討　　　　議

土木學會誌　第十卷第四號　大正十三年八月

地震動に依る構造體の振動時相に就て

（土木學會誌第十卷第一號所載）

著者　會員　工學博士　眞　島　健　三　郎

震災に驚いて五十の手習を始めました小著に對し斯道の先進物部博士より討議を寄せられたるは私の光榮とする所であります、詳細なる御説明に依りまして高論の本旨を一層明瞭に解し得られ益する所尠からざる次第で深く御禮を申上げます、貴説の要點は結局下記三點に歸着すると考へられますから主として之につき鄙見を述べ御答と致します。

（１）　Direct force　でもなければ彈性力でもない地震動の如きが如何に彈性體に働くか。

（２）　彈性體振動時の中軸曲線形相。

（３）　彈性體振動式の解釋。

第一、地震動の樣なもので構造體の基點に働く力は先づ以て Medium たる振動體に彈性的歪曲を出し之に依つて發生する彈性力の働きが順次上方各點の運動となつて現はれるものであるから Direct force でもなければ彈性力でもない震力の如きは振動式には別に挿入の要はないと云ふ御意見の樣に察せられますが、私は此問題をそんなに六ケ敷考へて居ないのであります、元來各點の運動となつて現はるべき彈性的變形は已に何等かの力が各點に働き得た結果であつて原因ではないのであるから、斯の如き變形を生ずるには各點に豫め相當の反抗力がなければならん、之は則ち各點の慣性であつて振體の基點が動かんとすれば他の點は止まらんとするのであつて、基點と他の點との相對的位置の變化速度の Incrementに相當する慣性力が直に各點に加はり得るものと見て一向差支ないと思はれる、此時若し基點の運動を控除して考ふれば各點は斯る加速度で直に基點の運動との反對

方向に運動を開始し隨つて彈性的歪曲を出し玆に始めて彈性力を發生し基點の運動と同一方向に動かんとするのであるから、基點の運動則ち全體としての運動を控除して考ふれば殘は凡て相對關係であつて、各瞬斯の如き力が直に振體に働くのは恰も Direct force と何等變はりがないのであつて刻々振體の Potential energy をも增減し得る筈でありますから、下記の一般微分方程式からqの如きを省いたる

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+q+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot(a)$$

ものでは地震動關係は解決し得ない事になる一理由と考へるのであります、小著結論は主として斯んな考から出て居りますから、常に振體の兩側に同一の加速度を配して書いてあります、御討議に出て居る倒振子も私の引用したる限り前述の樣な理由で差したる不都合はないと考へられます。

第二　自己振動の形相と强迫振動の形相は相似形でないと云ふ御意見でありまして縷々數理的に御說明がありましたが、御說の根據たる振動式が純然たる自己振動式であつて地震の如き强迫振動を代表し得ないものとすれば、自然御意見は緩和さるゝものと考へられますが、夫れは次項に讓り本項では相似形であると云ふ私見を述ぶる事に致します、私は之を自明の理として扱つて居ないのであります、小著結論第五節を御覽下さらば不完全ではありますが相當詳細に說明して置いたつもりであります、要するに振相刻々の變化は第一項の理由で基點の運動を暫らく控除して考ふるには相對的位置の變化に外ならんのである、換言すれば自體の彈性的歪曲の增減であるから、之を研究すれば判る筈と思はれます、然るに各瞬斯の如き相對的位置の變化を起し得べき各點所要の加速度は常に運動の方向に其變位置に正比するものにあらざれば他と連繫し一體としての運動をなし得ないものであるは彈性體の特性として御異議のない所と思はれます、斯の如き齊一運動に依つて出づる振體の共通的形相は申迄もなく自己振動の場合と全然同樣であると考へらるゝのであります、要するに地震の如き强迫運動であつても自重の如きものであつても凡そ振動體自體の相對的關係として現はるゝ影響は自己振動形相として扱ふべきであると考へらるゝのであります、勿論自己振動の形相は無數であつて是等は混合して發生し得べき素質があるのですから、そんな場合は Fourier's Series でも借らなければ解けないのだらうと思はれますが地震動に依つて

刻々加はるべき彈性歪曲で最大彎曲力率を生ずるものは主振動であると考へられるから、假令ひ振體が高次の自己振動を併有する場合ありとするも地震の影響として各點の受くる加速度分布は主振動の形相に從ふが至當と思はれます、大體形相に就てはこんな風に解せらるゝので最大彎曲率は常に下底にあり又高次振動は考慮に及ばぬと云ふ結果になります。

第三、貴說に依りますと作用の原點が如何なる運動をなし如何なる力を働かすとも一向變はらぬ一般振動式は下記の通りでありまして前掲(a)式よりqを除いたものであります。

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0\quad\cdots\cdots\cdots(\mathrm{i})$$

上式は自己振動にも强迫振動にも適すると云ふ御意見であつて種々巧妙なる數理の御說明もあり、且つ高著（第五卷第三號所載）に對する御辨解もありますから、特に敬意を表し考へて見たのでありますが遺憾ながら當初の私見を飜へすべき有力なる理由を發見し得ないのであります、以下之を詳述し博士の御再考を煩はしたいのであります、上式は高著に依りますと振動體の或瞬間の內在彈性力と其點に於ける運動力を對照して得たるものであります、則ち該點の運動力として現はるべき力は該點に於ける彈性力の Increment であると云ふ事であります、隨つて此式に依つて代表さるゝ振動は動體の何れの點、何れの瞬間に於ても凡て此關係を有すべく限定されてあるから、其運動は常に自體に內在して居る彈性力の發動である故に始原に有する勢力以外他より何等の援助のないものであつて全然自己の能力で動くものでなければならん筈で勢力の總和は一定で各瞬增減のない純然たる自己振動を代表する式と考へらるゝのであります、其振動開始後は何れの點にも如何なる形式に於ても外力の加はるべき條項は含んで居ないのであります、依つて各點は終始一定の法則で動き勝手の行動は許されんのであります、御討議の(3)に於て(i)式のyを下式で現はし

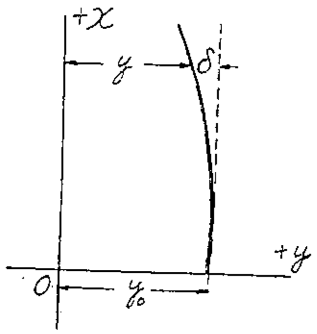
$$y=y_0-\delta\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{ii})$$

之れを(i)式に挿入すれば

$$\frac{\partial^4\delta}{\partial x^4}+C\frac{\partial^2\delta}{\partial t^2}=C\frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2}\quad\cdots\cdots(\mathrm{iii})$$

上式を得るとあるは明瞭でありますが、然しy_0が任意の運動を表はすとすれば(iii)

式と(i)式は沒交渉の式となります、何となれば若し(i)式か第一圖の如き振動狀態を代表し居るものとすれば(ii)と(iii)の兩式のy_0は他のyと同樣先づ(i)式の條件を滿足すべきであります、y_0は基點でありますが振體の一點であるから(i)式の拘束を免がれる譯に行かぬ、之を任意の他の運動と定める事はならん筈と思はれます、若し



第　一　圖

y_0を(i)式の條件に副ふべく(ii)式(iii)式に挿入すれば結局(i)式に還元するの外ないのであります、隨つてy_0に任意の條件を加へたる(iii)式は(i)式と何等因果關係のない一假想式で其振相は各點に$\partial^2 y_0/\partial t^2$なる加速度が働くものとなりますから、各點は$\delta$なる自己振動をなしつゝ全體としては$y_0$の運動をなすものと考へ得べき關係式であつて博士の下端のみに入れた條件が結局全體に加はり各點は其彈性力の現はれたる$\partial^2 y/\partial t^2$の外に$\partial^2 y_0/\partial t^2$を有する事になつて來る斯の如き假想式は Fernkraft が加はつたと同一のものでいくらも出來るのは不思議のない所であります、結局(iii)式は下の如く書換へる事が出來るのであります。

若し　$-C\dfrac{\partial^2 y_0}{\partial t^2}=q$　と置けば

$$\frac{\partial^4 \delta}{\partial x^4}+q+C\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}=0$$

上式は振動の一般式(α)に歸着しqは不用なりと云ふ貴說とは全然相入れないものとなります、然れども實際基點のみを任意條件で動かして誘起さるゝ運動を(iii)式の如きを以て現はし得るとは私は全然思はんのでありますが少くも始原條件以外他の加勢を得たる運動は其課點か基點であらうが、何れの點であらうが、g の如きを缺いたる(i)式では現はし得ないものだらうと考へられます、博士のqは元來 Mass に直接働くものを想定されたのかも知れませんがqは種々なる形で現はれ得るものと考へられるのであります、斯樣な見地から私は高著第十四節の强制振動を解して居るのであります、高著に依りますと(i)式の解は下の通り

$$y=X\ Y=\left\{\begin{array}{l}A\,(\cos\beta x+\cosh\beta x)+B(\cosh\beta x-\cos\beta x)\\+\,C(\sinh\beta x+\sin\beta x)+D\,\sinh\beta x-\sin\beta x)\end{array}\right\}\left(A\cos\frac{\beta^2}{\alpha}t+B\sin\frac{\beta^2}{\alpha}t\right)\quad\text{(iv)}$$

であつて之に挿入すべき强迫振動條件として博士の與ふるものとは下記の通りであります。

$$\text{at } x=0.\ \frac{\partial y}{\partial x}=0.\ B\ \text{及び}\ y=f(t)=\text{固定點運動。}$$

$$x=l\ \ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0\ \text{及び}\ \ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0.$$

上記中固定點の條件を任意に定めて居られますが、之は前述の次第て(iv)式の性質が許しません、恰も(i)式の下底に任意のy_0を入れて(iii)式を得たると同樣の不合理と思はれるのであります、若し作用の原點が如何なる運動をしても變はらぬ振動式とすれば下底の運動に往復運動でない假令へば$y_0=at$の如き時と共に增加する運動でも差支ない筈でありますが、之を(iv)式に入れんとするも入れ樣かないのであります、少くも往復運動でなければ貴說に適合しない事になる、(iv)式を見るに中軸の形相が何であらうが各點は常に一定の振期で單弦運動をなすべく限定されてあるから終始極相間を往復するのである、斯の如き運動をなすものは始原に一定勢力を有する自己運動以外ないと思はれるのであります、(iv)式のβは無數であるが無期限ではない之に任意の値を入れたる高箸第十四節の强迫振動式(22)は次の通りでありまして(iv)式に前記の條件を入れて得たものには相違

$$y=\frac{e}{2}\Big\{(\cos mx+\cosh mx)+\frac{1}{1+\cos ml\ \cosh ml}\times$$
$$[\sin ml\ \sinh ml\ (\cosh mx-\cos mx)$$
$$-(\cos ml\ \sinh ml+\sin ml\ \sinh ml)\ (\sinh ml-\sinh mx)]\Big\}f(t)\cdots\cdots(22).$$

ありませんが上述の樣な理由で(iv)式とは沒交渉であります、假りに(iv)と(22)式の關係は恰も(i)と(iii)式の如きであつて一種の强制振動を現し居るとすれば(22)式に依つて代表さるゝ運動は各點自己運動の外に下底と同一の加速度を以て常に强迫さるゝが故に振期一致の場合無限大相が現はれるは不思議とは思はれませんが元來下底の運動が唯一の元因として誘起する上部各點の運動に於て基點と同一加速度を感受し得るものは基點定着の剛性體に限る筈でありますから、之を彈性體に適用し彈性體自身の運動と共同せしめんとするが如きは不可能事と考へらるゝのみならず、(22)式が振期一致の場合博士の考ふる如く一Particular solution として强迫振相を代表するものとすれば少くも時間と共に極相の增大するものでなくてはならぬ、然るに(22)式は時間を超越して一足飛びに無限大相に到達

して居るのであつて之に有限の何ものを加ふるも有限相の現はれる譯はないと思はれます、畢竟斯の如き變體は本來兩極間を往復すべく約束されたる自己振動式に適合せぬ條件を挿入したる結果であろうと考へらるゝのであります、且つ又高著第十四節に兩者振期を異にする數例の算出結果を數表として掲げられたるのを見ると兩振期の接近する程極相は少くなつて居る或は違算か誤植かとも思はれますが御期待とは反して居ります、私が同期運動云々と申しましたのは下底が或運動をなして自己振動式を滿足し得るものは自由振相丈けであつて此自由振は勿論下底の條件として剪力を零としなければならんから地動を感受しないものであると云ふ意味で高著(22)式より直に得らると云ふ意ではありません、斯樣に考へらるゝので高著(22)式より强迫振相が得らるとは思はれんのであります、又其結果が實際に適合するとは認め兼ぬるのであります、要するに本問題の關鍵は下底の運動が如何に彈性體の上部に加はり得るかを明かにするにありと思はれます、之は小著及び第一第二項で述べました樣な私見であつて博士の御考へは或は凡てを彈性的歪曲のみで解決しようとせらるゝのであるまいか、夫れでは慣性を無視した事になりはせんかと思ふのであります。

枝葉の問題ではありますが中軸曲線と振期に關する私の方法は貴說の通り勿論近似的で且つ容易でないと思はれます、然し今日の構橋の如きが多く Panel load として扱つて居る所から見ると精粗の程度は先づこんな風に假定するの外ないのかと思はれます、若し理論的に申しますと中軸曲線も振期も各體特有なものであるから之を他の一定曲線で現はすのは不合理である、尤も振期は狹き範圍ですから博士の方法で至極結構と思はれますが、私の場合は地震の影響を合理的に論ずる必要上中軸曲線の形相の精粗は別として合理的に解く要を認めましたから之を得んとするのが主なる目的であつて振期は副產物であります、貴說の通り私の方法は勿論數箇の聯立方程式を解かねばなりませんが、曲線の形相は常に相似形でありますから、求むる所の或點の歪曲を豫め定めてかゝれば同時に振期をも得らるるのは小著結論第六節及び第七節に書いてある通りであります、更に正確に論ずれば私の方法で得らるる振期の數は方程式の數丈出て來る筈であります、則ち小箸緒論第七節の(4)式より $\delta_c, \delta_d \cdot\cdot \delta_b$ を消去すれば下式を得ます。

$$\left.\begin{array}{lll} (kmn\delta_{cc}-n), & kmn\delta_{cb}, \cdots\cdots\cdots & kmn\delta_{cb} \\ kmn\delta_{dc}, & (kmn\delta_{dd}-n) \cdots\cdots\cdot & kmmn\delta_{db} \end{array}\right\} = 0$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \cdots & \cdots & \cdots \\ kmn\delta_{b2} & kmn\delta_{bb}\cdots\cdots & kmn\delta_{bb}n \end{array}\right|$$

之から算出すれば想定條件に合致する振期が得らるゝ筈であります、私の考へ得たる中軸曲線の一般解法はこんなものでありますが、尙一層簡易で合理的なる方法は本問題の實用化に大なる效果があると思はれますから、御明案もあらば切に御披露を願つて置きます。

最後に私の出發致しました方程式は最近御發表になりました橋梁振動の式と貴說の通り同性質のものであります、唯此の式に到達する博士の御考と私の考には可なり距離のあるのは甚だ遺憾であります、又私が(5)式より(18)式に到る面倒を見ましたのは一見甚だ愚でありますが成べく一般的に解決し然る後特殊な場合に進んだ經路であります、實は相當整理して出すべきでありますが大分齡を取りまして其勇氣もなく經路其儘を曝け出して置けば誤謬も發見し安く可然御訂正が仰がれると思ふた譯であります、御注意有難う存じます。

御討議に對する鄙見は大要上述の通りで私の方法が振期一致の場合の外適合しないと云ふ主たる御意見が振動式の誤解に基くと思はれますので或は却つて適合して居るのでなからうかと思はれるのであります、何れにしても振動物理學に無接觸な老人の作で飛んだ間違が多からうと思はれます、更に御調査を願ひたいのであります、要するに本問題は今日の場合急速に解決せざれば耐震構造を論議しても無益と思はれますから老大家も新進の士も本討議に御加はり下さるなり或は別途の方法で御意見を宣せられ多數の力で適當の解案が得たいのであります、終に臨み深く博士の勞を謝し、併せて頭腦明晰年齡壯にして篤學なる博士が更に本問題に對し貢獻あらん事を切に望んで止まぬ次第であります。(完)