2}{b^2} + 8 \frac{b^2}{a^2} \right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{(2r+1)^5} \right] \\
& = \left\{ \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi^2 (-1)^m}{2m+1} + \frac{8(-1)^m}{(2m+1)^3} \right\} \left\{ \frac{4}{(2m+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\}
\end{aligned} \tag{159}$$

此式に於て、 $m$  に  $0, 1, 2, \dots, i$  等の位を與へ、 $1+i$  個の方程式を作り、邊々相加へ、兩邊を  $1+i$  にて除し、 $i=\infty$  なる極限值を求むれば

$$\begin{aligned}
& \frac{\pi^5}{5} \left( \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{6a^2} \right) \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r - \pi^4 \left( \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{15a^2} \right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1} \\
& + 4\pi \left( \frac{16a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\bar{A}_r}{(2r+1)^4} - 8 \left( \frac{16a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{(2r+1)^5} = \frac{\pi^5}{18} \tag{160}
\end{aligned}$$

此關係を (159) 式に代入し、兩邊を  $\frac{(-1)^m}{2m+1}$  にて除せば

$$\begin{aligned}
\lambda_m \bar{A}_m & (-1)^m (2m+1) + \left[ \frac{a^2}{b^2} \left\{ \pi^4 - \frac{64\pi(-1)^m}{(2m+1)^3} + \frac{128}{(2m+1)^4} \right\} - \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{\pi^4}{15} \right. \right. \\
& \left. - \frac{4\pi(-1)^m}{(2m+1)^3} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r - \left[ \frac{a^2}{b^2} \left\{ \frac{16\pi^3}{3} - \frac{128(-1)^m}{(2m+1)^3} \right\} \right. \\
& \left. - \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{8(-1)^m}{(2m+1)^3} \right] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1} + \left( 128 \frac{a^2}{b^2} + 8 \frac{b^2}{a^2} \right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\bar{A}_r}{(2r+1)^5} = \frac{\pi^4}{3} \\
& + \frac{2\pi^3 (-1)^m}{3(2m+1)} - \frac{20\pi^2}{3(2m+1)^2} + \frac{32}{(2m+1)^4}
\end{aligned}$$

此式の  $m$  に付て、前と同様の極限值を求むれば、

$$\pi^4 \left( \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{15a^2} \right) \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r - \frac{16\pi^3}{3} \cdot \frac{a^2}{b^2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1} + 8 \left( \frac{16a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\bar{A}_r}{(2r+1)^4} = \frac{\pi^4}{3} \dots \dots \dots (161)$$

此關係を前の式に代入すれば

$$\lambda_m \bar{A}_m (-1)^m (2m+1) + \left[ \frac{a^2}{b^2} \left\{ -\frac{64\pi(-1)^m}{(2m+1)^3} + \frac{128}{(2m+1)^4} \right\} - \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{4\pi(-1)^m}{(2m+1)^3} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \right] \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r + \left[ \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{128(-1)^m}{(2m+1)^3} + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{8(-1)^m}{(2m+1)^3} \right] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1} = \frac{2\pi^3(-1)^m}{3(2m+1)} - \frac{20\pi^2}{3(2m+1)^2} - \frac{32}{(2m+1)^4}$$

此關係に依りて次の公式を得可し。

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_m &= \frac{Z_m}{C_m} = \frac{1}{C_m} \left[ R_m + n \left\{ \left( \frac{\pi}{2} - \frac{(-1)^m}{2m+1} \right) \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1} \right\} \right] \\ n &= -\frac{16a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \\ C_m &= \frac{a^2}{b^2} P_m + \frac{b^2}{a^2} P'_m + \frac{Q_m}{\mu} \\ \text{where } \left\{ \begin{aligned} P_m &= \frac{\pi^7}{320} (2m+1)^5 - \frac{\pi^5}{32} (-1)^m (2m+1)^5 + \frac{\pi^5}{12} (2m+1)^4 \\ &\quad - \frac{5}{2} \pi^3 (2m+1)^2 - 8\pi^2 (-1)^m (2m+1) - 4\pi \\ P'_m &= \frac{\pi^5}{480} (2m+1)^4 + \frac{3\pi^3}{32} (2m+1)^2 - \frac{\pi^2}{4} (-1)^m (2m+1) \\ Q_m &= \left\{ \frac{\pi^3}{24} (2m+1)^2 - \frac{\pi^2}{4} (-1)^m (2m+1) - \frac{3\pi}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{6(-1)^m}{2m+1} \right\} \left\{ 8 - \frac{5\pi^2}{6} (2m+1)^2 \right\} \\ R_m &= \frac{\pi^3}{12} (2m+1)^2 - \frac{5\pi^2}{6} (-1)^m (2m+1) + \frac{4(-1)^m}{2m+1} \end{aligned} \right\} \dots (162) \end{aligned}$$

上式に依り  $\sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r$  と、 $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1}$  との値を知れば、任意の  $m$  に對する  $\bar{A}_m$  の値を計算することを得るを知るべし、而して此  $\sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r$  と  $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1}$  とは次の如くして求むることを得可し。

公式 (162) の第一式に於て、 $m$  を  $r$  と見做し、 $r=0$  より  $r=\infty$  に至る  $\Sigma$  を求むれば

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{R_r}{C_r} + n \left[ \left\{ \frac{\pi}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{C_r(2r+1)} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1} \right] \\ \therefore \left\{ \frac{\pi}{2} n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r} - n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{C_r(2r+1)} - 1 \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r - n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1} \\ &\quad + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{R_r}{C_r} = 0 \dots \dots (a) \end{aligned}$$

又公式 (162) の第一式の兩邊に  $\frac{(-1)^m}{2m+1}$  を乘じ、 $m$  を  $r$  と見做して前と同様の  $\Sigma$  を求むれば

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r R_r}{C_r(2r+1)} + n \left[ \left\{ \frac{\pi}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{C_r(2r+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r(2r+1)^2} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r \right. \\ &\quad \left. - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{C_r(2r+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1} \right] \\ \therefore n \left\{ \frac{\pi}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{C_r(2r+1)} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r(2r+1)^2} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r \\ &\quad - \left( n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{C_r(2r+1)} + 1 \right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r R_r}{C_r(2r+1)} = 0 \dots \dots (b) \end{aligned}$$

(a) 及び (b) 式を聯立方程式として解けば次の公式を得可し

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r &= \frac{N'}{D} \\ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1} &= \frac{N'}{n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r}} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 N &= n \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{R_r}{C_r} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{C_r(2r+1)} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{R_r(-1)^r}{C_r(2r+1)} \right\} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{R_r}{C_r} \\
 D &= \left\{ n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{C_r(2r+1)} \right\}^2 - n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r} \left\{ \frac{\pi}{2} + n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r(2r+1)^2} \right\} \\
 N^2 &= \left[ n \left\{ \frac{\pi}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{C_r(2r+1)} \right\} - 1 \right] \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}_r + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{R_r}{C_r}
 \end{aligned} \right\} \dots (163)$$

$r$  に  $0, 1, 2, \dots, i$  等の値を與へ  $i+1$  以下を無視すれば公式 (162) の第二乃至第七式及び公式 (163) に依りて  $\sum_{r=0}^i \bar{A}_r$  及び  $\sum_{r=0}^i \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1}$  を計算することを得可し、 $r$  に  $0$  より  $5$  迄の値を與へて  $\bar{A}_m$  を計算すれば Table 8 又は PL. III-1 に示すが如し。

Table 8. Values of  $\bar{A}_m$  for different values of  $a:b$

$\frac{a}{b}$	$\mu$	$\sum_{r=0}^5 \bar{A}_r$	$\sum_{r=0}^5 \frac{(-1)^r \bar{A}_r}{2r+1}$	$\bar{A}_0$	$10\bar{A}_1$	$100\bar{A}_2$	$100\bar{A}_3$	$100\bar{A}_4$	$100\bar{A}_5$
0.0	10	0.0	0.0	0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	„	0.14572	0.13403	0.13611	0.07211	0.06401	0.10682	0.02882	0.03523
0.2	„	0.63980	0.60533	0.61361	0.26109	0.17566	0.18423	0.05611	0.03758
0.3	„	1.45747	1.41890	1.42748	0.26584	0.16391	0.11799	0.03868	0.02011
0.4	„	2.15069	2.13987	2.12849	0.20017	0.11157	0.07134	0.02385	0.01169
0.5	„	1.88674	1.86669	1.87015	0.13239	0.07236	0.04588	0.01546	0.00750
0.6	„	1.59143	1.57826	1.58134	0.09317	0.05028	0.03187	0.01078	0.00521
0.7	„	1.25555	1.24212	1.24303	0.06815	0.03671	0.02337	0.00791	0.00332
0.8	„	1.03740	1.03047	1.03161	0.05232	0.02783	0.01789	0.00606	0.00233
0.9	„	0.83860	0.83269	0.83405	0.04123	0.02148	0.01413	0.00479	0.00231
1.0	$\left\{ \begin{array}{l} r \\ \neq \end{array} \right.$	0.69010	0.68533	0.68642	0.03336	0.01792	0.01143	0.00388	0.00189
		0.68834	0.68403	0.68513	0.03359	0.01797	0.01148	0.00388	0.00187
1.1	10	0.57723	0.57281	0.57302	0.02756	0.01481	0.00945	0.00320	0.00155
1.2	„	0.48664	0.48329	0.48408	0.02312	0.01243	0.00794	0.00269	0.00130
1.3	„	0.41681	0.41402	0.41463	0.01970	0.01058	0.00678	0.00229	0.00111
1.4	„	0.36042	0.35719	0.35710	0.01699	0.00913	0.00583	0.00198	0.00098
1.5	„	0.31298	0.31062	0.31125	0.01477	0.00794	0.00508	0.00172	0.00083
1.6	„	0.27657	0.27477	0.27548	0.01299	0.00698	0.00446	0.00151	0.00073
1.7	„	0.24546	0.24381	0.24417	0.01150	0.00632	0.00395	0.00134	0.00065
1.8	„	0.21949	0.21808	0.21835	0.01026	0.00552	0.00352	0.00120	0.00058
1.9	„	0.19593	0.19478	0.19482	0.00920	0.00494	0.00316	0.00107	0.00052
2.0	„	0.17782	0.17672	0.17701	0.00725	0.00447	0.00285	0.00097	0.00047

(三) 撓度に関する公式

1 一般式

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{p}{K} a^2 b^2 \bar{\zeta} = \frac{p}{K} a^2 b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \bar{X}_m \bar{Y}_m \\ \bar{X}_m &= \frac{x^2}{2a^2} - \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cdot \frac{x}{a} + \frac{16(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} \sin \frac{\pi(2m+1)x}{4a} \\ \bar{Y}_m &= \frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \end{aligned} \right\} \dots (164)$$

2 最大撓度

ζ の最大は  $x=2a, y=0$ , 即ち Free side の中央 A 點に起ること明かなり故に之を  $\zeta_A$  を以て表せば次の公式を得可し

$$\left. \begin{aligned} \zeta_A &= \frac{p}{K} a^2 b^2 \bar{\zeta}_A \\ \bar{\zeta}_A &= \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ \frac{32(-1)^m}{\pi^3(2m+1)^3} - \frac{24}{\pi^2(2m+1)^2} + \frac{8(-1)^m}{\pi(2m+1)} - 1 \right\} \\ &= 0.14682 \bar{A}_0 - 2.15724 \bar{A}_1 - 0.57972 \bar{A}_2 - 1.41642 \bar{A}_3 \\ &\quad - 0.71706 \bar{A}_4 - 1.25237 \bar{A}_5 \end{aligned} \right\} \dots (165)$$

正方形床版に對しては

$$\left. \begin{aligned} \zeta_A &= 0.09327 \frac{p}{K} a^4 \quad \mu=10 \text{ の時} \\ &= 0.09303 \frac{p}{K} a^4 \quad \mu=4 \text{ の時} \end{aligned} \right\} \dots (166)$$

$a:b$  の種々の値に對する  $\zeta_A$  の値は Table 9 又は Pl. III—2 に示すが如し。

(四) 彎曲力率に関する公式

1 一般式

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -pb^2 \bar{M}_x = -pb^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m (X''_m \bar{Y}_m + \frac{a^2}{\mu b^2} \bar{X}_m Y''_m) \\ M_y &= -pa^2 \bar{M}_y = -pa^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m (\bar{X}_m Y''_m + \frac{b^2}{\mu a^2} X''_m \bar{Y}_m) \\ X_m'' &= 1 - (-1)^m \sin \frac{\pi(2m+1)x}{2b} \\ Y_m'' &= 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \\ \bar{X}_m \text{ と } \bar{Y}_m \text{ とは公式 (164) に示すが如し} \end{aligned} \right\} \dots (167)$$

2 同定邊  $BB'$  の中央  $O$  點に於ける彎曲力率

$$\begin{aligned}
 M_{x_0} &= -pl^2 \bar{M}_{x_0} \\
 \bar{M}_{x_0} &= \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m Y_{m_0} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \\
 &= 0.13662 \bar{A}_0 - 0.71221 \bar{A}_1 - 0.37268 \bar{A}_2 - 0.59095 \bar{A}_3 \\
 &\quad - 0.42926 \bar{A}_4 - 0.55797 \bar{A}_5 \\
 M_{y_0} &= -pb^2 \bar{M}_{y_0} \\
 \bar{M}_{y_0} &= \frac{1}{\mu} \bar{M}'_{y_0}
 \end{aligned} \tag{168}$$

正方形床版に對しては

$$\begin{aligned}
 M_{x_0} &= -0.09122 pa^2 & \mu=10 & \text{の時} \\
 &= -0.09105 pa^2 & \mu=4 & \text{の時} \\
 M_{y_0} &= -0.00912 pa^2 & \mu=10 & \text{の時} \\
 &= -0.02276 pa^2 & \mu=4 & \text{の時}
 \end{aligned} \tag{169}$$

3 Free side  $CC'$  の中央  $A$  點に於ける彎曲力率

$$\begin{aligned}
 M_{x,A} &= -pa^2 \bar{M}_{x,A} \\
 \bar{M}_{x,A} &= \frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \bar{X}_{m,A} Y_{m''_0} = \frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ 2 - \frac{8(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{16}{\pi^2(2m+1)^2} \right\} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \right\} \\
 &= -\frac{1}{\mu} (0.61342 \bar{A}_0 - 17.30266 \bar{A}_1 + 9.10627 \bar{A}_2 \\
 &\quad - 28.63200 \bar{A}_3 + 22.81992 \bar{A}_4 - 41.03364 \bar{A}_5 + \dots) \\
 M_{y,A} &= -pa^2 \bar{M}_{y,A} \quad \bar{M}_{y,A} = \mu \bar{M}_{x,A}
 \end{aligned} \tag{170}$$

正方形床版に對しては

$$\begin{aligned}
 M_{x,A} &= 0.03606 pa^2 & \mu=10 & \text{の時} \\
 &= 0.09015 pa^2 & \mu=4 & \text{の時} \\
 M_{y,A} &= 0.36059 pa^2 & \mu=10 & \text{の時} \\
 &= 0.36063 pa^2 & \mu=4 & \text{の時}
 \end{aligned} \tag{171}$$

4 Free side の一端 C 點に於ける彎曲力率

$$\begin{aligned}
 M_{xC} &= -p\alpha^2 \bar{M}_{xC} \\
 \bar{M}_{xC} &= \frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \quad \bar{X}_{mC} = \frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ 2 - \frac{8(-1)^m}{\pi(2m+1)} + \frac{16}{\pi^2(2m+1)^2} \right\} \dots (172) \\
 &= \frac{1}{\mu} (1.07466\bar{A}_0 + 3.02897\bar{A}_1 + 1.55557\bar{A}_2 \\
 &\quad + 2.38688\bar{A}_3 + 1.73705\bar{A}_4 + 2.24488\bar{A}_5 + \dots) \\
 M_{yC} &= -p\alpha^2 \bar{M}_{yC}, \quad \bar{M}_{yC} = \mu \bar{M}_{xC}
 \end{aligned}$$

正方形床版に對しては

$$\begin{aligned}
 M_{xC} &= -0.07484p\alpha^2 & \mu=10 & \text{の時} \\
 &= -0.18678p\alpha^2 & \mu=4 & \text{の時} \\
 M_{yC} &= -0.74839p\alpha^2 & \mu=10 & \text{の時} \\
 &= -0.74712p\alpha^2 & \mu=4 & \text{の時}
 \end{aligned} \dots (173)$$

a:b の種々の値に對する  $\bar{M}_{x,1}$ ,  $\bar{M}_{y,1}$ ,  $\bar{M}_{y0}$  等の値は Table 9 又は Pl. III-2 に示すが如し

Table 9. Values of  $\bar{\zeta}_1$ ,  $\bar{M}_{x,1}$ ,  $\bar{M}_{y,1}$  and  $\bar{M}_{y0}$  for different values of a:b.

$\frac{a}{b}$	$\mu$	$\bar{\zeta}_1$	$\bar{M}_{x,1} = \mu \bar{M}_{y0}$	$\mu \bar{M}_{x,1} = \bar{M}_{y,1}$	$\mu \bar{M}_{x,2} = \bar{M}_{y,2}$
0.0	10	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	..	0.00190	0.01230	0.07393	0.17296
0.2	..	0.02927	0.06304	0.11473	0.74755
0.3	..	0.14908	0.17450	-0.39738	1.62107
0.4	..	0.26728	0.27550	-0.94661	2.35331
0.5	..	0.24463	0.24739	-0.91115	2.05274
0.6	..	0.21119	0.20896	-0.80459	1.72953
0.7	..	0.16788	0.16532	-0.64451	1.36318
0.8	..	0.13968	0.13696	-0.53987	1.11531
0.9	..	0.11317	0.11081	-0.43832	0.90061
1.0	..	0.09327	0.09122	-0.36059	0.74839
	4	0.09303	0.09105	-0.36063	0.74712
1.1	10	0.07791	0.07620	-0.30255	0.62537
1.2	..	0.06586	0.06438	-0.25587	0.52769



1.3	..	0.05644	0.05515	-0.21935	0.45195
1.4	..	0.04860	0.04757	-0.18887	0.38922
1.5	..	0.04234	0.04140	-0.16466	0.33925
1.6	..	0.03748	0.03661	-0.14573	0.29992
1.7	..	0.03326	0.03248	-0.12936	0.26511
1.8	..	0.02975	0.02905	-0.11572	0.23796
1.9	..	0.02653	0.02692	-0.09565	0.21234
2.0	..	0.02434	0.02382	-0.09565	0.19250

(五) 裁力に関する公式

1 一般式

$$\left. \begin{aligned}
 S_x &= -pa \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left( \bar{X}_m' Y_m'' - \frac{\pi b^2}{4a^2} X_m''' \bar{Y}_m \right) \\
 S_y &= -pb \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left( X_m'' \bar{Y}_m' - \frac{\pi a^2}{4b^2} \bar{X}_m Y_m''' \right) \\
 \bar{X}_m' &= \frac{x}{a} - \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)} \left\{ 1 - \cos \frac{\pi(2m+1)x}{4a} \right\} \\
 \bar{X}_m''' &= (-1)^m (2m+1) \cos \frac{\pi(2m+1)x}{4a} \\
 \bar{Y}_m' &= \frac{y}{b} - (-1)^m \sin \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \\
 \bar{Y}_m''' &= (-1)^m (2m+1)^2 \sin \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \\
 \bar{X}_m, X_m'', \bar{Y}_m, Y_m'' &\text{等は公式 (164) 及び (167) の如し}
 \end{aligned} \right\} (174)$$

2 固定邊 BB' の中央 O 點に於ける裁力

$$\left. \begin{aligned}
 S_{x0} &= pa \bar{S}_{x0} \\
 \bar{S}_{x0} &= \frac{b^2}{a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \frac{\pi}{4} \bar{X}_{m0}''' \bar{Y}_{m0} = \frac{b^2}{a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} (-1)^m (2m+1) \right\} \\
 &= \frac{b^2}{a^2} (0.10730 \bar{A}_0 + 1.67810 \bar{A}_1 - 1.46350 \bar{A}_2 \\
 &\quad + 3.24889 \bar{A}_3 - 2.73429 \bar{A}_4 + 4.81969 \bar{A}_5 \dots) \\
 S_{y0} &= 0
 \end{aligned} \right\} (175)$$

正方形床版に對しては

$$\left. \begin{aligned}
 S_{x0} &= 0.07934 pa & \mu=10 \text{ の時} \\
 &= 0.07925 pa & \mu=4 \text{ の時}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (176)$$

3 Free side  $CC'$  の中央  $A$  點に於ける裁力

$$\left. \begin{aligned}
 S_{x,A} &= pa S_{x,A} \\
 S_{x,A} &= \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m X_{m,A} Y_{m0}'' = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ 4 - \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)} - \pi(-1)^m(2m+1) \right\} \\
 &= -0.41483\bar{A}_0 + 13.84918\bar{A}_1 - 11.96260\bar{A}_2 \\
 &\quad + 26.1730\bar{A}_3 - 24.41578\bar{A}_4 + 38.67324\bar{A}_5 + \dots \\
 S_{y,A} &= 0
 \end{aligned} \right\} (177)$$

正方形床版に對しては

$$\left. \begin{aligned}
 S_{x,A} &= -0.23792 pa & \mu=10 \text{ の時} \\
 &= -0.23707 pa & \mu=4 \text{ の時}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (178)$$

4 Free side の一端  $C$  點に於ける裁力

$$\left. \begin{aligned}
 S_{x,C} &= -pa \bar{S}_{x,C} \\
 \bar{S}_{x,C} &= \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \bar{Y}_{mC} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ 2 - \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \\
 &= 0.72676\bar{A}_0 + 2.42441\bar{A}_1 + 1.74535\bar{A}_2 \\
 &\quad + 2.18189\bar{A}_3 + 1.8189\bar{A}_4 + 2.11575\bar{A}_5 + \dots \\
 S_{y,C} &= -pb \bar{S}_{y,C} \\
 \bar{S}_{y,C} &= \frac{a^2}{b^2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \frac{\pi^2}{4} \bar{X}_{mC} \bar{Y}_{mC}''' \\
 &= \frac{a^2}{b^2} (2.65162\bar{A}_0 + 67.26315\bar{A}_1 + 95.95534\bar{A}_2 \\
 &\quad + 288.58013\bar{A}_3 + 347.16580\bar{A}_4 + 670.22130\bar{A}_5 + \dots)
 \end{aligned} \right\} (179)$$

正方形床版に對しては

$$\left. \begin{aligned}
 S_{x,C} &= -0.50769 pa & \mu=10 \text{ の時} \\
 &= -0.50681 pa & \mu=4 \text{ の時} \\
 S_{y,C} &= -2.12061 pb & \mu=10 \text{ の時} \\
 &= -2.11280 pb & \mu=4 \text{ の時}
 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (180)$$

$a:b$  の種々の値に對する  $\bar{S}_{x0}$ ,  $\bar{S}_{x,A}$ ,  $\bar{S}_{x,C}$  及び  $\bar{S}_{y,C}$  の値は、Table 10 又は PL. III-3 に示すが如し

Table 10. Values of  $\bar{S}_{x_0}$ ,  $\bar{S}_{x_A}$ ,  $\bar{S}_{x_C}$  and  $\bar{S}_{y_C}$  for different values of  $a:b$ .

$\frac{a}{b}$	$\mu$	$\bar{S}_{x_0}$	$\bar{S}_{x_A}$	$\bar{S}_{x_C}$	$\bar{S}_{y_C}$
0.0	10		0.0	0.0	0.0
0.1	"	3.01516	0.05804	0.12128	0.01552
0.2	"	2.83361	0.13508	0.51775	0.18120
0.3	"	2.21047	-0.21438	1.10891	0.57061
0.4	"	1.63916	-0.60337	1.60019	1.19921
0.5	"	0.89335	-0.58928	1.39434	1.53963
0.6	"	0.51547	-0.52525	1.17669	1.81168
0.7	"	0.29702	-0.42206	0.92431	1.92245
0.8	"	0.18691	-0.35448	0.76357	2.05206
0.9	"	0.11807	-0.29977	0.61705	2.09177
1.0	"	0.07934	-0.23792	0.50769	2.12061
	4	0.07925	-0.23707	0.50681	2.11280
1.1	10	0.05470	-0.19902	0.42374	2.13909
1.2	"	0.03902	-0.16835	0.35793	2.14850
1.3	"	0.02831	-0.14839	0.30655	2.15241
1.4	"	0.02103	-0.12428	0.26462	2.15632
1.5	"	0.01596	-0.10838	0.23011	2.15658
1.6	"	0.01240	-0.09562	0.20353	2.16765
1.7	"	0.00974	-0.08517	0.18050	2.17121
1.8	"	0.00777	-0.07618	0.16140	2.17053
1.9	"	0.00623	-0.06791	0.14402	2.16422
2.0	"	0.00506	-0.06323	0.13058	2.14128

## (六) 反力に関する公式

固定邊  $BB'$  に對する反力を  $R'_{BB}$  とすれば

$$\begin{aligned}
 R_{BB'} &= 2 R_{oB} = 2 \int_0^b S_{x_0B} dy = 2 pa \int_0^b \bar{S}_{x_0B} dy \\
 \int_0^b \bar{S}_{x_0B} &= \frac{\pi b^2}{4a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \bar{X}_{m0}''' \int_0^b \bar{Y}_m dy \\
 &= \frac{\pi b^2}{4a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \bar{X}_{m0}''' \int_0^b \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)}{2b} y \right\} dy \\
 &= \frac{\pi b^2}{4a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m X_{m0}''' b \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2(2m+1)^2} \right\}
 \end{aligned}$$

故に次の公式を得可し。

$$\begin{aligned}
 R_{BB'} &= 2pab\bar{R}_{OB} \\
 \bar{R}_{OB} &= \frac{b^2}{a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \frac{\pi}{4} \bar{X}'''_{m0} \int_0^b \frac{\bar{Y}_m}{b} dy \\
 &= \frac{b^2}{a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ -\frac{\pi}{12} (-1)^m (2m+1) + \frac{(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \dots \dots (181) \\
 &= \frac{b^2}{a^2} (0.05851\bar{A}_0 + 0.67939\bar{A}_1 - 1.06533\bar{A}_2 \\
 &\quad + 1.78712\bar{A}_3 - 2.32083\bar{A}_4 + 2.59042\bar{A}_5 \dots \dots)
 \end{aligned}$$

正方形床版に對しては

$$R_{BB'} = 0.08206 pa^2 \quad \text{但し } \mu=10 \text{ の時 } \dots \dots (182)$$

又固定邊 BC に於ける反力を  $R_{BC}$  とすれば

$$\begin{aligned}
 R_{BC} &= -pb \int_0^{2a} \bar{S}_{BC} dx = -pb \frac{a^2}{b^2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \frac{\pi^2}{4} \bar{Y}_{mR}''' \int_0^{2a} \bar{X}_m dx \\
 \int_0^{2a} \bar{X}_m dx &= a \left\{ \frac{4}{3} - \frac{8(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\}
 \end{aligned}$$

故に次の公式を得可し。

$$\begin{aligned}
 R_{BC} &= -pab\bar{R}_{B'} \\
 \bar{R}_{B'} &= \frac{a^2}{b^2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \frac{\pi^2}{4} \bar{Y}_{m0}''' \int_0^{2a} \frac{\bar{X}_m}{a} dx \\
 &= \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m (2m+1)^2 \left\{ \frac{4}{3} - \frac{8(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \dots \dots (183) \\
 &= \frac{a^2}{b^2} (-0.29933\bar{A}_0 + 48.45835\bar{A}_1 - 50.83030\bar{A}_2 \\
 &\quad + 205.18509\bar{A}_3 - 209.93034\bar{A}_4 + 467.18864\bar{A}_5 \dots \dots)
 \end{aligned}$$

正方形床版に對しては

$$R_{BC} = 1.87945 pa^2 \quad \text{但し } \mu=10 \text{ の時}$$

各邊に於ける反力の合力は總荷重に等しからざるべからず、即ち

$$R_{BB'} + R_{BC} + R_{B'C'} = 4pab \quad \text{なるべき筈なり}$$

正方形床版に於て  $\mu=10$  なる時は

$$R_{BB'} + R_{BC} + R_{B'C'} = (0.08206 + 2 \times 1.87945) pa^2 = 3.87106 pa^2$$

となり、理論上の値  $4pab$  に對して約 3.2%の誤差を生ずべし。

第二項 Free side に於ける荷重の強度が最大にして、之に對する固定邊に於ける強度が零なる如き等變荷重を受くる場合

(一) 係數  $A'_m$  の算出

此場合の撓度方程式は滿載等布荷重を受くる時と同様に

$$\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} A'_m X_m Y_m$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} A'_m \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)} + \frac{16a^2(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} \sin \frac{\pi(2m+1)x}{4a} \right\} \times \left\{ \frac{1}{2}(y^2 - b^2) + \frac{2b^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \right\} \quad (184)$$

を以て表はさるゝものと見做すことを得可し、而して第十四圖に示すが如く、荷重の最大強度を  $p'$  とすれば、任意の點  $P(x, y)$  に對する荷重の強度は

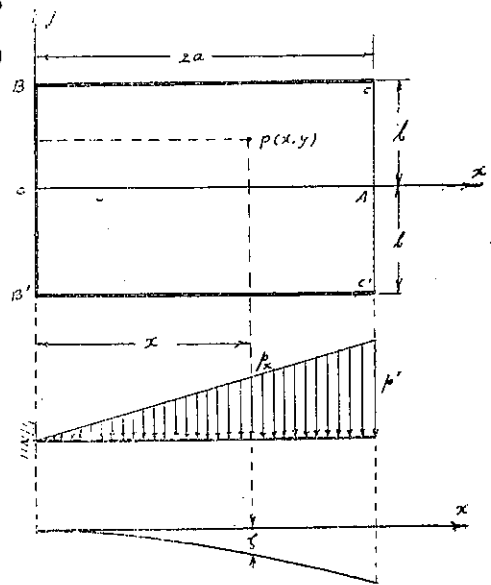
$$p_x = \frac{p'}{2a} x$$

$$\begin{aligned} \therefore \omega_e &= \int_0^{2a} \int_0^b p_x \zeta \, dx \, dy \\ &= \frac{p'}{2a} \int_0^{2a} \int_0^b x \sum_{m=0}^{\infty} A'_m X_m Y_m \, dx \, dy \\ &= \frac{p'}{a2} \sum_{m=0}^{\infty} A'_m \int_0^{2a} x X_m \, dx \int_0^b Y_m \, dy \\ \int_0^{2a} x X_m \, dx &= \int_0^{2a} \left\{ \frac{x^3}{2} - \frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)} x \right. \\ &\quad \left. + \frac{16a^2(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} x \sin \frac{\pi(2m+1)x}{4a} \right\} dx \end{aligned}$$

$$= 2a^4 - \frac{32a^4(-1)^m}{3\pi(2m+1)} + \frac{256a^4}{\pi^4(2m+1)^4} = \frac{32a^4}{\pi^4} \left\{ \frac{\pi^4}{16} - \frac{\pi^3(-1)^m}{3(2m+1)} + \frac{8}{(2m+1)^4} \right\}$$

$$\int_0^b Y_m \, dy = \frac{b^3}{\pi^2} \left\{ \frac{4}{(2m+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\}$$

$$\therefore \omega_e = \frac{p'}{2a} \cdot \frac{32a^4}{\pi^4} \cdot \frac{b^3}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} A'_m \left\{ \frac{\pi^4}{16} - \frac{\pi^3(-1)^m}{3(2m+1)} + \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \left\{ \frac{4}{(2m+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\}$$



第十四圖

$$= \frac{4 \alpha^3 b^3}{\pi^5} p' \sum_{m=1}^{\infty} A'_m \left\{ \frac{\pi^3}{4} - \frac{4 \pi^2 (-1)^m}{3 (2m+1)} + \frac{32}{\pi (2m+1)^4} \right\} \left\{ \frac{4}{(2m+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\}$$

是に依りて次の關係を得可し

$$\frac{\partial \omega_c}{\partial A'_m} = \frac{4 p' \alpha^3 b^3}{\pi^5} \left\{ \frac{\pi^3}{4} - \frac{4 \pi^2 (-1)^m}{3 (2m+1)} + \frac{32}{\pi (2m+1)^4} \right\} \left\{ \frac{4}{(2m+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\} \dots \dots \dots (185)$$

又  $\omega_i$  は滿載等布荷重を受くる場合と全く同様の式を以て表はさるゝが故に

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial A'_m} = \frac{16 K \alpha^3 b^3}{\pi^5} \left\{ \frac{a^2}{b^2} [II] + \frac{b^2}{a^2} [I] + \frac{2}{\mu} [III] \right\} A'_m = 2 \frac{\partial \omega_c}{\partial A'_m}$$

$$\dots \frac{a_2}{b^2} [II] + \frac{b^2}{a^2} [I] + \frac{2}{\mu} [III] A'_m = \frac{p'}{2K} \left\{ \frac{\pi^3}{4} - \frac{4 \pi^2 (-1)^m}{3 (2m+1)} + \frac{32}{\pi (2m+1)^4} \right\} \left\{ \frac{4}{(2m+1)^2} - \frac{\pi^2}{3} \right\}$$

是に依り滿載等布荷重を受くる場合と同様に

$$A'_m = \frac{p'}{K} \bar{A}'_m$$

$$\lambda_m = \frac{a^2}{b^2} \left\{ \frac{\pi^7}{40} (2m+1)^2 - \frac{\pi^6}{4} (-1)^m (2m+1) + \frac{2\pi^5}{3} + \frac{20 \pi^2}{(2m+1)^2} - \frac{64 \pi^2 (-1)^m}{(2m+1)^3} - \frac{32 \pi}{(2m+1)^4} \right\} + \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{\pi^5}{60} + \frac{3 \pi^2}{4 (2m+1)^2} - \frac{2 \pi^2 (-1)^m}{(2m+1)^3} - \frac{4\pi}{(2m+1)^4} \right\} + \frac{2}{\mu} \left\{ \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi^2 (-1)^m}{2m+1} - \frac{6\pi}{(2m+1)^2} + \frac{24 (-1)^m}{(2m+1)^3} \right\} \left\{ \frac{8}{(2m+1)^2} - \frac{5 \pi^2}{6} \right\}$$

とすれば

$$\lambda_m \bar{A}'_m = \left[ \frac{a^2}{b^2} \left\{ \frac{\pi^5}{5} - \frac{\pi^4 (-1)^m}{2m+1} + \frac{64 \pi}{(2m+1)^4} - \frac{128 (-1)^m}{(2m+1)^5} \right\} - \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{\pi^5}{60} - \frac{\pi^4 (-1)^m}{15 (2m+1)} - \frac{4\pi}{(2m+1)^4} \right\} \right] \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}'_r + \left[ \frac{a^2}{b^2} \left\{ \pi^4 - \frac{16 \pi^2 (-1)^m}{3 (2m+1)} + \frac{128}{(2m+1)^4} \right\} - \frac{b^2}{a^2} \left\{ \frac{\pi^4}{15} - \frac{8}{(2m+1)^4} \right\} \right] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r A'_r}{2r+1} + \left[ \frac{a^2}{b^2} \left\{ 64 \pi - \frac{128 (-1)^m}{2m+1} \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{b^2}{a^2} \left\{ 4\pi - \frac{8(-1)^m}{2m+1} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\bar{A}'_r}{(2r+1)^4} + 8 \left( \frac{16a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}'_r}{(2r+1)^5} \\
 & = \left\{ \frac{\pi^3}{8} - \frac{2\pi^2(-1)^m}{3(2m+1)} + \frac{16}{\pi(2m+1)^4} \right\} \left\{ \frac{4}{(2m+1)^4} - \frac{\pi^2}{3} \right\}
 \end{aligned}$$

となり、満載等布荷重を受くる場合と同様の方法に依り、次の公式を得可し

$$\begin{aligned}
 A'_m &= \frac{p'}{k} \bar{A}'_m & K &= EI \div \left( 1 - \frac{1}{\mu^2} \right) \\
 \bar{A}'_m &= \frac{1}{C_m} \left[ R'_m + n \left\{ \frac{\pi}{2} - \frac{(-1)^m}{(2m+1)} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}'_r - n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}'_r}{2r+1} \right] \\
 n &= \frac{16a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \\
 C_m &= \frac{a^2}{b^2} P_m + \frac{b^2}{a^2} P'_m + \frac{Q_m}{\mu} \\
 \text{where } \left\{ \begin{aligned} P_m &= \frac{\pi^7}{320} (2m+1)^6 - \frac{\pi^6}{32} (-1)^m (2m+1)^5 + \frac{\pi^5}{12} (2m+1)^4 \\ &+ \frac{5\pi^3}{2} (2m+1)^2 - 8\pi^2 (-1)^m (2m+1) - 4\pi \\ P'_m &= \frac{\pi^5}{480} (2m+1)^4 + \frac{3\pi^3}{32} (2m+1)^2 \\ &- \frac{\pi^2}{4} (-1)^m (2m+1) - \frac{\pi}{2} \\ Q_m &= \left\{ \frac{\pi^3}{24} (2m+1)^2 - \frac{\pi^2}{4} (-1)^m (2m+1) - \frac{3}{2} \pi \right. \\ &\left. + \frac{6(-1)^m}{2m+1} \right\} \left\{ 8 - \frac{5\pi^2}{6} (2m+1)^2 \right\} \end{aligned} \right. \quad (186) \\
 R'_m &= \frac{\pi^3}{16} (2m+1)^2 - \frac{\pi^2}{3} (-1)^m (2m+1) - \frac{2\pi}{3} + \frac{8}{\pi(2m+1)^2} \\
 \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}'_r &= \frac{L}{D} \\
 &= \frac{n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{R'_r}{C_r} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{C_r(2r+1)} - n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{R'_r(-1)^r}{C_r(2r+1)} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{R'_r}{C_r}}{\left\{ n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{C_r(2r+1)} + 1 \right\}^2 - n \left\{ \frac{\pi}{2} + n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r(2r+1)^2} \right\} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r}} \\
 \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \bar{A}'_r}{2r+1} &= \frac{L'}{n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\left[ \frac{\pi}{2} n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r} - n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{C_r(2r+1)} - 1 \right] \sum_{r=0}^{\infty} \bar{A}'_r + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{B'_r}{C_r}}{n \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{C_r}}$$

$r$  に 0 より 5 迄の値を與へて  $\sum_{r=0}^5 \bar{A}'_r$  と  $\sum_{r=0}^5 \frac{(-1)^r \bar{A}'_r}{(2r+1)}$  とを計算し、之を  $\bar{A}'_m$  の式に入れて  $\bar{A}'_0, \bar{A}'_1, \dots, \bar{A}'_5$  等を計算すれば Table 11 又は Pl. IV-1 に示すが如し。

Table 11. Values of  $\bar{A}'_m$  for different values of  $a:b$ .

$\frac{b}{a}$	$\mu$	$\sum_{r=0}^5 \bar{A}'_r$	$\sum_{r=0}^5 \frac{(-1)^r \bar{A}'_r}{2r+1}$	$\bar{A}'_0$	$10\bar{A}'_1$	$100\bar{A}'_2$	$100\bar{A}'_3$	$100\bar{A}'_4$	$100\bar{A}'_5$
0.0	10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	"	0.14670	0.13253	0.06758	0.03386	0.07122	0.06671	0.02768	0.02337
0.2	"	0.69039	0.65020	0.32908	0.12616	0.19509	0.11529	0.05388	0.02493
0.3	"	1.56955	1.53379	0.74238	0.14562	0.18184	0.07386	0.03713	0.01334
0.4	"	2.10949	2.07538	1.03891	0.10813	0.12177	0.04430	0.02278	0.00773
0.5	"	2.06702	2.04527	1.02493	0.07274	0.08209	0.02876	0.01492	0.00498
0.6	"	1.74430	1.72327	0.86625	0.05101	0.05761	0.01999	0.01042	0.00346
0.7	"	1.40841	1.39722	0.69970	0.03748	0.04249	0.01468	0.00767	0.00254
0.8	"	1.13254	1.12499	0.56289	0.02862	0.03244	0.01123	0.00537	0.00194
0.9	"	0.91955	0.91286	0.45715	0.02259	0.02493	0.00886	0.00464	0.00154
1.0	4	0.76023	0.75239	0.37542	0.01829	0.02085	0.00717	0.00376	0.00124
		0.76478	0.76228	0.38172	0.01842	0.02090	0.00719	0.00377	0.00124
1.1	10	0.63242	0.62737	0.31321	0.01509	0.01722	0.00593	0.00311	0.00103
1.2	"	0.53473	0.53112	0.26588	0.01269	0.01447	0.00498	0.00261	0.00036
1.3	"	0.45662	0.45337	0.22704	0.01078	0.01232	0.00425	0.00222	0.00074
1.4	"	0.39501	0.39223	0.19642	0.00929	0.01062	0.00366	0.00191	0.00063
1.5	"	0.34485	0.34239	0.17135	0.00809	0.00925	0.00319	0.00167	0.00055
1.6	"	0.30275	0.30056	0.15056	0.00711	0.00813	0.00280	0.00147	0.00049
1.7	"	0.26915	0.26726	0.13382	0.00630	0.00737	0.00248	0.00130	0.00043
1.8	"	0.24030	0.23863	0.11948	0.00562	0.00643	0.00221	0.00116	0.00038
1.9	"	0.21478	0.21344	0.10673	0.00503	0.00576	0.00199	0.00104	0.00034
2.0	"	0.19541	0.19420	0.09723	0.00397	0.00520	0.00179	0.00094	0.00031

(二) 撓度に関する公式

1 一般式

$$\zeta = \frac{p'}{K} \alpha^2 b^2 \bar{\zeta} = \frac{p}{K} \alpha^2 b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}'_m \bar{X}_m \bar{Y}_m \dots \dots \dots (187)$$

$\bar{X}_m$  及び  $\bar{Y}_m$  は公式 (164) に示すが如し

2 最大撓度



$$\zeta_A = \frac{p'}{K} a^2 b^2 \bar{\zeta}_A$$

$$\bar{\zeta}_A = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m' \left\{ \frac{32(-1)^m}{\pi^3(2m+1)^3} - \frac{24}{\pi^2(2m+1)^2} + \frac{8(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \dots (188)$$

$$= 0.14682 \bar{A}_0' - 2.15724 \bar{A}_1' - 0.57972 \bar{A}_2'$$

$$- 1.41642 \bar{A}_3' - 0.71706 \bar{A}_4' - 1.25237 \bar{A}_5' - \dots$$

正方形床版に対しては、

$$\zeta_A = 0.04332 \frac{p' a^4}{K} \quad \mu = 10 \text{ の時}$$

$$= 0.05171 \frac{p' a^4}{K} \quad \mu = 4 \text{ の時} \dots (189)$$

$a:b$  の種々の値に対する  $\bar{\zeta}_A$  の値は Table 12 (第 91 頁) 又は PL. IV-2 に示すが如し。

(三) 彎曲力率に関する公式

1 一般式

$$M_x = -p' b^2 \bar{M}_x = -p' b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m' (X_m'' \bar{Y}_m + \frac{a^2}{\mu b^2} \bar{X}_m Y_m')$$

$$M_y = -p' a^2 \bar{M}_y = -p' a^2 \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m' (\bar{X}_m Y_m'' + \frac{b^2}{\mu a^2} X_m'' \bar{Y}_m) \dots (190)$$

$\bar{X}_m, X_m'', \bar{Y}_m, Y_m''$  等は公式 (167) に示す如し

2 固定邊  $BB'$  の中央  $O$  に於ける彎曲力率

$$M_{x0} = -p' b^2 \bar{M}_{x0}$$

$$\bar{M}_{x0} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m' \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\}$$

$$= 0.13662 \bar{A}_0' - 0.71221 \bar{A}_1' - 0.37268 \bar{A}_2' - 0.59095 \bar{A}_3'$$

$$- 0.42926 \bar{A}_4' - 0.55787 \bar{A}_5' - \dots \dots (191)$$

$$M_{y0} = -p' b^2 \bar{M}_{y0}, \quad \bar{M}_{y0} = \frac{1}{\mu} \bar{M}_{y0}$$

正方形床版に対しては

$$M_{x0} = -0.04984 p' a^2 \quad \mu = 10 \text{ の時}$$

$$= -0.05070 p' a^2 \quad \mu = 4 \text{ の時}$$

$$M_{y0} = -0.00498 p' a^2 \quad \mu = 10 \text{ の時}$$

$$= -0.01268 p' a^2 \quad \mu = 4 \text{ の時} \dots (192)$$

3 Free side CC' の中央 A 點に於ける彎曲力率

$$\begin{aligned}
 M_{xA} &= -p' a^2 \bar{M}_{xA} \\
 \bar{M}_{xA} &= \frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}'_m \left\{ 2 - \frac{8(-1)^m}{\pi(2m+1)} + \frac{16}{\pi^2(2m+1)^2} \right\} \left\{ 1 - \frac{\pi}{2} (-1)^m (2m+1) \right\} \\
 &= -\frac{1}{\mu} (0.61342 \bar{A}'_0 - 17.30266 \bar{A}'_1 + 9.10627 \bar{A}'_2 - 28.63200 \bar{A}'_3 \\
 &\quad + 22.81992 \bar{A}'_4 - 41.03364 \bar{A}'_5 + \dots) \\
 M_{yA} &= -p a^2 \bar{M}_{yA}, \quad \bar{M}_{yA} = \mu \bar{M}_{xA}
 \end{aligned} \tag{193}$$

正方形床版に對しては

$$\begin{aligned}
 M_{xA} &= 0.01988 p' a^2 & \mu=10 \text{ の時} \\
 &= 0.05062 p' a^2 & \mu=4 \text{ の時} \\
 M_{yA} &= 0.19883 p' a^2 & \mu=10 \text{ の時} \\
 &= 0.20248 p' a^2 & \mu=4 \text{ の時}
 \end{aligned} \dots \tag{194}$$

4 Free side の一端 C 點に於ける彎曲力率

$$\begin{aligned}
 M_{xC} &= -p' a^2 \bar{M}_{xC} \\
 \bar{M}_{xC} &= \frac{1}{\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}'_m \left\{ 2 - \frac{8(-1)^m}{\pi(2m+1)} + \frac{16}{\pi^2(2m+1)^2} \right\} \\
 &= \frac{1}{\mu} (1.07466 \bar{A}'_0 + 3.02898 \bar{A}'_1 + 1.55557 \bar{A}'_2 + 2.38688 \bar{A}'_3 \\
 &\quad + 1.73705 \bar{A}'_4 + 22.4488 \bar{A}'_5 + \dots) \\
 M_{yC} &= -p' a^2 \bar{M}_{yC}, \quad \bar{M}_{yC} = \mu \bar{M}_{xC}
 \end{aligned} \tag{195}$$

正方形床版に對しては、

$$\begin{aligned}
 M_{xC} &= -0.04096 p' a^2 & \mu=10 \text{ の時} \\
 &= -0.10410 p' a^2 & \mu=4 \text{ の時} \\
 M_{yC} &= -0.40958 p' a^2 & \mu=10 \text{ の時} \\
 &= -0.41639 p' a^2 & \mu=4 \text{ の時}
 \end{aligned} \dots \tag{196}$$

a:b の種々の値に對する  $\bar{M}_{xC}$ ,  $\bar{M}_{xA}$ ,  $\bar{M}_{yC}$  等の値は Table 12 又は PL. IV-2 に示すが如し。

Table 12. Values of  $\bar{\zeta}_A$ ,  $\bar{M}_{x0}$ ,  $\bar{M}_{yA}$  and  $\bar{M}_{y0}$  for different values of  $a/b$ .

$\frac{a}{b}$	$\mu$	$\bar{M}_{x0} = \mu \bar{M}_{y0}$	$\bar{M}_{yA} = \mu \bar{M}_{xA}$	$\mu \bar{M}_{x0} = \bar{M}_{y0}$	$\bar{\zeta}_A$
0.0	10	—	—	—	—
0.1	„	—	—	—	—
0.2	„	0.03420	0.03085	0.39915	0.01049
0.3	„	0.08971	-0.20284	0.84745	0.07104
0.4	„	0.14035	-0.48048	1.20588	0.13536
0.5	„	0.13423	-0.50346	1.12582	0.13375
0.6	„	0.11433	-0.44328	0.94795	0.11547
0.7	„	0.09264	-0.36478	0.76459	0.09412
0.8	„	0.07464	-0.29604	0.61451	0.07605
0.9	„	0.06067	-0.24145	0.49883	0.06192
1.0	4	0.04984	-0.19883	0.40958	0.05091
		0.05070	-0.20248	0.41639	0.05171
1.1	10	0.04228	-0.16925	0.34702	0.04332
1.2	„	0.03532	-0.14138	0.28998	0.03612
1.3	„	0.03017	-0.12072	0.24760	0.03085
1.4	„	0.02610	-0.10450	0.21420	0.02670
1.5	„	0.02277	-0.09119	0.18680	0.02329
1.6	„	0.01996	-0.07993	0.16385	0.02047
1.7	„	0.01780	-0.07127	0.14592	0.01820
1.8	„	0.01588	-0.06363	0.13029	0.01625
1.9	„	0.01418	-0.05681	0.11639	0.01451
2.0	„	0.01296	-0.05282	0.10583	0.01335

## (四) 裁力に関する公式

## 1 一般式

$$\left. \begin{aligned}
 S_x &= -p'a \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m' \left( \bar{X}_m' Y_m'' - \frac{\pi b^2}{4a^2} \bar{X}_m''' Y_m \right) \\
 S_y &= -p'b \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m' \left( X_m'' \bar{Y}_m' - \frac{\pi a^2}{4b^2} \bar{X}_m Y_m''' \right)
 \end{aligned} \right\} \dots (197)$$

$\bar{X}_m'$ ,  $\bar{X}_m''' \dots$ 等は公式 (174) と同じ

2 固定邊  $BB'$  の中央  $O$  點に於ける裁力

$$S_{x0} = p'a \bar{S}_{x0}$$

$$\bar{S}_{x0} = \frac{b^2}{a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m' \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} (-1)^m (2m+1) \right\}$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \left( 0.10730 \bar{A}_0' + 1.67810 \bar{A}_1' - 1.46350 \bar{A}_2' + 3.24889 \bar{A}_3' - 2.73429 \bar{A}_4' + 4.81969 \bar{A}_5' - \dots \right) \quad (198)$$

$S_{y0} = 0$

正方形床版に對しては

$$\left. \begin{aligned} S_{x0} &= 0.04324 p'a && \pi = 10 \text{ の時} \\ &= 0.04393 p'a && \pi = 4 \text{ の時} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (199)$$

3 Free side CC' の中央 A 點に於ける裁力

$$S_{xA} = p'a \bar{S}_{xA}$$

$$S_{xA} = \sum_{m=0}^{\infty} A'_m \left\{ 4 - \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)} - \pi(-1)^m(2m+1) \right\}$$

$$= -0.41483 \bar{A}_0' + 13.84918 \bar{A}_1' - 11.96260 \bar{A}_2' + 26.17302 \bar{A}_3' - 24.41578 \bar{A}_4' + 38.67324 \bar{A}_5' - \dots \dots \dots \quad (200)$$

$S_{yA} = 0$

正方形床版に對しては

$$\left. \begin{aligned} S_{xA} &= -0.13146 p'a && \mu = 10 \text{ の時} \\ &= -0.13390 p'a && \mu = 4 \text{ の時} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (201)$$

4 Free side の一端 C 點に於ける裁力

$$S_{xC} = -p'a \bar{S}_{xC}$$

$$\bar{S} = \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}'_m \left\{ 2 - \frac{4(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\}$$

$$= 0.72676 \bar{A}_0' + 2.42441 \bar{A}_1' + 1.74535 \bar{A}_2' + 2.18189 \bar{A}_3' + 1.8189 \bar{A}_4' + 2.11575 \bar{A}_5' + \dots \dots \dots$$

$$S_{yC} = -p'b \bar{S}_{yC}$$

$$S_{yC} = \frac{a^2}{b^2} \left( 2.65162 \bar{A}_0' + 67.26315 \bar{A}_1' + 95.95534 \bar{A}_2' + 2.18189 \bar{A}_3' + 347.16580 \bar{A}_4' + 670.22130 \bar{A}_5' + \dots \dots \dots \right) \quad (202)$$

正方形床版に對しては

$$\left. \begin{aligned} S_{xC} &= -0.27793 p'a && \mu = 10 \text{ の時} \\ &= -0.28254 p'a && \mu = 4 \text{ の時} \\ S_{yC} &= -1.18058 p'a && \mu = 10 \text{ の時} \\ &= -1.19828 p'a && \mu = 4 \text{ の時} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (203)$$

$a:b$  の種々の値に對する  $\bar{S}_{x0}$ ,  $\bar{S}_{xA}$ ,  $\bar{S}_{xC}$ , 及び  $\bar{S}_{yC}$  の値は Table 13 又は PL. IV-3 に示すが如し.

Table 13. Values of  $\bar{S}_{x0}$ ,  $\bar{S}_{xA}$ ,  $\bar{S}_{xC}$  and  $\bar{S}_{yC}$  for different values of  $a:b$

$\frac{a}{b}$	$\mu$	$\bar{S}_{x0}$	$\bar{S}_{xA}$	$\bar{S}_{xC}$	$\bar{S}_{yC}$	
0.0	10			0.0	0.0	
0.1	"	1.51383	0.03599	0.06226	0.00937	
0.2	"	1.42754	0.04148	0.27747	0.10284	
0.3	"	1.15087	-0.11262	0.58089	0.32031	
0.4	"	0.83785	-0.31023	0.82082	0.63679	
0.5	"	0.48698	-0.32345	0.76510	0.86347	
0.6	"	0.28123	-0.29117	0.64367	1.01124	
0.7	"	0.16560	-0.24052	0.51700	1.09487	
0.8	"	0.10160	-0.19549	0.41705	1.14052	
0.9	"	0.06508	-0.15956	0.33888	1.16642	
1.0	4	"	0.04324	-0.13146	0.27793	1.18058
		"	0.04393	-0.13390	0.23254	1.19828
1.1	10	0.03023	-0.11198	0.23546	1.19028	
1.2	"	0.02124	-0.09349	0.19676	1.19997	
1.3	"	0.01545	-0.07987	0.16801	1.20204	
1.4	"	0.01152	-0.06914	0.14533	1.20535	
1.5	"	0.00875	-0.06034	0.12678	1.20683	
1.6	"	0.00675	-0.05289	0.11117	1.20860	
1.7	"	0.00544	-0.04717	0.09901	1.21038	
1.8	"	0.00424	-0.04211	0.08839	1.21093	
1.9	"	0.00339	-0.03760	0.07897	1.20567	
2.0	"	0.00277	-0.03510	0.07178	1.19931	

(五) 反力に關する公式

固定邊  $BB'$  に對する反力を  $R_{BB'}$  とすれば、滿載等布荷重を受くる場合と同様に、次の公式を得可し

$$\begin{aligned}
 R_{BB'} &= 2 p' ab \bar{R}_{OB'} \\
 \bar{R}_{OB'} &= \frac{b^2}{a^2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}'_m \left\{ -\frac{\pi}{12} (-1)^m (2m+1) + \frac{(-1)^m}{\pi(2m+1)} \right\} \\
 &= \frac{b^2}{a^2} (0.05651 \bar{A}'_0 + 0.67939 \bar{A}'_1 - 1.06533 \bar{A}'_2 + 1.78712 \bar{A}'_3 \\
 &\quad - 2.32083 \bar{A}'_4 + 2.59042 \bar{A}'_5 - \dots)
 \end{aligned} \tag{204}$$

正方形床版に對しては

$$R_{BB'} = 0.04462 p' a^2 \quad \text{但し } \mu = 10 \text{ の時} \dots \dots \dots (205)$$

又邊 BC 上の反力を  $R_{BC}$  とすれば

$$R_{BC} = p' ab \bar{R}_{BC}$$

$$\bar{R}_{BC} = \frac{a^2}{b^2} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}'_m (2m+1) \left\{ \frac{8(-1)^m}{\pi(2m+1)} - \frac{4}{3} \right\}$$

$$= \frac{a^2}{b^2} (0.29933 \bar{A}'_0 - 48.45835 \bar{A}'_1 + 50.83030 \bar{A}'_2 - 205.18509 \bar{A}'_3 + 203.93034 \bar{A}'_4 + 467.18864 \bar{A}'_5 - \dots \dots \dots)$$
(206)

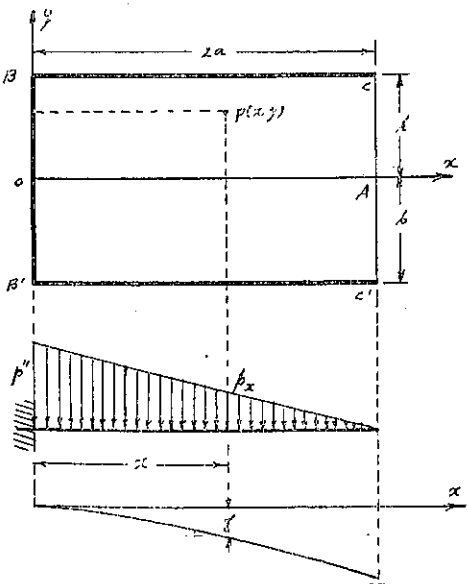
正方形床版に對しては

$$R_{BC} = 1.03310 p' a^2 \quad \text{但し } \mu = 10 \text{ の時} \dots \dots \dots (207)$$

公式 (205) と (207) とに依り、正方形床版に於て  $\mu = 10$  なる時は

三邊に於ける反力の合力  $= R_{BB'} + 2 R_{BC} = 2.11082 p' a^2$  にして理論上の値  $2 p' a^2$  に對して 5.5% の誤差あり。

**第三項 Free side に於ける荷重の強度が零にして、之に對する固定邊に於ける強度が最大なる如き等變荷重を受くる場合**



第十五圖

第十五圖に示すが如き、Free side に於ける強度が零にして、之に對する固定邊に於ける強度が最大なる如き等變荷重は、第十三圖の如き滿載等布荷重  $p$  と、第十四圖の  $p'$  の代りに  $-p$  としたる等變荷重とを同時に受けたる場合と考ふることを得るが故に、此場合に對する撓度、彎曲力率、裁力等の係數は、第一の場合に對するものと、第二の場合に對するものとの差を以て表はさる可し、從て次の關係を得可し。

- (一) A 點に於ける撓度。O, A 及び O 點に於る彎曲力率

$$\left. \begin{aligned}
 \zeta_{.1} &= \frac{p''}{K} a^2 b^2 \bar{\zeta}_{.1} \\
 M_{x_0} &= -p'' a^2 \bar{M}_{x_0} \\
 M_{y_0} &= -p'' b^2 \bar{M}_{y_0} \\
 \bar{M}_{x_{.1}} &= -p'' a^2 \bar{M}_{x_{.1}} \\
 M_{y_{.1}} &= -p'' a^2 \bar{M}_{y_{.1}} \\
 M_{x_C} &= -p'' a^2 \bar{M}_{x_C} \\
 M_{y_C} &= -p'' a^2 \bar{M}_{y_C}
 \end{aligned} \right\} \begin{aligned}
 \bar{M}_{x_0} &= \mu \bar{M}_{y_0} \\
 \dots & \\
 \mu \bar{M}_{x_{.1}} &= \bar{M}_{y_{.1}} \\
 \dots & \\
 \mu \bar{M}_{x_C} &= \bar{M}_{y_C}
 \end{aligned} \dots \dots \dots (208)$$

$a : b$  の種々の値に對する  $\bar{\zeta}_{.1}$ ,  $\bar{M}_{x_0}$ ,  $\bar{M}_{y_0}$ ,  $\bar{M}_{x_{.1}}$ ,  $\bar{M}_{y_{.1}}$ ,  $\bar{M}_{x_C}$ ,  $\bar{M}_{y_C}$  の値は Table 14 又は Pl. V-1 に示すが如し。

Table 14. Values of  $\bar{\zeta}_{.1}$ ,  $\bar{M}_{x_0}$ ,  $\bar{M}_{y_0}$ ,  $\bar{M}_{x_{.1}}$  and  $\bar{M}_{y_C}$  for different values of  $a : b$

$\frac{b}{a}$	$\mu$	$\bar{M}_{x_0} = \mu \bar{M}_{y_0}$	$\mu \bar{M}_{x_{.1}} = \bar{M}_{y_{.1}}$	$\mu \bar{M}_{x_C} = \bar{M}_{y_C}$	$\bar{\zeta}_{.1}$
0.0	10				
0.1	"				
0.2	"	0.02884	0.08388	0.34840	0.01878
0.3	"	0.08479	-0.19554	0.77362	0.07404
0.4	"	0.13515	-0.46613	1.14743	0.13193
0.5	"	0.11111	-0.40769	0.92692	0.11090
0.6	"	0.09463	-0.36131	0.78158	0.09572
0.7	"	0.07268	-0.27973	0.59859	0.07377
0.8	"	0.06232	-0.24383	0.50083	0.06363
0.9	"	0.05014	-0.19687	0.41078	0.05125
1.0	"	0.04138	-0.16176	0.33881	0.04236
	4	0.04035	-0.15815	0.33073	0.04132
1.1	10	0.03332	-0.13330	0.27835	0.03459
1.2	"	0.02906	-0.11449	0.23771	0.02974
1.3	"	0.02498	-0.09863	0.20435	0.02559
1.4	"	0.02147	-0.08437	0.17502	0.02190
1.5	"	0.01863	-0.07347	0.15242	0.01908
1.6	"	0.01665	-0.06580	0.13607	0.01701
1.7	"	0.01468	-0.05809	0.11919	0.01506
1.8	"	0.01317	-0.05209	0.10767	0.01350
1.9	"	0.01274	-0.04635	0.09595	0.01202
2.0	"	0.01066	-0.04283	0.08676	0.01099

(二) O, A 及び C 點に於ける裁力

$$\left. \begin{aligned} S_{zo} &= p'' a \bar{S}_{zo} \\ S_{zA} &= -p'' a \bar{S}_{zA} \\ S_{zC} &= -p'' a \bar{S}_{zC} \\ S_{yC} &= -p'' b \bar{S}_{yC} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (209)$$

$a : b$  の種々の値に對する  $\bar{S}_{zo}$ ,  $\bar{S}_{zA}$ ,  $\bar{S}_{zC}$  及び  $\bar{S}_{yC}$  の値は Table 15 又は Pl. V-2 に示すが如し

Table 15. Values of  $\bar{S}_{zo}$ ,  $\bar{S}_{zA}$ ,  $\bar{S}_{zC}$  and  $\bar{S}_{yC}$  for different values of  $a : b$ .

$\frac{a}{b}$	$\mu$	$\bar{S}_{zo}$	$\bar{S}_{zA}$	$\bar{S}_{zC}$	$\bar{S}_{yC}$
0.0	10				
0.1	"	1.50133	0.02205	0.05902	0.00615
0.2	"	1.40607	0.09360	0.21023	0.07836
0.3	"	1.05960	-0.10176	0.52802	0.25030
0.4	"	0.89131	-0.20359	0.77937	0.55242
0.5	"	0.40637	-0.26083	0.62924	0.67616
0.6	"	0.23421	-0.23108	0.53302	0.80044
0.7	"	0.13142	-0.18154	0.40731	0.82758
0.8	"	0.08531	-0.15899	0.34652	0.91154
0.9	"	0.05299	-0.14021	0.27817	0.92535
1.0	"	0.03601	-0.10646	0.22976	0.94003
1.1	4	0.03532	-0.10317	0.22427	0.91452
1.1	10	0.02447	-0.08704	0.18828	0.94881
1.2	"	0.01778	-0.07486	0.16117	0.94853
1.3	"	0.01286	-0.06852	0.13986	0.95037
1.4	"	0.00951	-0.05514	0.11869	0.95097
1.5	"	0.00721	-0.04804	0.10333	0.94975
1.6	"	0.00565	-0.04303	0.09236	0.95905
1.7	"	0.00430	-0.03800	0.08149	0.96083
1.8	"	0.00353	-0.03407	0.07301	0.95960
1.9	"	0.00284	-0.03031	0.06505	0.95855
2.0	"	0.00228	-0.02813	0.05880	0.94197

梯形等變荷重を受くる場合に就ても、第一、第二及び第三の場合に對するものを適當に組合はすることに依り、撓度、彎曲力率、裁力等に對する係數の値を算出することを得可し。

Free side に於ける彎曲力率  $M_x$  及び  $S_x$  は、實際上零と推定せざるべからず、從て公式 (170), (171), (193), (194), (208) 及び (177), (178), (200), (201), (209)



等に依り、 $M_{x,1}$  及び  $S_{x,1}$  が、共に或る値を有する結果を得たるは、不合理と斷定せざるべからずと雖も、Free side の兩端  $O$  及び  $O'$  は完全に固定せらるゝ結果  $A$  點の  $x$  軸の方向に於ける移動（伸張又は壓縮）は、普通の突桁の放端の如く完全に free なる能はざるものと考ふれば、 $M_{x,1}$  及び  $S_{x,1}$  が或る値を有する、強ち首肯し得ざるに非る可し、公式 (170), (193) 及び (195) 等に依り、 $\mu$  が定まれる値を有する限りは、 $\bar{M}_{x,1}$  は常に或る値を有し、 $\mu=0$  なる時初めて  $\bar{M}_{x,1}=0$  となるは、亦上叙の理を示すものと謂ふ可し。

撓度、彎曲力率及び裁力と、矩形の 2 邊の比  $\frac{a}{b}$  との關係を見るに、第一、第二及び第三何れの場合に於ても  $\bar{\xi}_A, \bar{M}_{x,0}, \bar{M}_{x,1}, \dots, \bar{S}_{x,1}, \bar{S}_{x,0}$  等は、 $\frac{a}{b} \doteq 0.4$  の時最大となるは實際上大いに注意を要することなり、又床版内の位置の上より考察すれば、彎曲力率に對しては、Free side の兩端  $O$  及び  $O'$  に於ける  $\bar{M}_{y,0}$  が最大にして、裁力に對しては、 $O$  點に於ける  $\bar{S}_{x,0}$  が最大なり。

扶壁式擁壁の如き構造物の彎曲力率は、從來  $y$  軸の方向に數多の Strip に分割し、其各を  $2b$  なる徑間を有する固定桁又は部分的固定桁 (Partially fixed beam) として計算したり、從て  $BB'$  線に沿ふ強度が最大なる如き等變荷重に對しては、此部分の Strip の彎曲力率即ち  $M_{y,0}$  又は  $M_{y,1}$  が最大となり、著者の誘導したる結果と比較して著しき懸隔あり。

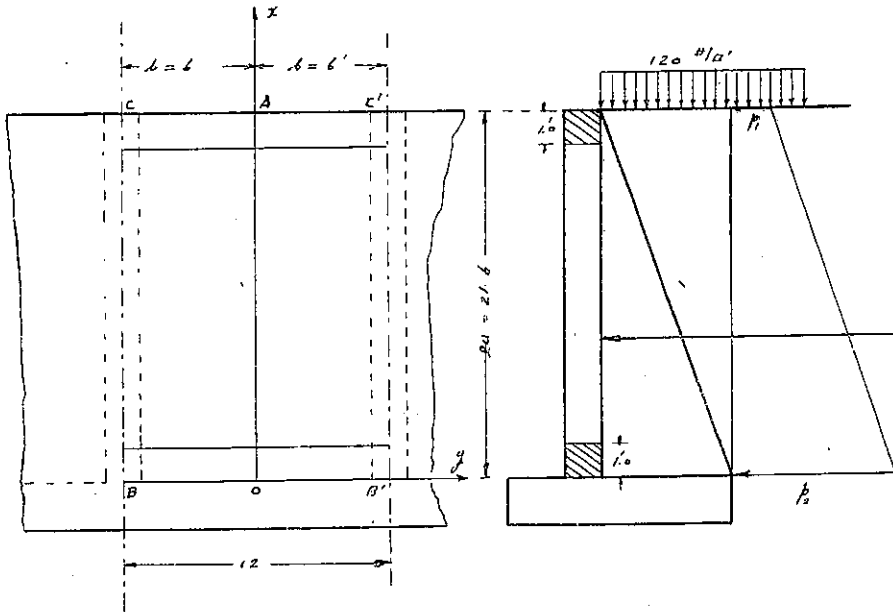
例へば第十六圖の如く、高さ 21'.6、扶壁の間隔 12' なる擁壁が、其頂部に於て水平に敷均されたる土と 120 #/ft<sup>2</sup> の Surcharge とを受くるものとすれば、此擁壁は圖に示す如き等變荷重を受く可し、而して土の重量を 100 #/ft<sup>3</sup>、其息角を 30° とすれば、Rankine 氏の土壓公式に依り

$$p_1 = 120 \frac{1 - \sin 30^\circ}{1 + \sin 30^\circ} = \frac{1}{3} \times 120 = 40 \text{ #/ft}^2$$

$$p_2 = (120 + 21.6 \times 100) \times \frac{1}{3} = 760 \text{ #/ft}^2$$

となるが故に、Strip  $BB'$  及び  $CC'$  に對しては、夫々 760 #/ft<sup>2</sup> 及び 40 #/ft<sup>2</sup> の荷重が一様に作用し、且つ是等の Strip は兩端に於て完全に固定せらるゝものと假定する時は、Strip  $BB'$  に對しては

$$\text{徑間の中央に於ける彎曲力率 } M_{y,0} = \frac{p_2 b^2}{6} = 4,560 \text{ #}$$



第十 六 圖

固定端に於ける彎曲力率  $M_{yB} = -\frac{p_2 b^2}{6} = -9,120' \#$

Strip  $CO'$  に對しては、徑問の中央に於ける彎曲力率  $M_{yA} = \frac{p_1 b^2}{6} = 240' \#$

固定端に於ける彎曲力率  $M_{yo} = -\frac{p_1 b^2}{3} = -480' \#$

又  $\mu = 10$  として著者の公式に依りて計算すれば

$a = 10.8, \quad b = 6.0 \quad a : b = 1.8$

なるが故に、PL. III-2 及び PL. V-1 に依り

$M_{yo} = -b^2 \{ 0.02905 p_1 + 0.0 p_2 + 0.01317 (p_2 - p_1) \} = -383' \#$

$M_{yo} = -b^2 \left\{ \frac{1}{\mu} \times 0.02905 p_1 + \frac{1}{\mu} \times 0.01317 (p_2 - p_1) \right\} = -38$

$M_{yC} = -a^2 \{ 0.23796 p_1 + 0.10767 (p_2 - p_1) \} = -10,152$

$M_{yC} = \frac{M_{yC}}{\mu} = -1,015$

$M_{yA} = a^2 \left\{ \frac{1}{\mu} \times 0.11572 p_1 + \frac{1}{\mu} \times 0.05209 (p_2 - p_1) \right\} = 503$

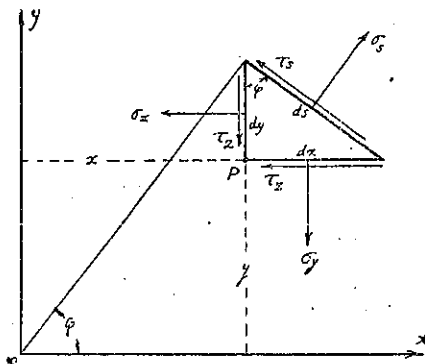
$M_{yA} = \mu M_{yA} = 5,031$

となり最大彎曲力率は  $C$  點に於ける  $M_{yC} (= -10,152' \#)$  なることを知るべし。

上記の例に依りて明かなる如く、此種の床版に對する從來の近似的方法は、著者の公式と比較して著き差異あるを見るべし、惟ふに各 Strip は普通の桁と異り、互ひに其 Deflection を牽制し單に End condition より考察すれば固定邊  $BB'$  に近きもの程其撓垂の自由を束縛せられ、Free side  $CO'$  は最も撓垂し易き状態に在り、著者の誘導したる公式が果して真に近きものなりや否や、直ちに斷定すること能はざるのみならず、其根本の假定に於て、床版の3邊は完全に緊定せらるゝことを要するが故に、扶壁夫れ自身が彈性變形をなすのみならず、之と前面床版との結合完全ならざる此種の構造物に對し、其儘之を應用するの穩當ならざるは論を俟たずと雖も、其結果に於て上叙の推論に近接せるは、幾分意を強ふするに足るものあると同時に、實驗又は他の方法に依り、幸いにして著者の公式が（或は之に多少の修正を加へたる上）實際に應用し得ることを證明し得たりとせば此種の構造物に對する計算上一大變革を來せるものと謂はざるべからず、著者の研究尙ほ頗る不完全にして、而も不幸にして之に關する實驗的攻究を爲すの機會を有せず從て之に關し未だ斷定的言説を爲すの域に達せざるは、著者の大いに遺憾とし且つ慚愧に堪へざる所なるも、菲才を顧みず之を公にしたるは、一に先輩諸賢の批判と高教とを仰ぎ、此種の研究に一步を進むることを庶希せんとするに外ならず。

### 第五節 床版内の任意の點に於ける斜斷面に對する應力強度、 彎曲力率、及び裁力に關する公式

任意の點に對する應力強度、彎曲力率等を知れば、此點に於ける任意の斜斷面に對するものは、普通の Stress analysis に依り求むることを得るが故に、今更めて之



第十七圖

に對するものは、普通の Stress analysis に依り求むることを得るが故に、今更めて之が解説を試むるの要なきが如きも、本論の末尾に於て之を叙説する、亦必ずしも蛇足の誹を受くることなきを信ず。

#### (一) 應力強度

第十七圖の如く、任意の點  $P(xy)$  に於て  $y$  軸と  $\varphi$  なる角を成す斜斷面に對する直面積及び切面應力強度を、夫々  $\sigma_s$  及び  $\tau_s$  と

すれば一般に次の如き關係あり

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \cos 2\varphi + \tau_z \sin 2\varphi \\ \tau_s &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\varphi - \tau_z \cos 2\varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots (210)$$

床版に對しては、公式 (2) 及び (3) に依り

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= -\frac{Ez}{1 - \frac{1}{\mu^2}} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ &= -\frac{Ez}{1 - \frac{1}{\mu}} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_y - \sigma_x &= -\frac{Ez}{1 + \frac{1}{\mu}} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right), \quad \tau_z = -\frac{Ez}{1 + \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \end{aligned}$$

是等の關係を公式 (210) に代入すれば、次の式を得

$$\left. \begin{aligned} \sigma_s &= \frac{-Ez}{2\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)} \left\{ \frac{1 + \frac{1}{\mu}}{1 - \frac{1}{\mu}} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \cos 2\varphi \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin 2\varphi \right\} \\ \tau_s &= -\frac{Ez}{2\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)} \left\{ \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \sin 2\varphi - 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \cos 2\varphi \right\} \end{aligned} \right\} (211)$$

$\sigma_s$  の最大及び最小値は  $\varphi$  が

$$\frac{d\sigma_s}{d\varphi} = -\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) 2 \sin 2\varphi + 2\tau_z \cos 2\varphi = 0$$

を満足せしむる時起る、故に此方程式を満足せしむべき  $\varphi$  の値を  $\varphi_0$  とすれば

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\tau_z}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}}$$

$\varphi_0$  が此式を満足せしむれば  $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$  も亦之を満足せしめ、 $P$  點に於て  $y$  軸と

$\varphi_0$  及び  $\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$  なる角度を有する二つの直交断面は、即ち此點に於ける主面 (Principal plane) にして、是等の面に對する直面及び切面應力強度を、夫々  $\sigma_0$  及び  $\tau_0$  とすれば、次の關係を得可し。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_0 &= \frac{1}{2} \left\{ \sigma_x + \sigma_y \pm \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2} \right\} \dots \text{主應力 (Principal stresses)} \\ &= -\frac{Ez}{2\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)} \left\{ \frac{1 + \frac{1}{\mu}}{1 - \frac{1}{\mu}} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right)^2 + 4\left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2} \right\} \end{aligned} \right\} (213)$$

$$\tau_0 = 0$$

次に  $\tau_s$  の最大及び最小値は  $\varphi$  が

$$\frac{d\tau_s}{d\varphi} = (\sigma_y - \sigma_x) \cos 2\varphi + 2\tau_z \sin 2\varphi = 0$$

を満足せしむる時起る、此場合の  $\varphi$  の値を  $\varphi_1$  とすれば次の關係あり。

$$\tan 2\varphi_1 = -\cot 2\varphi_0 = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_z} = \frac{\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}}{2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}} \dots (214)$$

$\varphi_1$  が此式を満足せしむれば、 $\varphi_1 + \frac{\pi}{2}$  も亦之を満足せしむべし、是等二つの角度に對する直交断面に於ける直面及び切面應力強度を夫々  $\sigma_1$  及び  $\tau_1$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{Ez}{2\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ \tau_1 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2} \\ &= \pm \frac{Ez}{2\left(1 + \frac{1}{\mu}\right)} \sqrt{\left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right)^2 + 4\left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \right)^2} \end{aligned} \right\} \dots (215)$$

是等の公式を滿載等布荷重を受け、四邊に於て支承せられたる矩形床版に應用すれば、第十一圖の  $\triangle OAC$  内に於ては、公式 (95) に依り

$$\zeta = \frac{pa^2b^2}{60K} \cdot \frac{f(xy)}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu}}$$

$$f(xy) = 16 - 20\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + 5\left(\frac{x^4}{a^4} + \frac{6x^2y^2}{a^2b^2} + \frac{y^4}{b^4}\right) - \left(\frac{x^5}{a^5} + \frac{10x^3y^2}{a^3b^2} + \frac{5xy^4}{ab^4}\right)$$

是に依り

$$\frac{\partial^2 f(xy)}{\partial x^2} = \frac{20}{a^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left\{ \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 - 3\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \right\}$$

$$\frac{\partial^2 f(xy)}{\partial y^2} = \frac{20}{b^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left\{ \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 - 3\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \right\}$$

$$\frac{\partial^2 f(xy)}{\partial x \partial y} = \frac{20y}{ab^2} \left\{ 3\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 + 3 - \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial \zeta^2}{\partial x^2} = \frac{\frac{p}{3K}(b^2 - a^2)}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu}} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left\{ \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 - 3\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \right\}$$

$$2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{2p}{3K} ab \frac{y}{b}}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{\mu}} \left\{ 3\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 + 3 - \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

となるが故に次の公式を得可し。

$$\left. \begin{aligned} \tan 2\varphi_0 &= \frac{F}{\frac{b}{a} - \frac{a}{b}} \\ F &= \frac{\frac{2y}{b} \left\{ 3\left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 + 3 - \frac{y^2}{b^2} \right\}}{\left(1 - \frac{x}{a}\right) \left\{ \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 - 3\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \right\}} \end{aligned} \right\} \dots \dots (216)$$

対角線  $OC$  上の點に對しては  $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$  なるが故に

$$F = \frac{-\frac{2x}{a} \left( 3 - \frac{3x}{a} + \frac{x^2}{a^2} \right)}{\left( 1 - \frac{x}{a} \right)^2 \left( 1 + \frac{2x}{a} \right)} = -\frac{N}{D} \dots \dots (217)$$

公式 (216) の第二式により、 $y=0$ 、即ち  $OA$  上の凡ての點に對しては

$$\tan 2\varphi_0 = 0, \text{ 従て } \varphi_0 = 0 \text{ 又は } \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

なるが故に、此場合の主面は、 $\overline{OA}$  上の凡ての點に於て矩形の兩邊に並行なることを知る。

對角線  $OC$  上の點に於て、 $\frac{x}{a}$  の種々の値に對する  $F$  の値を計算すれば Table 16 の如し。

Table 16

$\frac{x}{a}$	$-\frac{3x}{a}$	$\frac{x^2}{a^2}$	$N$	$(1 - \frac{x}{a})^2$	$1 + \frac{2x}{a}$	$D$	$F$
0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	1.0	0.0
0.1	-0.3	0.01	0.542	0.81	1.2	0.92	-0.55760
0.2	-0.6	0.04	0.976	0.64	1.4	0.896	-1.08906
0.3	-0.9	0.09	1.314	0.49	1.6	0.784	-1.67602
0.4	-1.2	0.16	1.568	0.36	1.8	0.648	-2.41358
0.5	-1.5	0.25	1.750	0.25	2.0	0.500	-3.50000
0.6	-1.8	0.36	1.872	0.16	2.2	0.352	-5.31818
0.7	-2.1	0.49	1.946	0.09	2.4	0.216	-9.00926
0.8	-2.4	0.64	1.984	0.04	2.6	0.104	-19.07692
0.9	-2.7	0.81	1.998	0.01	2.8	0.028	-71.35140
1.0	-3.0	1.00	2.000	0.00	3.0	0.000	$-\infty$

$\varphi_0$  の計算の一例として、 $\frac{a}{b} = 2.0$ ,  $\frac{b}{a} = 0.5$ ,  $\frac{b}{a} - \frac{a}{b} = -1.5$  の場合に對しては

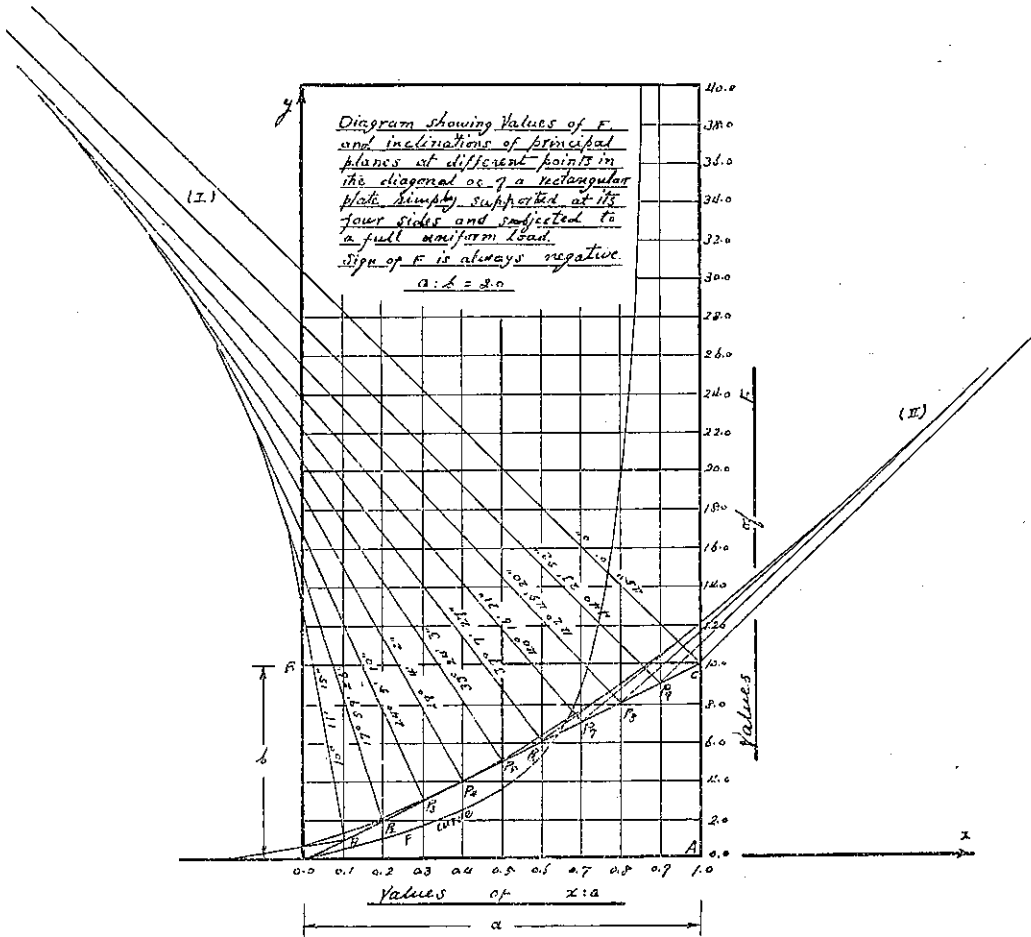
Table 17 又は第十八圖に示すが如し

Table 17

$\frac{x}{a}$	$\tan 2\varphi_0$	$2\varphi_0$	$\varphi_0$	$\tan \varphi_0$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.37173	20°-22'-30''	10°-11'-15''	0.17970
0.2	0.72604	35°-58'-52''	17°-59'-26''	0.32474
0.3	1.11734	48°-10'-19''	24°- 5'-10''	0.44701
0.4	1.60905	58°- 8'-23''	29°- 4'-12''	0.55591
0.5	2.33333	66°-48'- 5''	33°-24'- 3''	0.65940
0.6	3.54545	74°-14'-53''	37°- 7'-27''	0.75698
0.7	6.00617	80°-32'-42''	40°-16'-21''	0.84724
0.8	12.71795	85°-33'-40''	42°-45'-20''	0.92457
0.9	47.56760	88°-47'-44''	44°-23'-52''	0.97920
1.0	$\infty$	90°- 0'- 0''	45°- 0'- 0''	1.00000

第十八圖に於て、(I) 及び (II) に示す各直線は、夫々是等に對應する對角線上の

各點、即ち  $O, P_1, P_2, P_3 \dots P_9$  及び  $O$  點等に対する主面の方向を示し、是等の直線の群に切する如き二つの曲線は、即ち  $O, P_1, P_2 \dots$  等の點に対する主面の方向を示す直線の包絡線 (Envelope) なり、從て斯の如き包絡線を描き得たりとすれば、對角線  $OO$  上の任意の點に対する主面の方向は此點より是等二つの包絡線に對して引きたる切線を以て表はさるゝことを知る可し。



第十八圖

(二) 彎曲力率

第十九圖に於て、面積  $ds dz$  内の直而應力は  $\sigma_s, ds, dz$  を以て表はさるゝが故に、

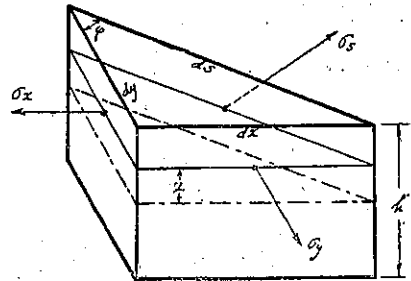
$$\text{面積 } h ds \text{ 内の力率} = \int \sigma_s z ds dz = ds \int \sigma_s z dz$$



故に、此斜断面の幅員単位長なる面積

$1 \times h$  内の力率を  $M_s$  とすれば、

$$\begin{aligned}
 M_s &= \frac{1}{ds} \text{ (面積 } hds \text{ 内の力率)} \\
 &= \int \sigma_s z dz \\
 &= \int \left\{ \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x) \cos 2\varphi + \tau_z \sin 2\varphi \right\} z dz \\
 &= \frac{1}{2}(M_x + M_y) + \frac{1}{2}(M_y - M_x) \cos 2\varphi + M_\tau \sin 2\varphi
 \end{aligned}$$



第十九圖

此内  $M_x$  と  $M_y$  とは公式 (4) に示すものと同様にして、

$$\begin{aligned}
 M_\tau &= \int \tau_z z dz = -\frac{EI}{1 + \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \int z^2 dz = -\frac{EI}{1 + \frac{1}{\mu}} \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \\
 &= -K \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y}
 \end{aligned}$$

故に次の公式を得可し。

$$\begin{aligned}
 M_s &= \frac{1}{2}(M_x + M_y) + \frac{1}{2}(M_y - M_x) \cos 2\varphi + M_\tau \sin 2\varphi \\
 &= -\frac{K}{2} \left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \left\{ \frac{1 + \frac{1}{\mu}}{1 - \frac{1}{\mu}} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) \cos 2\varphi + 2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \sin 2\varphi \right\} \quad (218)
 \end{aligned}$$

此公式の第一式は、公式 (210) の  $\sigma_x$   $\sigma_y$  及び  $\tau_z$  の代りに夫々  $M_x$   $M_y$  及び  $M_\tau$  と置きたるものに外ならず、故に公式 (212) 及び (213) と同様に、 $M_s$  の最大又は最小値  $M_0$  に対しては  $\varphi$  が

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2M_\tau}{M_y - M_x} \quad (219)$$

を満足せしむべき  $\varphi_0$  となりたる時起り、其値は

$$M_0 = \frac{1}{2} \{ (M_x + M_\tau) \pm \sqrt{(M_x - M_y)^2 + 4M_\tau^2} \} \quad (220)$$

を以て表はさるべし。

例へば、3 邊固定せられ、一邊 Free なる矩形床版が満載等布荷重を受くる場合の Free side の一端  $O$  點に對しては

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \left\{ x - \frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)} + \frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)}{4a} x \right\} \\ \left\{ y - b(-1)^m \sin \frac{\pi(2m+1)}{2b} y \right\} = 0, \quad x=2a, \quad y=b \quad \text{なる時}$$

∴  $M_x = 0$

$\tan 2\varphi_0 = 0$  従て  $\varphi_0 = 0$  又は  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

∴  $M_0 = \frac{1}{2} \{ M_x + M_y \pm (M_x - M_y) \}$   
 $= M_x$  正符號を取る時  
 $= M_y$  負符號を取る時

公式 (2), (3) 及 (4) 等の關係に依り公式 (219) と (212) とは全く同一のものなるが故に満載等布荷重を受け 4 邊に於て支承せらるゝ矩形床版に對しては、 $M_0$  に對しても亦公式 (216) 及び (217) は其儘當てはむることを得可し。

### (三) 裁 力

第二十圖に示す如き三つの切面應力強度  $\tau_x, \tau_y$  及び  $\tau_\varphi$  の間には次の關係あり。

$$\tau_\varphi ds = \tau_x dx + \tau_y dy$$

∴  $\tau_\varphi = \tau_x \sin \varphi + \tau_y \cos \varphi$

故に斜斷面の幅員單位長なる面積  $1 \times h$  内の裁力を  $S_s$  とすれば

$$S_s = \int \tau_\varphi dz = \cos \varphi \int \tau_y dz + \sin \varphi \int \tau_x dz \\ = S_x \sin \varphi + S_y \cos \varphi$$

是に依りて次の公式を得可し。

$$S_s = S_x \sin \varphi + S_y \cos \varphi = -K \left\{ \left( \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \right) \sin \varphi \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} \right) \cos \varphi \right\} \dots \dots \dots (221)$$

$S_s$  の最大又は最小値は、 $\varphi$  が

$$\frac{dS_s}{d\varphi} = S_x \cos \varphi - S_y \sin \varphi = 0$$

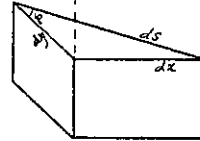
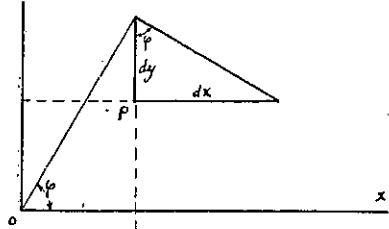
を満足せしむる時起る、斯の如き  $\varphi$  の値を  $\varphi'$  とすれば

$$\tan \varphi' = \frac{S_x}{S_y} = \left( \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x \partial y^2} \right) \div \left( \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial y^3} \right)$$

にして

$$S_0 = \pm \sqrt{S_x^2 + S_y^2} \dots \dots (223)$$

を以て表はさる可し。



第二十圖

(完)

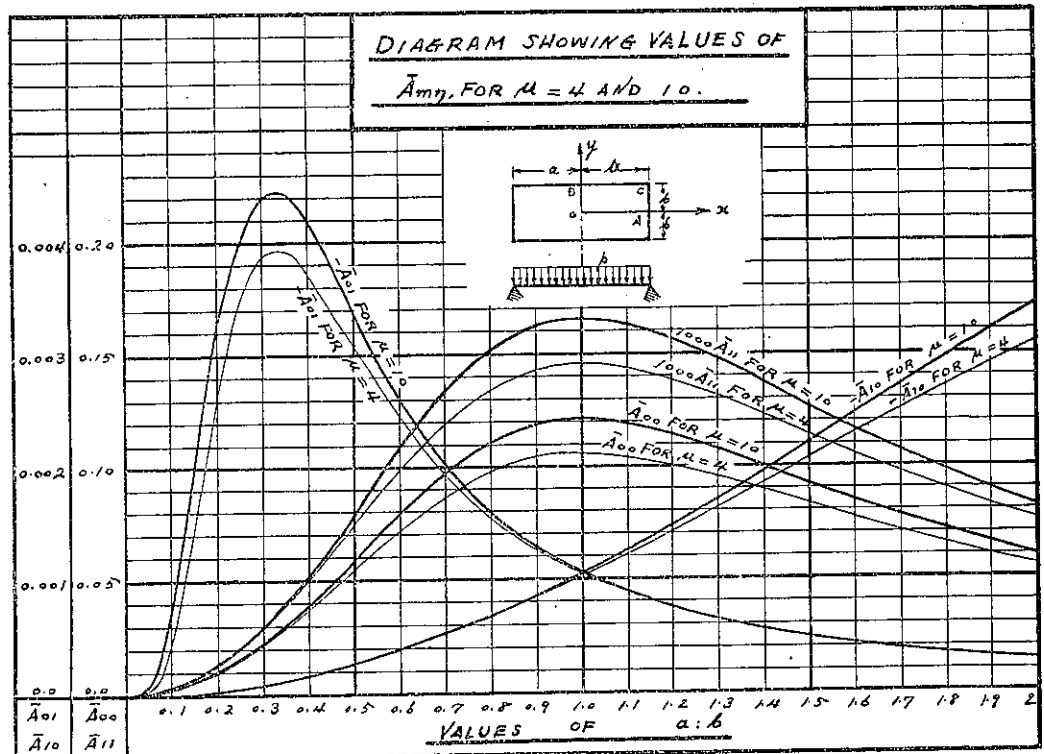
VALUES OF  $\bar{A}_{mn}$  IN THE EQUATION OF DEFLECTION EXPRESSED AS

$$C = \frac{1-l}{EI} \rho a^2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{mn} \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \cos \frac{\pi(2n+1)y}{2b}$$

FOR A RECTANGULAR PLATE SIMPLY SUPPORTED AT ITS FOUR SIDES AND SUBJECTED TO A FULL UNIFORM LOAD.

PL. I - 1.

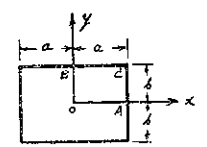
a/b	$\mu = 4$				$\mu = 10$			
	$\bar{A}_{00}$	$-\bar{A}_{01}$	$-\bar{A}_{10}$	$1000\bar{A}_{11}$	$\bar{A}_{00}$	$-\bar{A}_{01}$	$-\bar{A}_{10}$	$1000\bar{A}_{11}$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.00265	0.00084	0.00001	0.00363	0.00266	0.00087	0.00001	0.00365
0.2	0.01043	0.00271	0.00004	0.01430	0.01055	0.00295	0.00004	0.01447
0.3	0.02276	0.00388	0.00010	0.03122	0.02336	0.00439	0.00010	0.03204
0.4	0.03855	0.00370	0.00017	0.05286	0.04028	0.00422	0.00017	0.05526
0.5	0.05606	0.00309	0.00028	0.07890	0.05984	0.00341	0.00027	0.08208
0.6	0.07320	0.00244	0.00039	0.10440	0.07978	0.00263	0.00039	0.10940
0.7	0.08786	0.00192	0.00052	0.12053	0.09751	0.00203	0.00053	0.13380
0.8	0.09853	0.00153	0.00067	0.13516	0.11084	0.00161	0.00067	0.15204
0.9	0.10465	0.00124	0.00084	0.14354	0.11853	0.00129	0.00087	0.16273
1.0	0.10651	0.00103	0.00103	0.14610	0.12104	0.00106	0.00106	0.16603
1.1	0.10508	0.00086	0.00122	0.14400	0.11903	0.00087	0.00127	0.16370
1.2	0.10108	0.00073	0.00143	0.13865	0.11407	0.00074	0.00149	0.15647
1.3	0.09573	0.00063	0.00164	0.13138	0.10730	0.00064	0.00173	0.14728
1.4	0.08965	0.00054	0.00186	0.12297	0.09972	0.00053	0.00197	0.13679
1.5	0.08336	0.00047	0.00208	0.11434	0.09200	0.00048	0.00222	0.12620
1.6	0.07717	0.00042	0.00229	0.10585	0.08452	0.00042	0.00247	0.11594
1.7	0.07126	0.00037	0.00251	0.09777	0.07750	0.00038	0.00271	0.10630
1.8	0.06577	0.00033	0.00271	0.09022	0.07104	0.00034	0.00296	0.09744
1.9	0.06070	0.00030	0.00291	0.08327	0.06514	0.00030	0.00319	0.08936
2.0	0.05606	0.00028	0.00309	0.07690	0.05984	0.00027	0.00341	0.08208



VALUES OF COEFFICIENTS OF DEFLECTION, BENDING MOMENTS AND SHEARS AT EXTREME POINTS OF A RECTANGULAR PLATE WHICH IS SIMPLY SUPPORTED AT ITS FOUR SIDES AND IS SUBJECTED TO A FULL UNIFORM LOAD.

PL. I - 2.

$\frac{a}{b}$	$\mu$	VALUES OF				
		$\bar{\zeta}_0$	$\bar{M}_{x0}$	$\bar{M}_{y0}$	$\bar{S}_{xA}$	$\bar{S}_{yB}$
0.0	10	0.0	0.0			
0.1	"	0.00179	0.00423			
0.2	"	0.00757	0.01793			
0.3	"	0.01690	0.04495			
0.4	"	0.03594	0.08543	0.06032	0.38270	0.72011
0.5	"	0.05624	0.13685	0.12704	0.53106	0.79725
0.6	"	0.07687	0.18918	0.19119	0.66763	0.86344
0.7	"	0.09308	0.23636	0.24337	0.77421	0.73008
0.8	"	0.10869	0.27284	0.27961	0.85242	0.97400
0.9	"	0.11653	0.29500	0.29919	0.95444	0.99163
1.0	"	0.11909	0.30390	0.30390	0.98555	0.98555
1.1	10	0.10460	0.34525	0.34525	0.87466	0.87466
1.2	"	0.11708	0.30032	0.29444	0.99317	0.95856
1.3	"	0.11200	0.28824	0.28526	0.92332	0.91471
1.4	"	0.10508	0.27027	0.26310	0.96280	0.84486
1.5	"	0.09734	0.24954	0.24038	0.93558	0.81156
1.6	"	0.08943	0.22750	0.22172	0.91039	0.75768
1.7	"	0.08175	0.20545	0.20186	0.88323	0.70483
1.8	"	0.07452	0.18410	0.18313	0.85775	0.65772
1.9	"	0.06784	0.16364	0.16354	0.83588	0.61216
2.0	"	0.06174	0.14464	0.15072	0.81538	0.56914
2.0	"	0.05624	0.12704	0.13685	0.79725	0.53106



$$\zeta = \frac{1}{4} p a^2 b^2 \bar{\zeta}_0$$

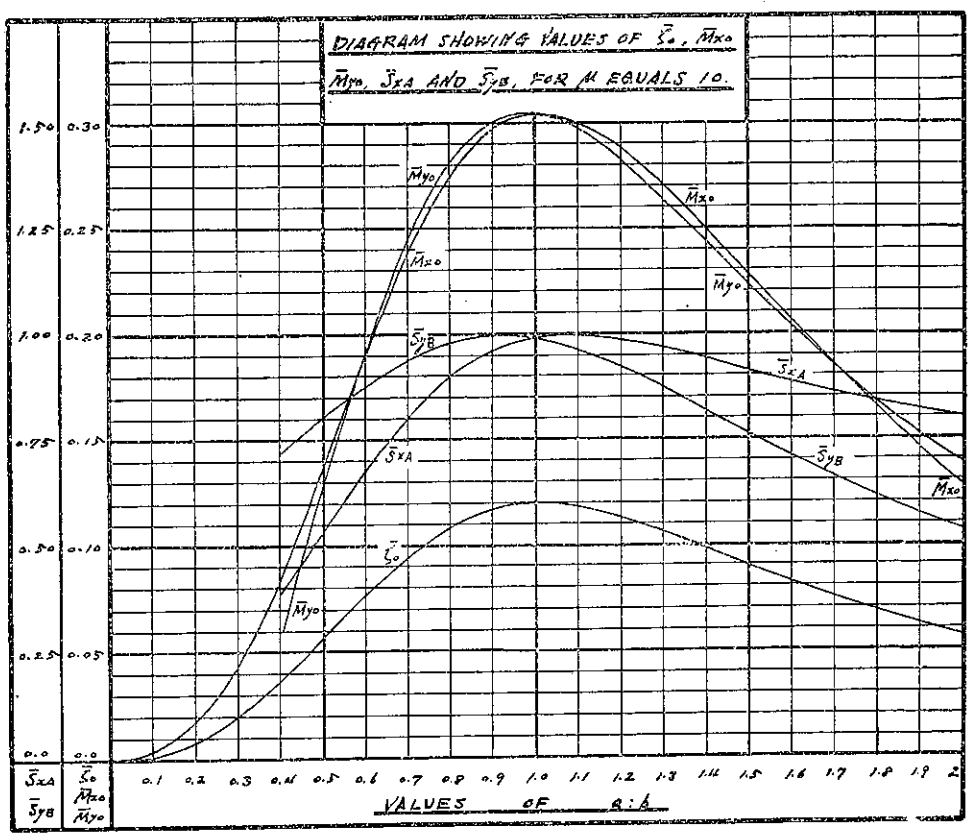
where  $\frac{1}{4} = (1 - \frac{1}{\mu^2}) \div EI$

$$M_{x0} = p a^2 \bar{M}_{x0}$$

$$M_{y0} = p a^2 \bar{M}_{y0}$$

$$S_{xA} = -p a \bar{S}_{xA}$$

$$S_{yB} = -p a \bar{S}_{yB}$$



土木學會誌第十卷第六號附圖

VALUES OF THE COEFFICIENT  $\bar{A}_m$  IN THE EQUATION OF DEFLECTION EXPRESSED AS

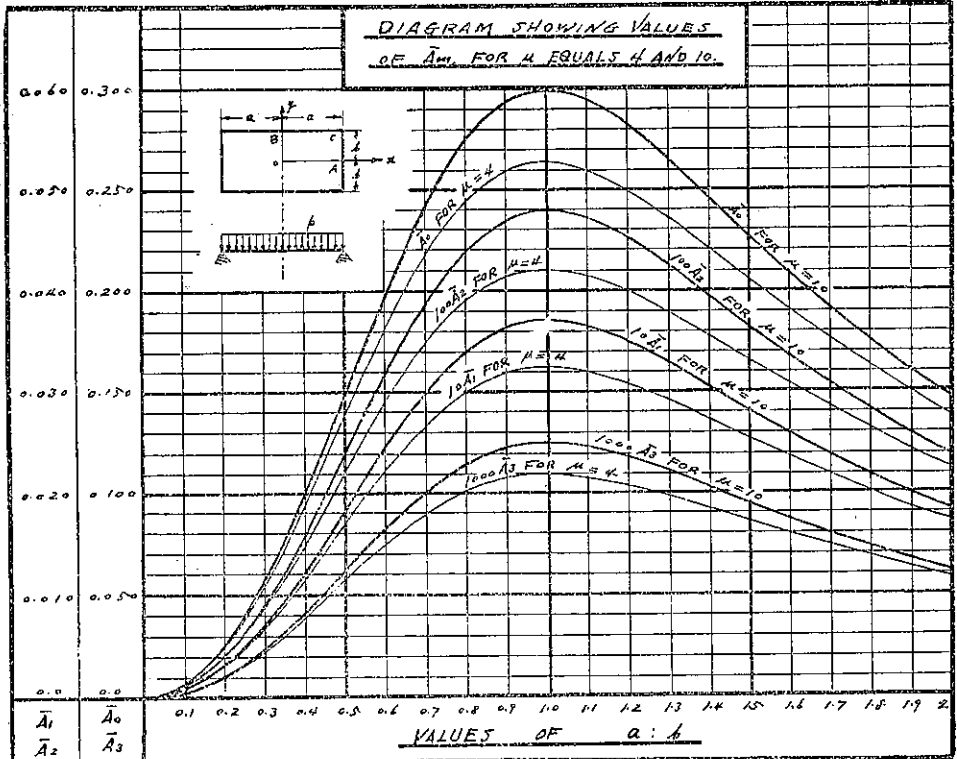
$$S = -\frac{4q^2}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\bar{A}_m}{(2m+1)^2} \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b}, \text{ WHERE } \bar{A}_m = -\frac{1}{\pi^2} \pi^2 \bar{A}_m$$

FOR A RECTANGULAR PLATE WHICH IS SIMPLY SUPPORTED AT ITS FOUR SIDES AND SUBJECTED TO A FULL UNIFORM LOAD.

PL. I-3.

$\frac{a}{b}$	$\mu=4$				$\mu=10$			
	$\bar{A}_0$	$10\bar{A}_1$	$100\bar{A}_2$	$1000\bar{A}_3$	$\bar{A}_0$	$10\bar{A}_1$	$100\bar{A}_2$	$1000\bar{A}_3$
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.000654	0.000081	0.00105	0.00272	0.00656	0.00081	0.00105	0.00273
0.2	0.02554	0.00318	0.00412	0.01072	0.02603	0.00321	0.00416	0.01084
0.3	0.05521	0.00882	0.00883	0.02299	0.05763	0.00712	0.00922	0.02400
0.4	0.09508	0.0174	0.01521	0.03560	0.09940	0.01227	0.01590	0.04140
0.5	0.13532	0.01708	0.02213	0.05761	0.14765	0.01820	0.02362	0.06149
0.6	0.18041	0.02230	0.02890	0.07822	0.19689	0.02430	0.03130	0.08198
0.7	0.21678	0.02676	0.03489	0.09029	0.24060	0.02970	0.03830	0.10021
0.8	0.24312	0.03001	0.03890	0.10126	0.27348	0.03376	0.04376	0.11390
0.9	0.25820	0.03188	0.04131	0.10754	0.28271	0.03614	0.04683	0.12191
1.0	0.26231	0.03248	0.04205	0.10946	0.28565	0.03687	0.04778	0.12440
1.1	0.25903	0.03191	0.04144	0.10788	0.27377	0.03627	0.04700	0.12240
1.2	0.24940	0.03079	0.03990	0.10367	0.25145	0.03473	0.04522	0.11722
1.3	0.23220	0.02916	0.03779	0.09837	0.22675	0.03269	0.04236	0.11030
1.4	0.22121	0.02731	0.03539	0.09213	0.20606	0.03035	0.03937	0.10250
1.5	0.20588	0.02539	0.03291	0.08516	0.18700	0.02802	0.03632	0.09434
1.6	0.19041	0.02351	0.03047	0.07930	0.16854	0.02575	0.03337	0.08686
1.7	0.17586	0.02171	0.02814	0.07320	0.15122	0.02362	0.03059	0.07964
1.8	0.16228	0.02004	0.02597	0.06789	0.13327	0.02164	0.02804	0.07300
1.9	0.14877	0.01849	0.02396	0.06238	0.11677	0.01985	0.02572	0.06696
2.0	0.13582	0.01708	0.02213	0.05761	0.10147	0.01823	0.02362	0.06149

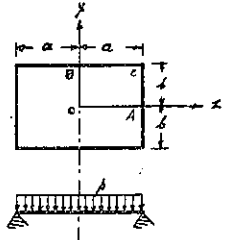
土木學會雜誌十卷第六號附圖(三)



VALUES OF COEFFICIENTS OF DEFLECTION, BENDING MOMENTS AND SHEARS AT EXTREME POINTS OF A RECTANGULAR PLATE WHICH IS FIXED AT ITS FOUR SIDES AND SUBJECTED TO A FULL UNIFORM LOAD.

$\frac{a}{b}$	$\mu$	$\bar{M}_{x0}$	$\bar{M}_{y0}$	$\bar{S}_{xA}$	$\bar{S}_{y0}$
0.0	1p	0.0	0.06667	0.0	0.0
0.1	1	0.00382	0.07318	0.09989	0.00266
0.2	1	0.02652	0.09245	0.20602	0.01093
0.3	1	0.05900	0.12344	0.31868	0.02339
0.4	1	0.10247	0.16389	0.43873	0.04034
0.5	1	0.15356	0.20974	0.56180	0.05993
0.6	1	0.20693	0.25522	0.67910	0.07989
0.7	1	0.25609	0.29396	0.77942	0.09765
0.8	1	0.29825	0.32086	0.85327	0.11100
0.9	1	0.32107	0.33769	0.89897	0.11880
0.9457	1	0.32827	0.33500	0.90541	0.12053
1.0	1	0.33333	0.33333	0.90904	0.12121
	4	0.33333	0.33333	0.80000	0.10666
1.0574	10	0.33500	0.32827	0.90541	0.12053
1.1	1	0.33418	0.32271	0.87832	0.11993
1.2	1	0.32671	0.30840	0.87102	0.11423
1.3	1	0.31403	0.28498	0.83378	0.10746
1.4	1	0.29860	0.26240	0.77181	0.09987
1.5	1	0.28215	0.24056	0.74888	0.09213
1.6	1	0.26577	0.21987	0.70580	0.08464
1.7	1	0.25009	0.20074	0.66595	0.07761
1.8	1	0.23547	0.18334	0.62839	0.07114
1.9	1	0.22202	0.16765	0.59369	0.06525
2.0	1	0.20974	0.15356	0.56180	0.05993

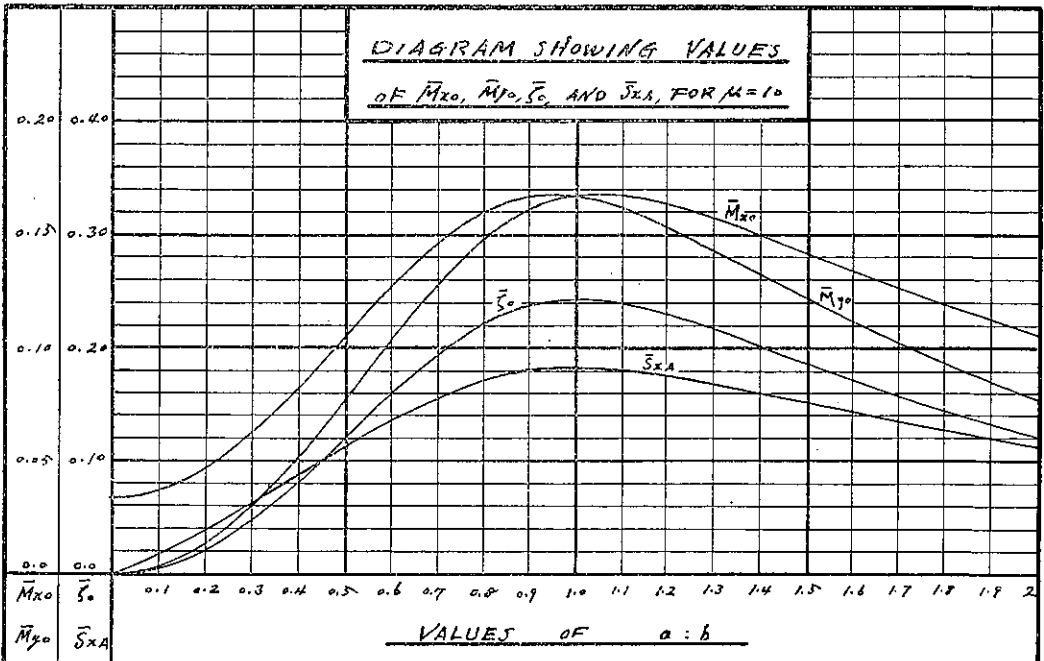
PL. I - 4.



$\delta = \frac{1}{K} p a^2 A^2 \bar{\xi}_0$   
 where  $K = (1 - \mu^2) \div EI$

$M_{x0} = \mu A^2 \bar{M}_{x0}$   
 $M_{y0} = \mu A^2 \bar{M}_{y0}$

$S_{xA} = -\mu b \bar{S}_{xA}$   
 $S_{yB} = -\mu a \bar{S}_{yB}$   
 $\bar{S}_{xA} = \bar{S}_{yB}$

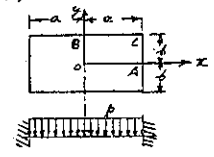


PL. II - 1.

VALUES OF COEFFICIENT  $\bar{A}_m$  IN THE EQUATION OF REFLECTION EXPRESSED

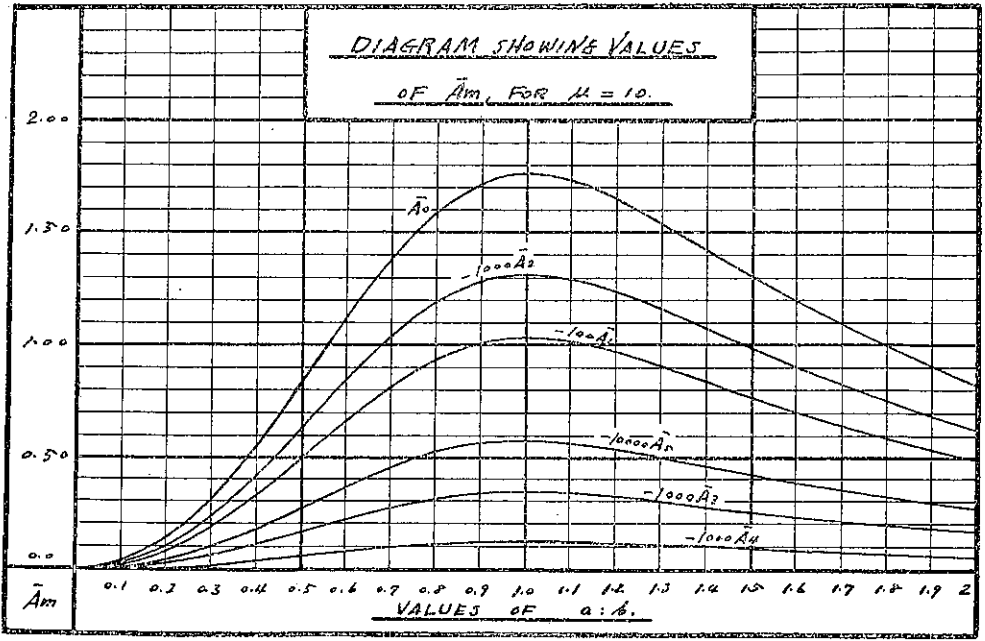
As 
$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ \frac{1}{2}(x^2 - a^2) + \frac{2a^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \right\} \left\{ \frac{1}{2}(y^2 - b^2) + \frac{2b^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \right\}$$

FOR A RECTANGULAR PLATE WHICH IS PERFECTLY FIXED AT ITS FOUR SIDES AND SUBJECTED TO A FULL UNIFORM LOAD.



$\frac{a}{b}$	$\mu$	$\bar{A}_0$	$-10\bar{A}_1$	$-100\bar{A}_2$	$-1000\bar{A}_3$	$-10000\bar{A}_4$	$-100000\bar{A}_5$
0.0	10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	+	0.03408	0.00210	0.00264	0.00068	0.00025	0.00112
0.2	+	0.13930	0.00239	0.01053	0.00278	0.00100	0.00448
0.3	+	0.31136	0.01889	0.02354	0.00611	0.00230	0.00976
0.4	+	0.54428	0.03251	0.04100	0.01066	0.00390	0.01749
0.5	+	0.82104	0.04879	0.06170	0.01605	0.00588	0.02636
0.6	+	1.11229	0.06872	0.08337	0.02172	0.00796	0.03560
0.7	+	1.37906	0.08109	0.10314	0.02689	0.00986	0.04524
0.8	+	1.58123	0.09254	0.11828	0.03121	0.01133	0.05078
0.9	+	1.71160	0.09982	0.12724	0.03324	0.01219	0.05581
1.0	+	1.74761	0.10197	0.13014	0.03398	0.01246	0.05891
	-	1.74761	0.09724	0.12733	0.03557	0.01237	0.05563
1.1	10	1.71419	0.10014	0.12781	0.03387	0.01224	0.05486
1.2	+	1.63459	0.09568	0.12202	0.03185	0.01167	0.05240
1.3	+	1.52987	0.08966	0.11425	0.02981	0.01093	0.04906
1.4	+	1.41488	0.08202	0.10546	0.02755	0.01010	0.04530
1.5	+	1.29937	0.07624	0.09694	0.02527	0.00926	0.04154
1.6	+	1.18282	0.06982	0.08880	0.02308	0.00846	0.03774
1.7	+	1.07845	0.06397	0.08085	0.02106	0.00771	0.03460
1.8	+	0.98343	0.05825	0.07380	0.01921	0.00688	0.03156
1.9	+	0.89779	0.05327	0.06743	0.01755	0.00643	0.02882
2.0	+	0.82104	0.04879	0.06170	0.01605	0.00588	0.02636

(土木學會誌第十卷第六號附圖)





VALUES OF COEFFICIENTS OF DEFLECTION, BENDING MOMENTS AND SHEARS AT EXTREME POINTS OF A RECTANGULAR PLATE WHICH IS FIXED AT ITS FOUR SIDES AND SUBJECTED TO A FULL UNIFORM LOAD. PL. II - 2.

$\frac{a}{b}$	$\bar{f}_0$	$\bar{M}_{x0}$	$\bar{M}_{y0}$	$\bar{M}_{xA}$	$\bar{S}_{xA}$	$\bar{S}_{yB}$
0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.00052	0.00183	0.02013	0.00472	0.16300	0.00163
0.2	0.00215	0.00755	0.02643	0.01767	0.28205	0.01128
0.3	0.00480	0.01691	0.03358	0.04402	0.42320	0.04445
0.4	0.00841	0.02996	0.04792	0.07680	0.64605	0.09337
0.5	0.01270	0.04574	0.06247	0.11596	0.97816	0.19454
0.6	0.01723	0.06360	0.07844	0.15708	1.37742	0.31586
0.7	0.02138	0.07896	0.09063	0.19473	1.83163	0.45647
0.8	0.02452	0.09192	0.09989	0.22324	2.33366	0.59834
0.9	0.02658	0.10137	0.10535	0.24162	2.87744	0.72661
1.0	0.02715	0.10542	0.10542	0.24697	3.4532	0.82532
1.1	0.02660	0.10524	0.10163	0.24200	4.0549	0.89003
1.2	0.02537	0.10226	0.09559	0.23077	4.6734	0.92645
1.3	0.02373	0.09772	0.08854	0.21884	5.30607	0.93880
1.4	0.02195	0.09244	0.08123	0.19978	5.94751	0.93590
1.5	0.02000	0.08663	0.07356	0.18291	6.58832	0.91868
1.6	0.01833	0.08099	0.06700	0.16704	7.22707	0.89547
1.7	0.01670	0.07556	0.06065	0.15230	7.8628	0.86785
1.8	0.01523	0.07025	0.05516	0.13870	8.49470	0.83530
1.9	0.01390	0.06636	0.05101	0.12691	9.12370	0.80788
2.0	0.01270	0.06247	0.04874	0.11597	9.74844	0.7816

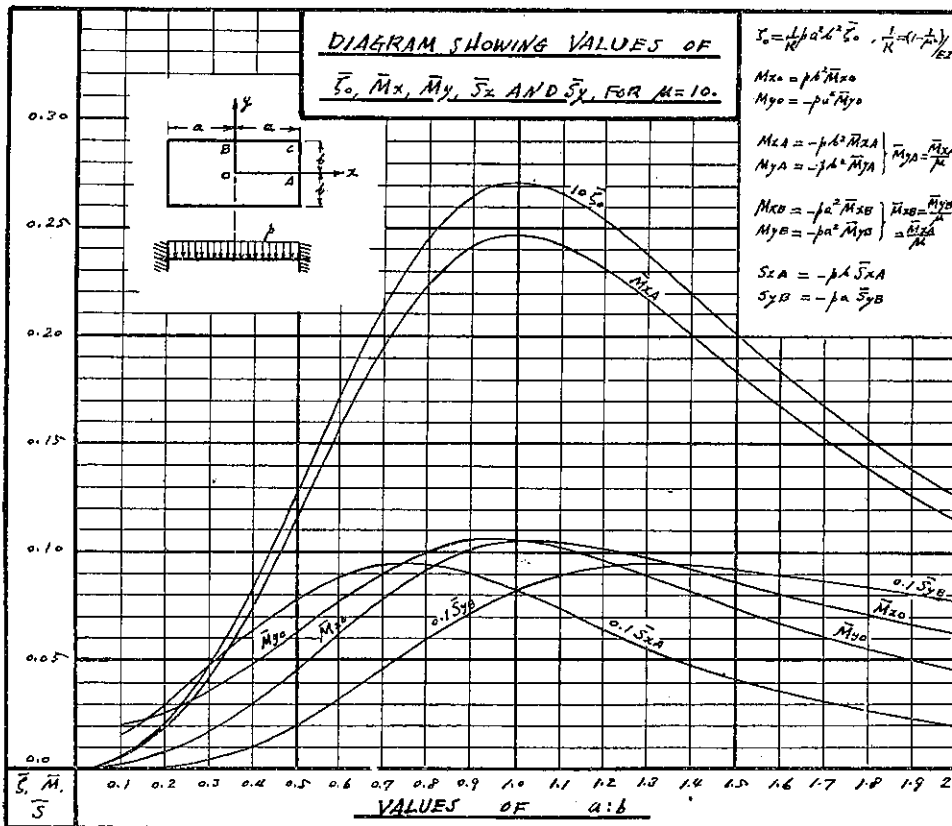


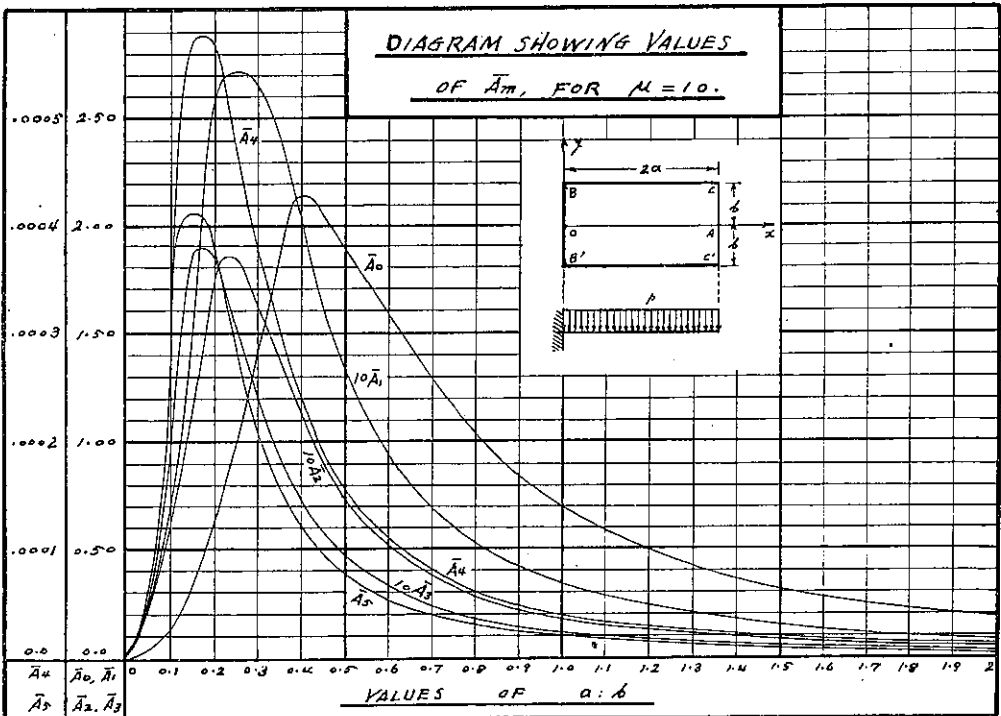
PLATE III - 1.

VALUES OF  $\bar{A}_m$ , FOR VARIOUS VALUES OF  $a:b$  IN THE EQUATION OF DEFLECTION EXPRESSED AS

$$\zeta = \frac{b}{K} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{4a(-1)^m}{\pi(2m+1)} x + \frac{16a^2(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} \sin^2 \frac{\pi(2m+1)x}{4a} \right] \left\{ \frac{1}{2}(y^2 - A^2) + \frac{2A^2(-1)^m}{\pi(2m+1)} \left( \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2A} \right) \right\}$$

FOR A RECTANGULAR PLATE UNDER FULL UNIFORM LOAD WHOSE THREE SIDES ARE PERFECTLY FIXED AND THE REMAINING ONE IS FREE. IN THE ABOVE EQUATION, K STANDS FOR  $EI \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{\mu^2})$ .

a:b	$\mu$	$\bar{A}_0$	$10\bar{A}_1$	$100\bar{A}_2$	$1000\bar{A}_3$	$10000\bar{A}_4$	$100000\bar{A}_5$	$\mu$	a:b
0.0	10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	10	0.0
0.1	"	0.13611	0.07211	0.06401	0.10682	0.03882	0.03526	"	0.1
0.2	"	0.11361	0.26109	0.17566	0.18423	0.05611	0.03758	"	0.2
0.3	"	1.42748	0.26584	0.16351	0.11799	0.03868	0.02011	"	0.3
0.4	"	2.12849	0.20017	0.11137	0.07134	0.02385	0.01169	"	0.4
0.5	"	1.87015	0.13289	0.07236	0.04588	0.01546	0.00750	"	0.5
0.6	"	1.58134	0.09317	0.05028	0.03187	0.01078	0.00521	"	0.6
0.7	"	1.24803	0.06815	0.03671	0.02337	0.00791	0.00382	"	0.7
0.8	"	1.03161	0.05232	0.02783	0.01789	0.00606	0.00293	"	0.8
0.9	"	0.83405	0.04123	0.02148	0.01413	0.00479	0.00231	"	0.9
1.0	"	0.68642	0.03336	0.01792	0.01143	0.00388	0.00187	"	1.0
1.0	4	0.68513	0.03359	0.01797	0.01148	0.00388	0.00187	4	
1.1	10	0.57302	0.02756	0.01481	0.00985	0.00320	0.00155	10	1.1
1.2	"	0.48408	0.02312	0.01243	0.00794	0.00269	0.00130	"	1.2
1.3	"	0.41463	0.01970	0.01058	0.00678	0.00229	0.00111	"	1.3
1.4	"	0.35710	0.01699	0.00913	0.00583	0.00198	0.00098	"	1.4
1.5	"	0.31125	0.01477	0.00794	0.00508	0.00172	0.00083	"	1.5
1.6	"	0.27548	0.01299	0.00698	0.00446	0.00151	0.00073	"	1.6
1.7	"	0.24417	0.01150	0.00632	0.00393	0.00134	0.00065	"	1.7
1.8	"	0.21835	0.01026	0.00582	0.00352	0.00120	0.00058	"	1.8
1.9	"	0.19482	0.00920	0.00544	0.00316	0.00107	0.00052	"	1.9
2.0	"	0.17701	0.00725	0.00447	0.00285	0.00097	0.00047	"	2.0

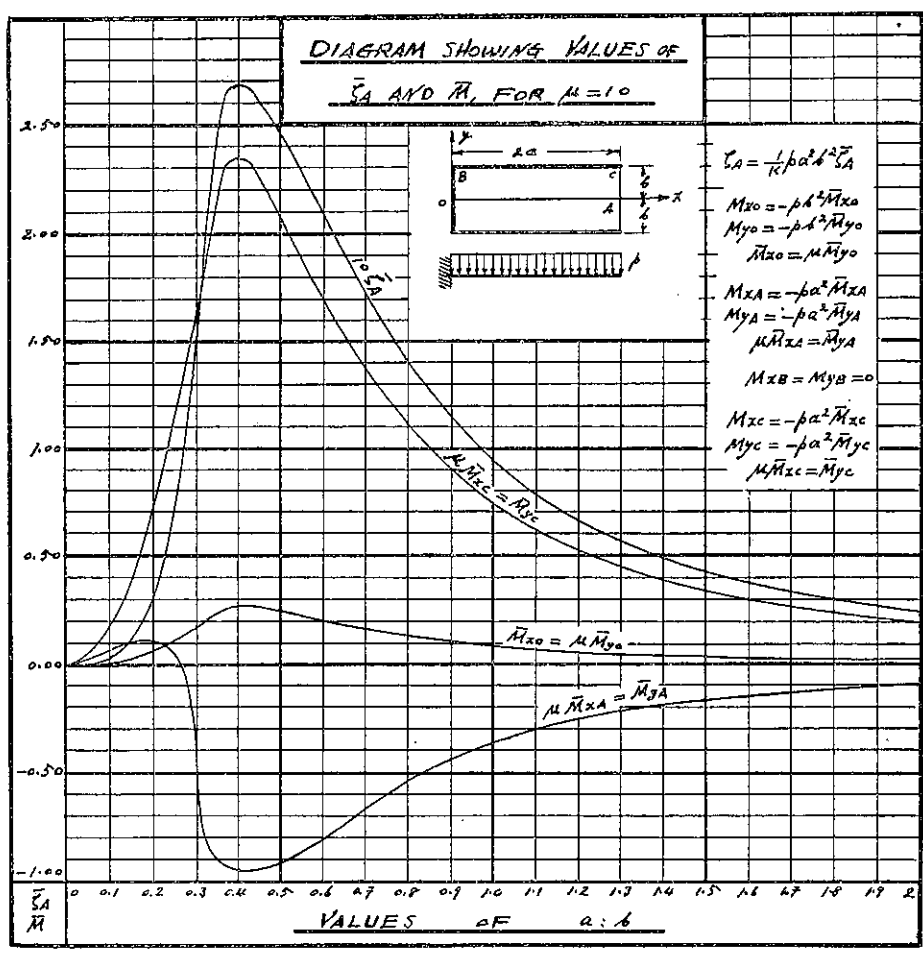


土木學會臨時十卷第六號附圖

VALUES OF COEFFICIENTS OF DEFLECTION AND BENDING MOMENTS AT EXTREME POINTS OF A RECTANGULAR PLATE UNDER FULL UNIFORM LOAD, WHOSE THREE SIDES ARE FIXED AND THE REMAINING ONE IS FREE.

PLATE III-2

a:b	$\mu$	$\bar{C}_A$	$\bar{M}_{x0} = \mu \bar{M}_{y0}$	$\mu \bar{M}_{xA} = \bar{M}_{yA}$	$\mu \bar{M}_{x0} = \bar{M}_{y0}$	$\mu$	a:b
0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
0.1	"	0.00190	0.01230	0.07393	0.17296	"	0.1
0.2	"	0.02927	0.06304	0.11473	0.74755	"	0.2
0.3	"	0.14908	0.17450	-0.39738	1.62107	"	0.3
0.4	"	0.26728	0.27550	-0.84661	2.35331	"	0.4
0.5	"	0.24463	0.24539	-0.91115	2.05274	"	0.5
0.6	"	0.21119	0.20896	-0.80459	1.72953	"	0.6
0.7	"	0.16788	0.16532	-0.64451	1.36318	"	0.7
0.8	"	0.13968	0.13696	-0.53987	1.11534	"	0.8
0.9	"	0.11817	0.11081	-0.45932	0.90961	"	0.9
1.0	"	0.09327	0.09122	-0.36059	0.74859	"	1.0
1.0	$\mu$	0.09303	0.09105	-0.36063	0.74712	$\mu$	1.0
1.1	1.0	0.07791	0.07620	-0.30225	0.62537	1.0	1.1
1.2	"	0.06596	0.06430	-0.25547	0.52769	"	1.2
1.3	"	0.05642	0.05515	-0.21935	0.45195	"	1.3
1.4	"	0.04860	0.04757	-0.18887	0.38922	"	1.4
1.5	"	0.04234	0.04140	-0.16266	0.33925	"	1.5
1.6	"	0.03748	0.03661	-0.14573	0.29992	"	1.6
1.7	"	0.03326	0.03248	-0.12936	0.26511	"	1.7
1.8	"	0.02975	0.02905	-0.11572	0.23796	"	1.8
1.9	"	0.02653	0.02692	-0.10316	0.21234	"	1.9
2.0	"	0.02434	0.02362	-0.09565	0.19259	"	2.0



(土木學會誌第十卷第六號附圖)

PLATE III - 3

VALUES OF COEFFICIENTS OF SHEARS AT EXTREME POINTS OF A RECTANGULAR PLATE UNDER FULL UNIFORM LOAD, WHOSE THREE SIDED ARE PERFECTLY FIXED AND THE REMAINING ONE IS FREE

a:b	$\mu$	$\bar{S}_{x0}$	$\bar{S}_{xA}$	$\bar{S}_{xC}$	$\bar{S}_{yC}$	$\mu$	a:b
0.0	1.0	-	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
0.1	"	3.01516	0.03804	0.12125	0.01552	"	0.1
0.2	"	2.83361	0.13508	0.51775	0.18120	"	0.2
0.3	"	2.21047	0.21438	1.10891	0.57061	"	0.3
0.4	"	1.63916	-0.60387	1.60019	1.19921	"	0.4
0.5	"	0.89335	-0.58928	1.39434	1.93963	"	0.5
0.6	"	0.51547	-0.52525	1.17669	1.81168	"	0.6
0.7	"	0.29702	-0.42206	0.92431	1.92245	"	0.7
0.8	"	0.18691	-0.35448	0.76357	2.05206	"	0.8
0.9	"	0.11807	-0.28977	0.61705	2.09177	"	0.9
1.0	"	0.07934	-0.23792	0.50769	2.12061	"	1.0
	4	0.07925	-0.23707	0.50681	2.11280	4	1.0
1.1	1.0	0.05470	-0.19902	0.42374	2.13909	1.0	1.1
1.2	"	0.03902	-0.16835	0.35793	2.14850	"	1.2
1.3	"	0.02831	-0.14839	0.30653	2.15241	"	1.3
1.4	"	0.02103	-0.12428	0.26402	2.15632	"	1.4
1.5	"	0.01596	-0.10838	0.23011	2.15658	"	1.5
1.6	"	0.01240	-0.09592	0.20553	2.16765	"	1.6
1.7	"	0.00974	-0.08517	0.18050	2.17121	"	1.7
1.8	"	0.00777	-0.07618	0.16140	2.17053	"	1.8
1.9	"	0.00623	-0.06791	0.14402	2.16422	"	1.9
2.0	"	0.00506	-0.06323	0.13058	2.14128	"	2.0

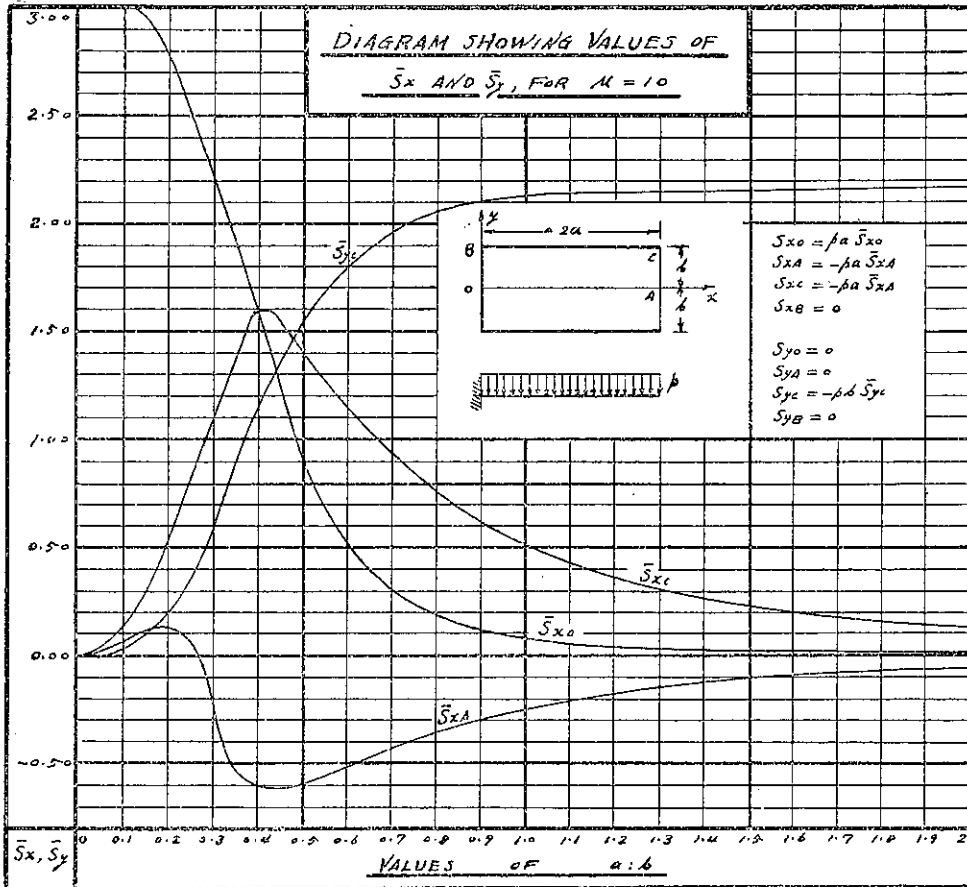


PLATE IV - 1

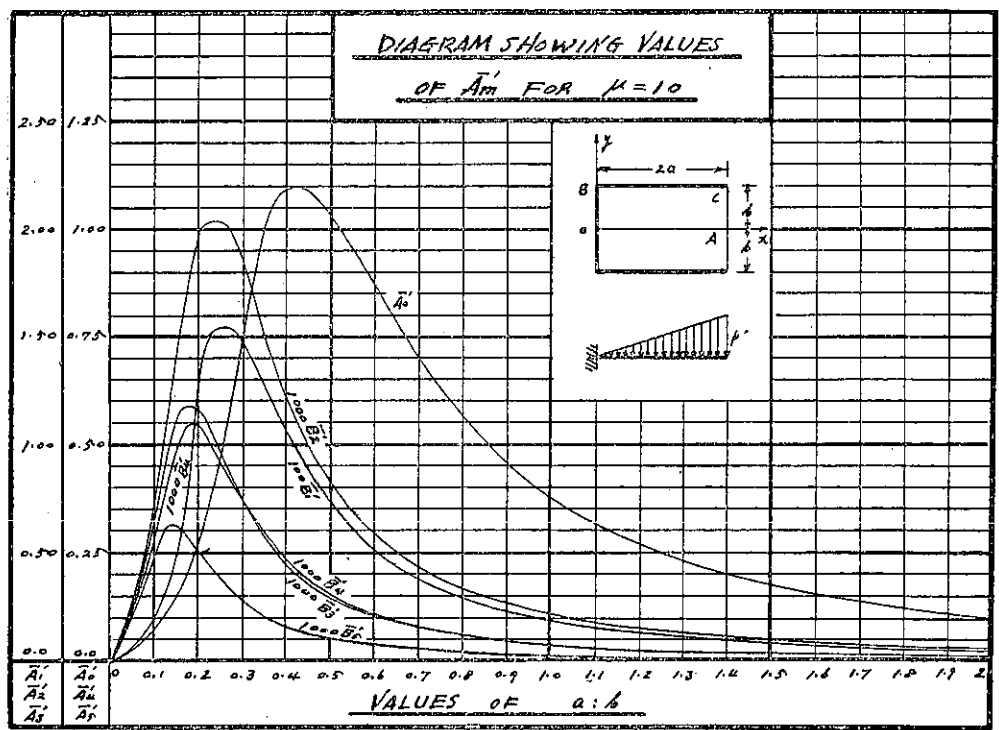
VALUES OF  $\bar{A}_m$  IN THE EQUATION OF DEFLECTION EXPRESSED AS

$$\zeta = \frac{h^3}{K} \sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \left\{ \frac{x^2}{2} - \frac{4a^2(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} x + \frac{16a^2(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} \sin \frac{\pi(2m+1)x}{2a} \right\} \left\{ \frac{1}{2}(y^2+b^2) + \frac{2b^2(-1)^m}{\pi^2(2m+1)^2} \cos \frac{\pi(2m+1)y}{2b} \right\}$$

FOR A RECTANGULAR PLATE, WHOSE THREE SIDES ARE PERFECTLY FIXED AND THE REMAINING ONE IS FREE

THE CASE WHERE THE PLATE IS SUBJECTED TO A TRIANGULAR LOAD WHOSE INTENSITY IS MAXIMUM AT THE FREE SIDE.

a:b	$\mu$	$\bar{A}_0$	$10\bar{A}_1$	$100\bar{A}_2$	$1000\bar{A}_3$	$10000\bar{A}_4$	$100000\bar{A}_5$	$\mu$	a:b
0.0	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
0.1	"	0.06758	0.03886	0.07122	0.06671	0.02768	0.02337	"	0.1
0.2	"	0.32908	0.12616	0.19809	0.11829	0.05388	0.024193	"	0.2
0.3	"	0.74230	0.14562	0.18184	0.07586	0.02713	0.013346	"	0.3
0.4	"	1.08891	0.10613	0.12197	0.04430	0.02378	0.00773	"	0.4
0.5	"	1.02493	0.07274	0.08209	0.02876	0.01492	0.00492	"	0.5
0.6	"	0.06625	0.05101	0.05761	0.01999	0.01042	0.00346	"	0.6
0.7	"	0.69979	0.03748	0.04249	0.01468	0.00763	0.00254	"	0.7
0.8	"	0.56289	0.02862	0.03244	0.01123	0.00587	0.00194	"	0.8
0.9	"	0.45715	0.02259	0.02493	0.00886	0.00464	0.00154	"	0.9
1.0	"	0.37542	0.01829	0.02065	0.00717	0.00376	0.00124	"	1.0
1.1	1.0	0.38172	0.01842	0.02090	0.00719	0.00377	0.00124	1.0	1.1
1.1	1.0	0.31821	0.01509	0.01722	0.00593	0.00311	0.00103	1.0	1.1
1.2	"	0.26588	0.01269	0.01447	0.00498	0.00261	0.00086	"	1.2
1.3	"	0.22704	0.01078	0.01232	0.00425	0.00222	0.00074	"	1.3
1.4	"	0.19642	0.00929	0.01082	0.00366	0.00191	0.00063	"	1.4
1.5	"	0.17135	0.00809	0.00923	0.00319	0.00167	0.00055	"	1.5
1.6	"	0.15056	0.00711	0.00813	0.00280	0.00147	0.00049	"	1.6
1.7	"	0.13382	0.00630	0.00737	0.00248	0.00130	0.00043	"	1.7
1.8	"	0.11948	0.00562	0.00643	0.00221	0.00116	0.00038	"	1.8
1.9	"	0.10673	0.00503	0.00576	0.00199	0.00104	0.00034	"	1.9
2.0	"	0.09723	0.00397	0.00520	0.00179	0.00094	0.00031	"	2.0

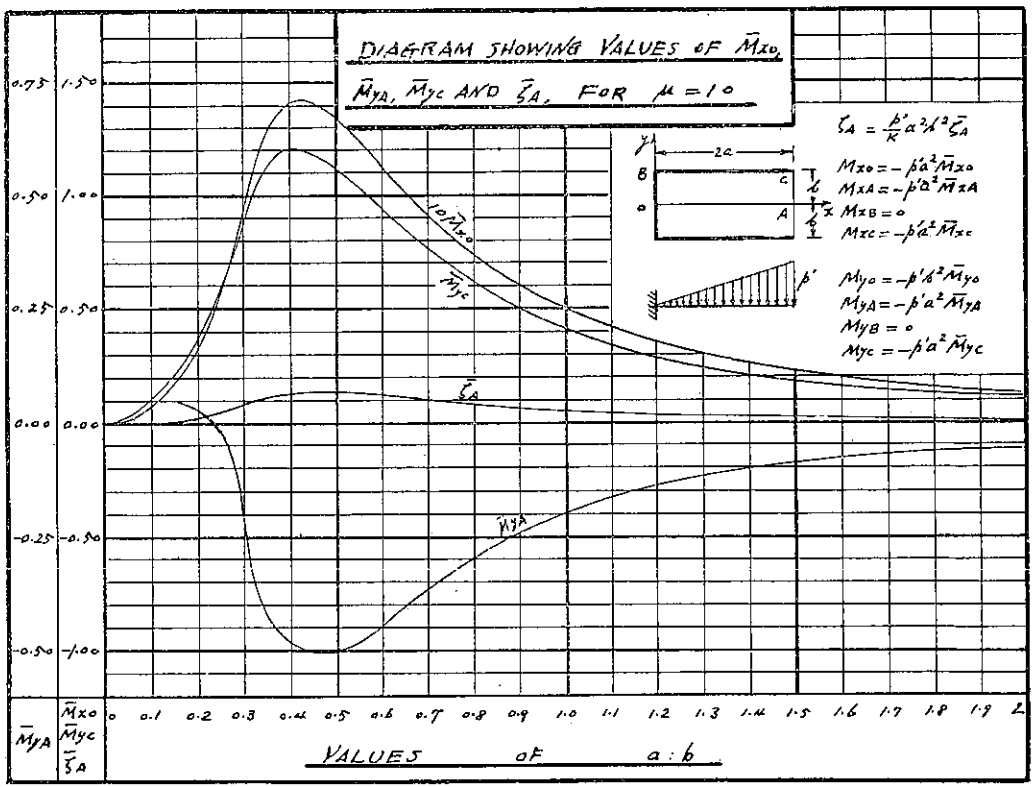


土木學會雜誌第十卷第六號附圖

PLATE IV-2

VALUES OF COEFFICIENTS OF DEFLECTION AND BENDING MOMENTS AT EXTREME POINTS OF A RECTANGULAR PLATE WHOSE THREE SIDES ARE FIXED AND THE REMAINING ONE IS FREE THE CASE WHERE THE PLATE IS SUBJECTED TO A TRIANGULAR LOAD WHOSE INTENSITY IS MAXIMUM ALONG THE FREE SIDE

a:b	$\mu$	$\bar{M}_{x0} = \mu \bar{M}_{y0}$	$\mu \bar{M}_{x0} = \bar{M}_{y0}$	$\mu \bar{M}_{xc} = \bar{M}_{yc}$	$\bar{\zeta}_A$	$\mu$	a:b
0.0	10					10	0.0
0.1	"					"	0.1
0.2	"	0.03420	0.03083	0.29915	0.01049	"	0.2
0.3	"	0.08971	-0.20184	0.84745	0.07504	"	0.3
0.4	"	0.14035	-0.48048	1.20558	0.13536	"	0.4
0.5	"	0.13428	-0.50346	1.12582	0.13373	"	0.5
0.6	"	0.11433	-0.44328	0.94795	0.11547	"	0.6
0.7	"	0.09264	-0.36478	0.76459	0.09411	"	0.7
0.8	"	0.07464	-0.29604	0.61451	0.07605	"	0.8
0.9	"	0.06067	-0.24145	0.49883	0.06192	"	0.9
1.0	"	0.04984	-0.19893	0.40958	0.05091	"	1.0
	4	0.05070	-0.20248	0.41639	0.05171	4	1.0
1.1	10	0.04228	-0.16925	0.34702	0.04332	10	1.1
1.2	"	0.03532	-0.14178	0.28998	0.03612	"	1.2
1.3	"	0.03017	-0.12072	0.24760	0.03085	"	1.3
1.4	"	0.02610	-0.10450	0.21420	0.02670	"	1.4
1.5	"	0.02277	-0.09119	0.18680	0.02327	"	1.5
1.6	"	0.01996	-0.07993	0.16383	0.02047	"	1.6
1.7	"	0.01780	-0.07127	0.14592	0.01820	"	1.7
1.8	"	0.01588	-0.06563	0.13029	0.01625	"	1.8
1.9	"	0.01418	-0.05681	0.11639	0.01451	"	1.9
2.0	"	0.01296	-0.05282	0.10587	0.01335	"	2.0



(七) 北 京 會 館 第 十 卷 第 六 期 附 圖

PLATE IV-3

VALUES OF COEFFICIENTS OF SHEARS AT EXTREME POINTS OF A RECTANGULAR PLATE WHOSE THREE SIDES ARE FIXED AND THE REMAINING ONE IS FREE

THE CASE WHERE THE PLATE IS SUBJECTED TO A TRIANGULAR LOAD WHOSE INTENSITY IS MAXIMUM ALONG THE FREE SIDE

a:b	$\mu$	$\bar{S}_{x0}$	$\bar{S}_{xA}$	$\bar{S}_{xc}$	$\bar{S}_{yc}$	$\mu$	a:b
0.0	1.0		0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
0.1	"	1.51338	0.03599	0.06226	0.00937	"	0.1
0.2	"	1.42754	0.04148	0.27747	0.10284	"	0.2
0.3	"	1.15087	-0.11262	0.58009	0.32031	"	0.3
0.4	"	0.83785	-0.31028	0.82082	0.63179	"	0.4
0.5	"	0.45698	-0.52845	0.78510	0.86347	"	0.5
0.6	"	0.28123	-0.29117	0.64367	1.01124	"	0.6
0.7	"	0.16560	-0.24052	0.51700	1.09487	"	0.7
0.8	"	0.10160	-0.19849	0.41705	1.14052	"	0.8
0.9	"	0.06508	-0.15956	0.33888	1.16642	"	0.9
1.0	"	0.04324	-0.13146	0.27793	1.18058	"	1.0
1.1	4	0.04393	-0.13390	0.28254	1.19828	4	1.1
1.1	10	0.05023	-0.11198	0.27546	1.19028	10	1.1
1.2	"	0.02124	-0.09349	0.19676	1.19997	"	1.2
1.3	"	0.01545	-0.07987	0.16501	1.20204	"	1.3
1.4	"	0.01152	-0.06914	0.14573	1.20535	"	1.4
1.5	"	0.00878	-0.06034	0.12678	1.20883	"	1.5
1.6	"	0.00675	-0.05289	0.11117	1.20860	"	1.6
1.7	"	0.00544	-0.04717	0.09901	1.21038	"	1.7
1.8	"	0.00424	-0.04211	0.08839	1.21093	"	1.8
1.9	"	0.00338	-0.03760	0.07897	1.20567	"	1.9
2.0	"	0.00277	-0.03510	0.07178	1.19931	"	2.0

土木學會臨時十卷第六號附圖

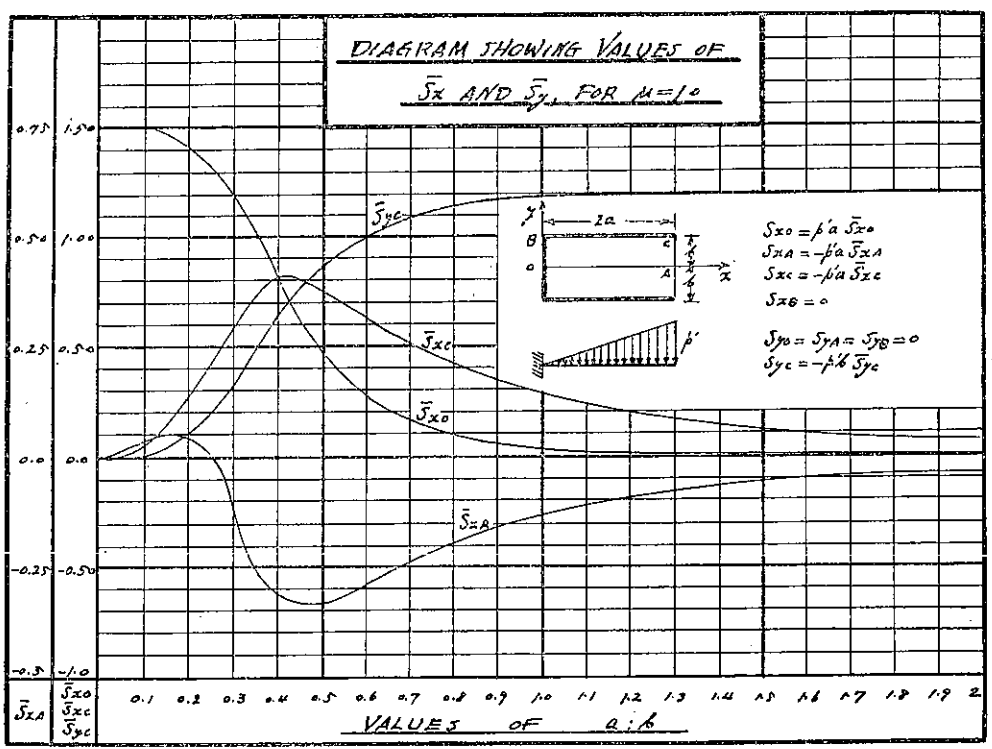
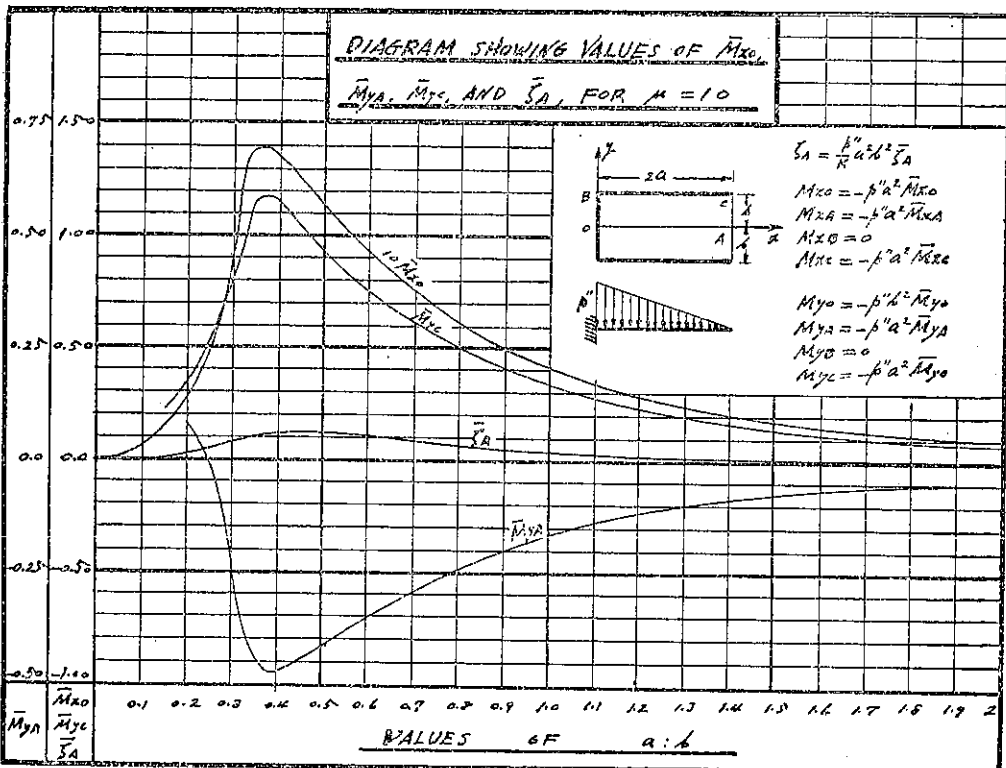


PLATE V-1

VALUES OF COEFFICIENTS OF DEFLECTION AND BENDING MOMENTS AT EXTREME POINTS OF A RECTANGULAR PLATE WHOSE THREE SIDES ARE FIXED AND THE REMAINING ONE IS FREE.  
THE CASE WHERE THE PLATE IS SUBJECTED TO A TRIANGULAR LOAD WHOSE INTENSITY IS ZERO ALONG THE FREE SIDE.

a:h	$\mu$	$\bar{M}_{x0} = \mu \bar{M}_{y0}$	$\mu \bar{M}_{x1} = \bar{M}_{y1}$	$\mu \bar{M}_{xc} = \bar{M}_{yc}$	$\bar{\zeta}_A$	$\mu$	a:h
0.0	1.0					1.0	0.0
0.1	"					"	0.1
0.2	"	0.02854	0.08358	0.34840	0.01878	"	0.2
0.3	"	0.08479	-0.19554	0.77362	0.07404	"	0.3
0.4	"	0.13515	-0.26613	1.14743	0.13193	"	0.4
0.5	"	0.11111	-0.40769	0.92692	0.11090	"	0.5
0.6	"	0.09463	-0.36131	0.78158	0.09872	"	0.6
0.7	"	0.07268	-0.27973	0.59859	0.07377	"	0.7
0.8	"	0.06232	-0.24383	0.50083	0.06363	"	0.8
0.9	"	0.05014	-0.19687	0.41078	0.05125	"	0.9
1.0	"	0.04138	-0.16176	0.33851	0.04236	"	1.0
1.0	4	0.04033	-0.15815	0.33073	0.04132	4	1.0
1.1	10	0.02332	-0.13330	0.27835	0.03459	10	1.1
1.2	"	0.02906	-0.11449	0.23771	0.02974	"	1.2
1.3	"	0.02498	-0.09863	0.20435	0.02559	"	1.3
1.4	"	0.02147	-0.08437	0.17502	0.02190	"	1.4
1.5	"	0.01863	-0.07347	0.15242	0.01908	"	1.5
1.6	"	0.01663	-0.06500	0.13607	0.01701	"	1.6
1.7	"	0.01468	-0.05809	0.11919	0.01506	"	1.7
1.8	"	0.01317	-0.05209	0.10767	0.01350	"	1.8
1.9	"	0.01274	-0.04635	0.09895	0.01202	"	1.9
2.0	"	0.01086	-0.04283	0.08696	0.01099	"	2.0



(土光學會誌第十卷第六號附圖)



PLATE V-2

VALUES OF COEFFICIENTS OF SHEARS AT EXTREME POINTS  
OF A RECTANGULAR PLATE, WHOSE THREE SIDES ARE PER-  
FECTLY FIXED AND THE REMAINING ONE IS FREE.

THE CASE WHERE THE PLATE IS SUBJECTED TO A TRIANGULAR  
LOAD, WHOSE INTENSITY IS ZERO ALONG THE FREE SIDE.

a:b	$\mu$	$\bar{S}_{x0}$	$\bar{S}_{xA}$	$\bar{S}_{xc}$	$\bar{S}_{yc}$	$\mu$	a:b
0.0	1.0	-	0.0	0.0	0.0	1.0	0.0
0.1	"	1.50133	0.02205	0.08902	0.00615	"	0.1
0.2	"	1.40607	0.07360	0.24028	0.07886	"	0.2
0.3	"	1.08960	-0.10176	0.52802	0.25030	"	0.3
0.4	"	0.80131	-0.29359	0.77937	0.58242	"	0.4
0.5	"	0.40637	-0.26083	0.62724	0.67116	"	0.5
0.6	"	0.23424	-0.23408	0.53302	0.50044	"	0.6
0.7	"	0.13142	-0.18154	0.40731	0.32758	"	0.7
0.8	"	0.08531	-0.15879	0.34682	0.21154	"	0.8
0.9	"	0.05299	-0.14021	0.27817	0.12585	"	0.9
1.0	"	0.03601	-0.10646	0.22576	0.04003	"	1.0
1.1	1.0	0.03532	-0.10317	0.22427	0.04452	1.0	1.1
1.2	"	0.02447	-0.08704	0.18828	0.04881	"	1.2
1.3	"	0.01778	-0.07486	0.16117	0.04853	"	1.3
1.4	"	0.01286	-0.06582	0.13854	0.05037	"	1.4
1.5	"	0.00951	-0.05814	0.11869	0.05097	"	1.5
1.6	"	0.00721	-0.04804	0.10333	0.04975	"	1.6
1.7	"	0.00565	-0.04303	0.09236	0.04805	"	1.7
1.8	"	0.00430	-0.03800	0.08149	0.04683	"	1.8
1.9	"	0.00353	-0.03407	0.07301	0.04560	"	1.9
2.0	"	0.00284	-0.03031	0.06505	0.04455	"	1.9
2.0	"	0.00228	-0.02813	0.05850	0.04197	"	2.0

