

# 論 說 報 告

土木學會誌 第十卷第一號 大正十三年二月

## 橋桁の振動並に其の衝擊作用 との關係に就て

會員 工學博士 物 部 長 穂

### 内 容 梗 概

本編は走行荷重の爲めに生ずる週期的外力と橋桁の固有振動との關係を理論的に研究し更に荷重に依る桁の振動の累積より衝擊作用を理論的に解き其極大値を算定する方法を述べ算出の結果を實驗と對比したるものなり

	目 次	頁
第一節	橋桁の振動に関する研究の必要並に其發達	1
第二節	單支桁(Simply supported beam)の振動	4
第三節	桁の彎曲線 (Deflection curve) に依りて振動週期を算定する 方法	6
第四節	橋桁の慣性能率	7
第五節	鉸桁の振動週期に對する著者の公式	14
第六節	構桁の振動週期に對する著者の公式	16
第七節	公式適用の例	18
第八節	機關車働輪の過平衡對重	20
第九節	橋桁の振動か外力の週期と共鳴する場合の振動の累積	22
第十節	桁と外力との週期か異なる場合の振動の累積	27
第十一節	橋桁に於ける振動累積の算定	30
第十二節	桁の振動に對する諸種の抵抗	41

### 第一節 橋桁の振動に関する研究の必要並に其發達

現今橋梁の技術は急足の進歩發達を成しつつありて至難の問題の一と目せられたる抗壓材の強度に關しても近年實大の試験體を製作して大規模の強度試験を實行せし結果多少其耐力の真相を明かにし得たり然るに尙一層重大にして而も其解

決更に困難なる問題は動荷重の衝撃作用にして其性質複雑多様に亘り橋桁の構造寸法自重及活荷重の性質等に依りて相異なるを以て其研究頗る困難なり今日迄行はれたる實驗研究は頗る多數に上り就中米國鐵道協會に於ては多數の學者技術者を委員とし1907~1908兩年に亘りて鐵道橋の衝撃作用に關する大規模の實驗觀測をなし其結果をProceeding of the Twelfth Annual Convention of the American Railway Engineering and Maintenance of Way Association, 1911. に發表せり抑も衝撃作用の主要なる部分は勿論荷重の運動に因りて生ずる橋桁の振動に基つく所にして之を徹底的に研究せざるに於ては衝撃作用を解決する事困難なり斯故に橋桁の振動は既に多數の學者に依りて實驗研究せられ其結果の發表せられたるもの亦頗る多數に上れり然れども此等の多くは唯數種の桁に就きて測定を行ひ之に依りて直に一般的通則を求めんとせるものにして之を理論的研究と並行せしめ以て研究の普遍性を得るにあらざるは徒に勞多くして效之に伴はず米國鐵道協會に於ては稍此點に留意し橋桁の振動週期を算出し之と荷重の運動より起る週期的外力との關係を對照せり然れども其算出法は頗る不便なるものにして而も實測の結果と理論との關係に對しては何等の説明を與へず爲めに研究の普遍性を全からしむる能はざりき依て著者は本編に於て橋桁振動の理論的研究を試み振動週期の算定に對して便利なる新方法を提按し更に進んで週期的外力の影響を説明せんと試みたり之に先立ち橋桁の振動に關する從來の研究中主要なるものを略說せんとす

(一) S. W. Robinson 氏の研究 氏が Transaction of the American Society of Civil Engineers, 1887, Vol. XVI p. 43-65 に發表せる所にして氏は三十種の鐵道橋に就て 193 回の實驗を行ひしが其多數は列車通過に依る橋桁振動の累積現象を現はし之に依て生ずる衝撃は 18.4%乃至 50%に及べり而て氏は橋桁の振動及び彈機に支持さるる車體の振動とを各理論的に論究し累積現象の多くは格間の長さ と密接なる關係を有する事を論せり

(二) M. Deslandres 氏の研究(Annales des Ponts et Chaussées, 1892. Vol. ii p. 765)氏は徑間 30.3 米の鋼製道路橋に就きて振動の現象を研究し一輛の馬車が橋桁の固有振動週期と同一なる步調を以て橋上を走過する場合に非常に大なる累積作用を生ずる事を示し尙振動週期の算出に對し理論的公式を與へたり

(三) M. Rabut 氏の研究 (Le Genie Civil, 1892 Vol. xxii p. 88—) 此の研究は鐵橋の撓みに關するものにして氏は荷重の走過速度低き場合に於ては橋桁に一定

の固有振動週期ありて荷重の量に依りて著しき變化なきも走過速度急なる場合にありては桁の振動週期は荷重の速度、列車車軸の間隔と桁格間との關係等に支配さるる事を述べ長徑間の桁に於ては部材の應力に對する振動の影響は割合に小なる事を指摘せり

(四) J. Melan 氏の研究 (Zeitschrift des Oesterreichischen. Ingenieur und Architekten Vereines. 1898. p. 293) 氏は走行荷重の衝撃作用を理論的に研究せり然れども著者は不幸にして此原本を得る能はざりしを以て茲に其内容を紹介する能はざるを遺憾とす

(五) A. Pownal 氏及び John Milne 氏の研究 (Engineering, 1896. Vol. IXI, p 111—) 舊六郷川鐵道橋に就き振動を實測し衝撃は必ずしも列車の速度大なる程大なるにあらずして橋桁に對して一定の危險速度(Critical speed) ある事を指摘せり

(六) F. E. Turneure 氏の研究 (Transaction of the American Society of Civil Engineers, Vol. XII, p. 410—) 此研究は橋桁に對する走行荷重の影響に關するものにして振動の累積は機關車の對重 (Counter weight) に因る事を明説し且つ車輛の通過に際して最大振動を生ずる場合も往々あり此の場合には格間は殆んど車輛の長さの二分の一に當れる事を述べたり

(七) M. Rabut 氏の研究 (Annales des Ponts et Chaussées, 1901. Vol. 3 p. 123—) 此研究は荷重に依りて橋桁に生ずる實際の應力に關するものにして桁が荷重を受くる時撓みを生じて曲線の軌道となり車輪が其上を高速度を以て通過する時は遠心力を生じて著しき衝撃を與ふることを指摘し且つ衝撃は鐵道橋に於ては主として激衝 (Shock) に因り道路橋に於ては主として振動の累積に依る事を論定せり而て鐵道橋に於て激衝を與ふる原因は主に (一) 軌條の繼手 (二) 車輪の Flat spot 等なりと説けり

(八) 米國鐵道協會の研究 (Proceeding of the American Railway Engineering and Maintenance of Way Association, Vol. 12 part 3, p. 13—) 本研究は最も多數の實驗を具備せるものにして各種の橋桁及荷重に亘りて 1,835 の實測を行ひ桁の撓度及び各部材の衝撃作用と荷重其速度等の關係を論じ適當なる衝撃係數を提案せるものなり

(九) 田邊工學博士並に大森理學博士の研究 本邦に於ては兩博士が橋梁振動の形態に關して多年の實驗を積まれ本邦鐵道橋の振動に關する多量の材料を供され

たり

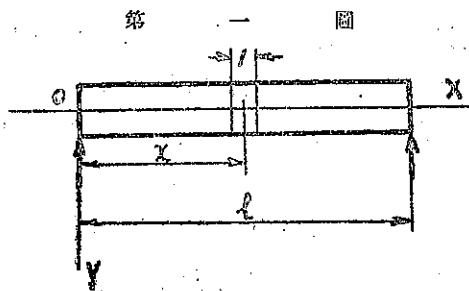
橋桁の振動に關する理論的研究の多くは桁の斷面及び重量共に一様等布なりと假定せるを以て其の與ふる振動週期は實測値に比し著しき誤差あり其他のものにありては荷重に依る桁の撓みを一々計算し之を用ひて初めて振動週期を求め得るを以て其煩雜なる言を俟たざる所にして著者は次節以下に於て先づ橋桁の振動週期の算定法を求めんとす

### 第二節 單支桁(Simply supported beam)の振動

普通の橋桁は其兩端に於て支持され其一方は位置の變動せざる様支臺に固定されるも桁軸が其端に於て方向を變じ得る様即ち端に於て彎曲力率に耐抗せざる如き構造となし他の一方に於ては通常轆子に乗り又は承板上に滑動して端の變位を自由ならしめ以て下弦の伸縮に備へたり即ち此等の桁が振動する場合には兩端は上下に移動することなきも其軸の方向を變じ得るを以て彎曲力率は作用せず今振動しつゝある桁に於て一端0より $x$ なる距離に在る單位長の總重量を $\rho\omega$ (茲に $g$ は重力加速度  $\rho\omega$ は彎曲力率に耐抗する桁の部分及其他凡て桁と共に運動する部分の質量の總和)とし $I$ を彎曲力率に耐抗する斷面の慣性能率 $E$ を其材料の彈性率とすれば運動の方程式は(第一圖參照)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) + \rho\omega \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

而して $I$ 及び $\rho\omega$ が桁の全長を通じて一樣ならざる場合は上式を理論的に完全に



第一圖

解決する事は頗る困難なり然るに斯の如き場合に勢力が長さの方向に移動する事を無視すれば方程式を著しく單化し得べく以て問題の略解を求むる事を得べし長さの方向に勢力の移動なき時は振動を論ずるに當りて微區間に就きて運動の方程式を解けば足る今 $x$ なる距離に於ける

微區間 $\delta x$ を考へ其勢力を現はすに

$$\text{位置の勢力} = \delta E_p = \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \delta x$$

$$\text{運動の勢力} = \delta E_k = \frac{1}{2} \rho\omega \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \delta x$$

然るに振動に對する諸種の抵抗を無視する時は桁全體の有する勢力は不變なるを以て

$$\frac{1}{2} \int_0^l EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l \rho \omega \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx = \text{Constant}$$

次に勢力の長さの方向に移動せざるものと假定すれば微區間  $\delta x$  に對しても亦同様の關係を得 即ち

$$\frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 \delta x + \frac{1}{2} \rho \omega \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \delta x = \text{Constant}$$

今各區分の運動を單一振動なりと考ふれば

$$y = u \sin pt$$

$$\therefore \delta E_p + \delta E_k = EI \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 \sin^2 pt + \rho \omega p^2 u^2 \cos^2 pt$$

區分の有する勢力は不變なるを以て  $\frac{\partial}{\partial t} (\delta E_p + \delta E_k) = 0$  故に

$$p \times 2EI \left( \frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 \sin pt \cos pt - 2 \rho \omega p^3 u^2 \sin pt \cos pt = 0$$

$$\therefore \frac{d^2 u}{dx^2} = \pm pu \sqrt{\frac{\rho \omega}{EI}}$$

然るに最も長き週期の振動に於ては  $u$  と  $d^2 u / dx^2$  とは符號相反するを以て右邊は負符號を採るを要す 即ち

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -pu \sqrt{\frac{\rho \omega}{EI}} \dots \dots \dots (1)$$

此二級微分方程式の一般的解は

$$u = A \sin mx + B \cos mx, \quad m^2 = p \sqrt{\frac{\rho \omega}{EI}}$$

茲に  $A$  及び  $B$  は共に常數にして次の二條件によりて定まる

i,  $x=0$  に於て運動なきを以て  $u=0$

ii,  $x=l$  に於て運動なきを以て  $u=0$

故に  $B=0$  及び  $A \sin ml=0$  故に  $m$  の最小の値は

$$ml = \pi$$

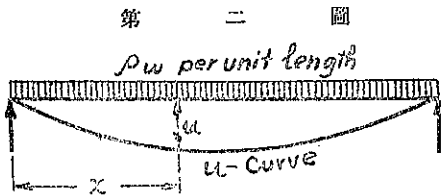
故に最も長き週期  $T$  は

$$T = \frac{2\pi}{p} = \frac{2}{\pi} l \sqrt{\frac{\rho \omega}{EI}} \dots \dots \dots (2)$$

是即ち單支桁の主振動の週期を與ふる公式なり

### 第三節 桁の彎曲線 (Deflection curve) に依りて振動週期を算定する方法

今  $\rho\omega g$  なる等布荷重を積載する桁が振動する場合に靜力的平衡の位置よりの桁の各點の最大撓度を  $u$  を以て現はす時は各點の振動の振幅は  $2u$  なり今振動の極限位置即ち各點が平衡の位置より  $u$  だけ變位したる場合には速度は零にして運動の勢力を有せずと雖も位置の勢力は最大にして此場合桁全體の有する勢力は (第二圖参照)



$$E_p = \frac{\rho\omega g}{2} \int_0^l u dx$$

之と反對に靜力的平衡の位置に於ては位置の勢力は皆無なるも運動の勢力最大にして其値は

$$E_k = \frac{\rho\omega}{2} \int_0^l (\dot{u})^2 dx, \quad p = \frac{2\pi}{T}$$

故に桁の有する全勢力を不變なりとすれば

$$E_p = E_k \quad \text{即ち} \quad \frac{\rho\omega g}{2} \int_0^l u dx = \frac{\rho\omega}{2} p^2 \int_0^l u^2 dx$$

$$\therefore p^2 = \frac{g \int_0^l u dx}{\int_0^l u^2 dx} \dots \dots \dots (3)$$

若し  $\rho\omega$  一様ならざる時は

$$p^2 = \frac{g \int_0^l \rho\omega u dx}{\int_0^l \rho\omega u^2 dx} \dots \dots \dots (4)$$

故に任意の桁に於て其質量の分布及び彎曲線を知れば振動週期を算定する事を得べし例へば  $\rho\omega g$  なる等布荷重を有する時は (Morley's "Strength of Material", p. 450 参照)

$$u = \frac{\rho\omega g}{24EI} (x^4 - 2lx^3 + l^2x)$$

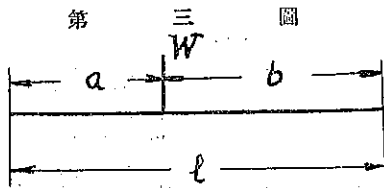
$$\therefore p^2 = 97.55 \frac{EI}{\rho\omega l^4}, \quad \therefore T = \frac{l^2}{1.572} \sqrt{\frac{\rho\omega}{EI}} \dots \dots \dots (5)$$

然るに前節に於て計算せし所に依れば 1.572 に代ふるに  $\pi/2$  即ち 1.571 にして殆んど同一結果なり

次に 0 より  $a$  の距離に  $W$  なる單一荷重の存する場合は (第三圖参照)

$$u = \frac{W a^2 b^2}{3EI}$$

にして週期  $T$  は



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{W a^2 b^2}{gl 3EI}} \dots \dots \dots (6)$$

次に等布荷重  $w$  及び桁の中央に集中荷重  $W$  を有する場合の振動週期を掲ぐれば

$$T = \frac{\pi}{2} l^2 \sqrt{\frac{w + \frac{17}{35} w}{3EIg}} \dots \dots \dots (7)$$

次に任意の位置に多数の集中荷重を有する場合は

$W_1, W_2, W_3 \dots \dots \dots$  を荷重とし

$T_1, T_2, T_3 \dots \dots \dots$  を夫々  $W_1, W_2 \dots \dots \dots$  の一を负载する場合の

桁の振動週期とすれば

$$T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + \dots \dots \dots} \dots \dots \dots (8)$$

故に公式(5)に依りて  $T_1, T_2 \dots \dots \dots$  を算出すれば  $T$  を見出す事を得べし

#### 第四節 橋桁の慣性能率

單桁に於て各點に作用する最大彎曲力率は一般に徑間の中央を通る鉛直線を軸とする拋物線を以て其の變化を現はす事を得例へば(第四圖参照)

$l$  = 桁の徑間

$x$  = 桁の中央よりの距離

$w$  なる等布荷重の場合

$x$  點に於ける最大彎曲力率

$$M_x = \frac{w}{2} \left( \frac{l^2}{4} - x^2 \right)$$

$x$  點に集中荷重  $P$  を有する場合

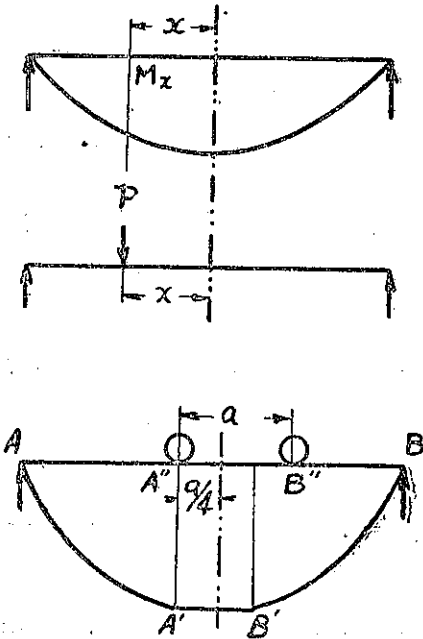
$$M_x = P \left( \frac{l}{4} - \frac{x^2}{l} \right)$$

二軸よりなる車輛荷重を有する場合

絶對最大彎曲力率は

$$M_{\frac{a}{4}} = \frac{P}{2l} \left( l - \frac{a}{2} \right)^2$$

第四圖



にして任意の點 $x$ の最大彎曲力率は  $A'$   $A''$  を軸とし  $A'$  及び  $A$  を過ぎる拋物線を以て現はさる而て桁の抵抗力率を決定すべき彎曲力率は活荷重に依るものと死荷重に依るものとの和にして略拋物線を以て現はし得べし次に實際使用さるる橋桁に就て慣性能率  $I$  の配置を求むるに

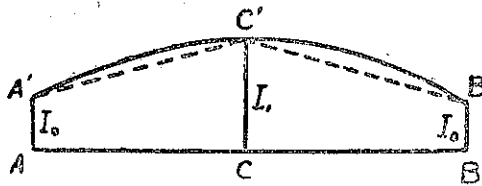
(I) 鉄桁の慣性能率及死荷重の配置

鉄桁の慣性能率は兩端より中央に向つて次第に増大するを通則とし其變化は中央に於ける鉛直線を軸とする拋物線又ハ中央に於て交叉する二直線を以て略之を現はす事を得(第五圖参照)

今一例として Cooper's E-33 に對する鐵道省の舊標準鉄桁徑間六十呎(62'~1

0" e. to e. of bearing) に就て慣性能率を算出するに

第五圖



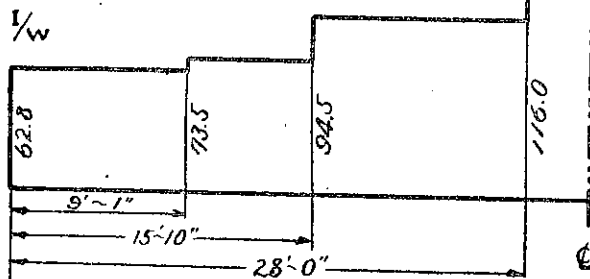
端よりの距離

0 9'~1" 15'~10" 28'~0"

$I$  (in<sup>4</sup>).

53,400 62,500 80,300 98,100

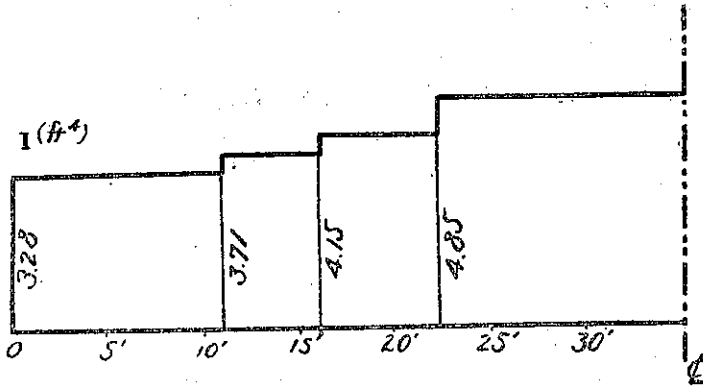
第六圖



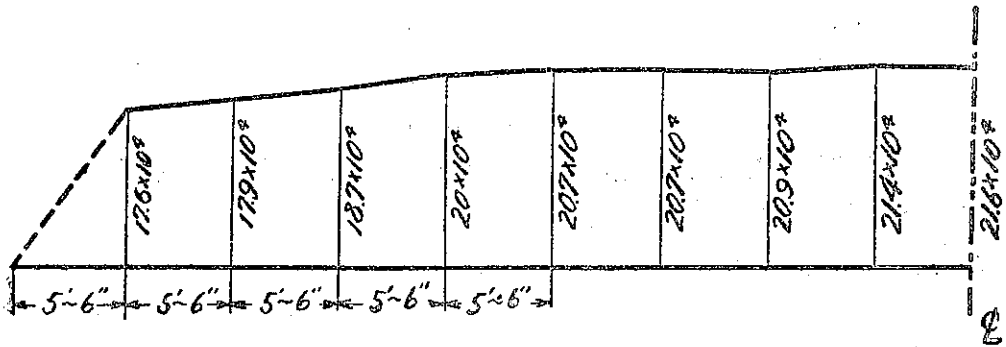
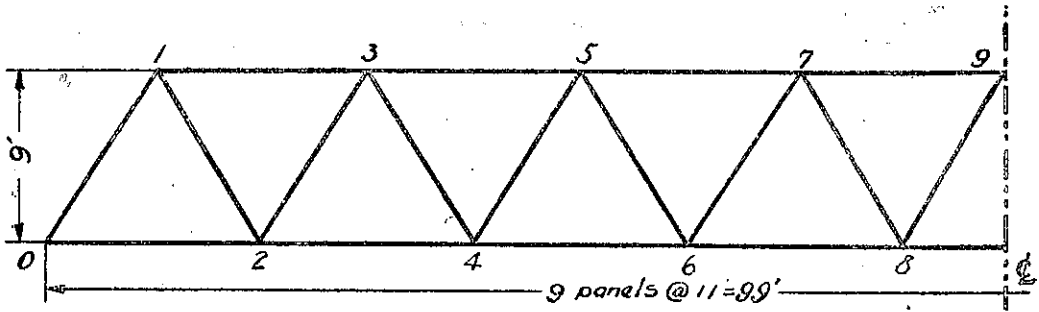
次に死荷重の配置を見るに軌道の重量は等布にして主桁の重量は端より中央に増大し耐風構補剛材(Stiffener)等の重量は端より中央に減少し結局中央に於て端に於けるものより約一割内外大なるに過ぎず依て  $I/w$  の變化も亦  $I$  の場合と同様な拋物線又は交叉する二直線に依りて略之を現はし得べし次に二三



第七圖



第八圖



第九圖

の例に就きて  $I$  の變化を算出すれば

(一)鐵道省舊標準六十呎鉸桁(第六圖參照)

一桁に對するものにして單位は吋<sup>4</sup>とす

(二)米國鐵道協會橋桁衝擊試驗の橋桁第二十五號七十呎鉸桁礫床 E—44 (第七圖參照)

(一桁に對して)

端よりの距離	0	11'~3"	16'~3"	22'~4"
$I(\text{in}^4)$	$3.28 \times 12^4$	$3.71 \times 12^4$	$4.15 \times 12^4$	$4.85 \times 12^4$

(II)構桁の慣性能率及び  $I/w$  の配置

構桁に於ては端に於て慣性能率は多く零なり今實際の構桁に就て慣性能率 ( $I$ ) 及び夫れと死荷重との比  $I/w$  を算出せるに次の如し(凡て一桁に對するものなり)

(一)セオドル・シヤン氏設計の百呎ワーレン構

此桁は從來我國鐵道に於て廣く使用されたるものなり(第八及第九圖參照)

位 置	慣性能率( $\text{in}^4$ )	構材重量の割合
0	0,	58.2
1	$2 \times 8.8 \times 10^4$ ,	77.02
2	$2 \times 8.94 \times 10^4$ ,	87.46
3	$2 \times 9.35 \times 10^4$ ,	89.08
4	$2 \times 10 \times 10^4$ ,	93.30
5	$2 \times 10.37 \times 10^4$ ,	91.76
6	”	85.92
7	$2 \times 10.45 \times 10^4$ ,	85.76
8	$2 \times 10.7 \times 10^4$ ,	84.70
9	$2 \times 10.82 \times 10^4$ ,	85.48

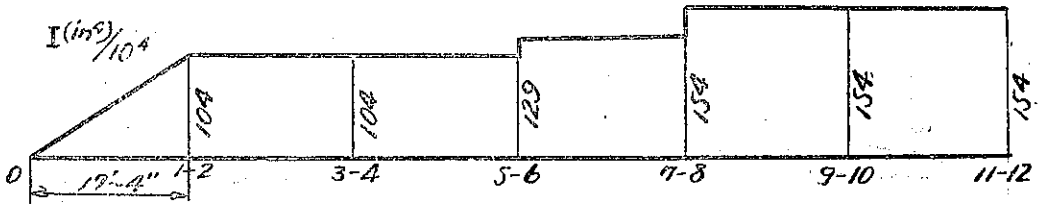
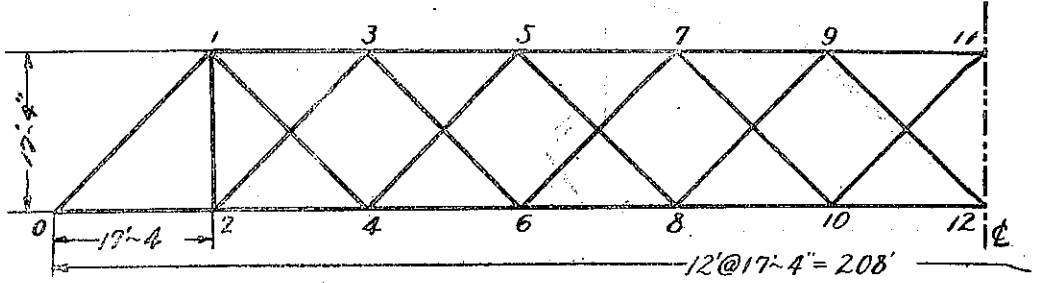
此桁は下弦材の上に直ちに牀桁を取付けたるを以て各格間の重量の配置も亦特殊にして其最大なるは徑間の四分の一附近にあり

(二)舊日鐵型百呎ダブル・ワーレン構(第十圖參照)

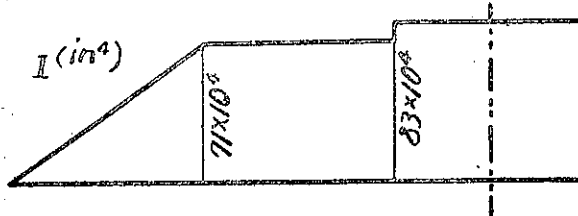
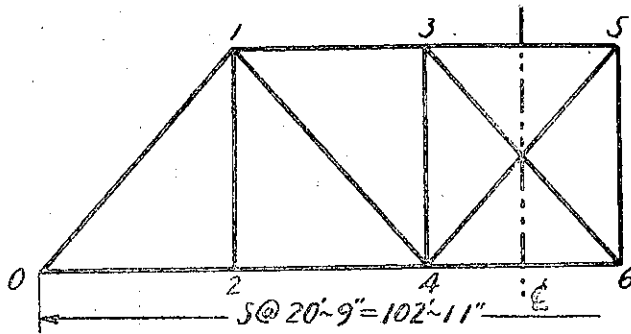
位 置	0	1	3	5	7	9	11
$I/10^4(\text{in}^4)$	0	104	104	129	154	154	154

(三)鐵道省舊標準桁徑間百呎米國 Cooper 氏及び Schneider 氏設計動荷重 Cooper's

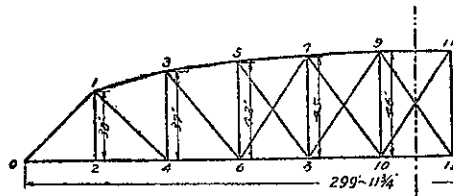
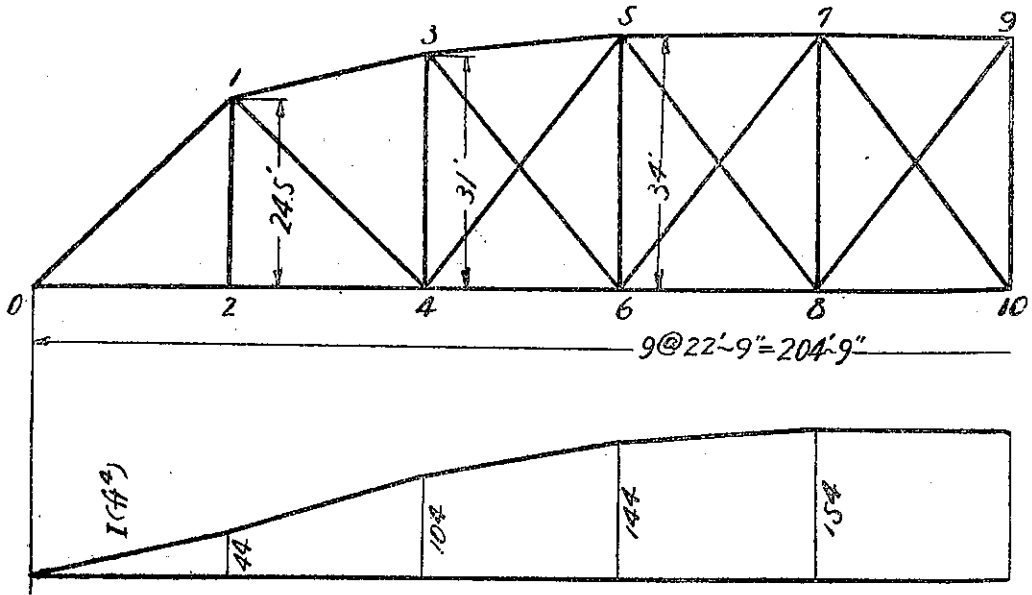
第十圖



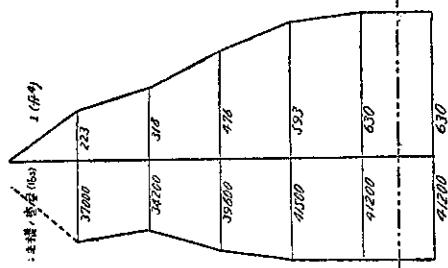
第十一圖



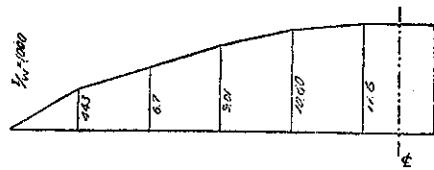
第十二圖



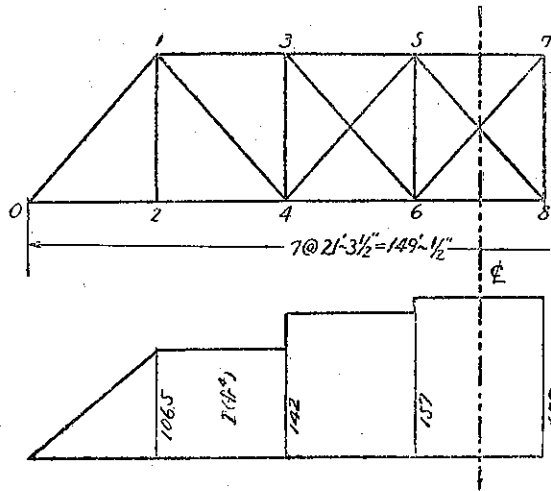
第十三圖



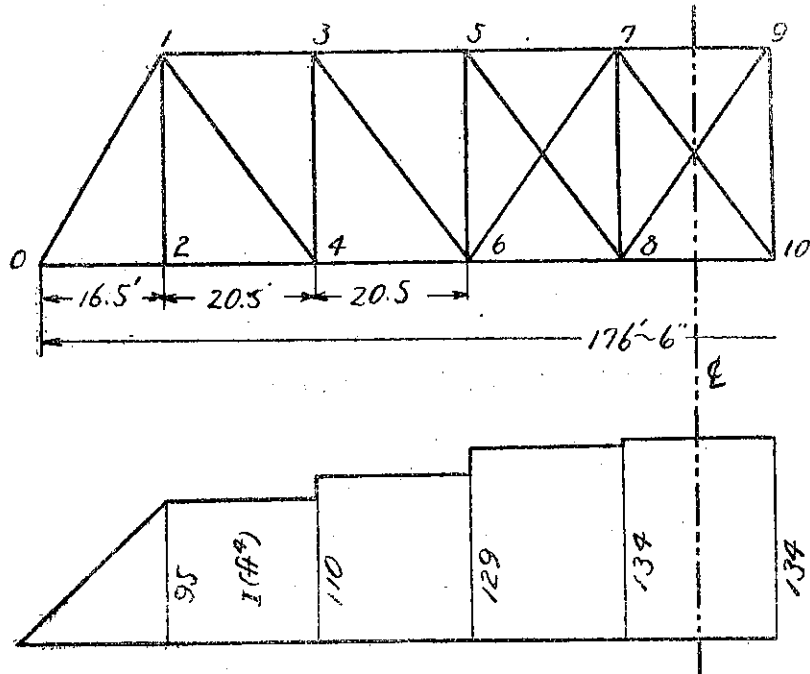
第十四圖



第十 五 圖



第十 六 圖



E-33(第十一圖参照)

(四)同上徑間200呎 1 徑間の重量 145.2噸(第十二圖参照)

而て構の各部の重量の分布を見るに端格間 16,963呎中央に於て 16,600呎なり即ち主構及び上下耐風構の分布は端と中央に於て略同一なり而て牀材及軌道の重量は勿論等布なるを以て全體として死荷重は各格點に於て同一なりと見做す事を得

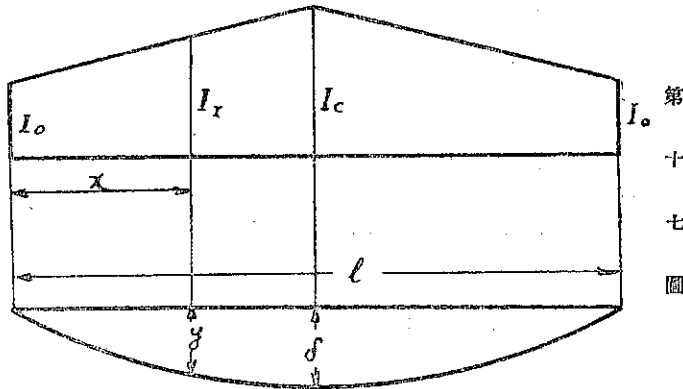
(五)米國鐵道協會檢測構桁第26號(第十三圖参照)

徑間299呎11吋3/4

次に耐風構其他の重量を計算して格點死荷重を求め以て  $I/w$  を算出すれば第十四圖に示すが如し

(六)同上第24號徑間 149 呎 1/2 吋 E-44荷重(第十五圖参照)

(七)同上第12號徑間 176 呎 6 吋 斜構 E-50荷重(第十六圖参照)



第十七圖

### 第五節 鈹桁の振動週期に對する著者の公式

鈹桁に於ては  $I$  の分布は中央に於ける  $I$  の値と端に於ける夫とを結ぶ直線を以て近似的に之を表はし得べし(第十七圖参照)而て死荷重は略等分なるを以て  $I/w$  も亦同様の線を以て其變化を現はし得

今左端を坐標の原點とし  $x$  點の撓みを  $y$  中央に於ける夫れを  $\delta_1$  活荷重は凡て等布なりと假定して長 1 呎に付  $p$  呎とすれば

$$I = I_c \left( 1 - \alpha \frac{2x}{l} \right) \quad \text{茲に} \quad \alpha = 1 - \frac{I_0}{I_c}$$

$$y = \iint \frac{M}{EI} dx dx, \quad M = \frac{p}{2} x (l - x)$$

$$\therefore y = \frac{pl^4}{8I_c E} \int \frac{dx}{l} \int \frac{\frac{2x}{l} \left(2 - \frac{2x}{l}\right)}{-\alpha \frac{2x}{l}} \cdot \frac{dx}{l} = \frac{pl^4}{8I_c E} \cdot \eta \quad (\text{と置く})$$

然るに撓める位置に於て桁の有する位置の勢力  $E_p$  は

$$E_p = \int_0^l \frac{p}{2} dx \cdot y = \frac{p}{2} \int_0^l y dx$$

振動に際し桁軸が  $+y$  なる位置に於て有する運動の勢力  $E_k$  は

$$E_k = \int_0^l \frac{1}{2} \cdot \frac{w+p}{g} v^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{w+p}{g} \int_0^l v^2 dx$$

今振動の週期を  $T$ (秒)とすれば該位置に於て有する速度は

$$v = \frac{2\pi y}{T} \quad \text{なるを以て}$$

$$E_k = \frac{w+p}{g} \cdot \frac{2\pi^2}{T^2} \int_0^l y^2 dx$$

$$\therefore T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot \frac{w+p}{p} \cdot \frac{p}{8E} \cdot \frac{l^4}{I_c} \cdot \frac{\int_0^l \eta^2 dx}{\int_0^l \eta dx}$$

今  $\alpha$  の種々の値に對して  $\int_0^l \eta^2 dx / \int_0^l \eta dx$  の値を算出すれば依て以て  $T$  の値を算定し得べし故に  $\alpha$  の値の 0 (即ち均等断面) 0.2, 0.4, 0.6 及び 1.0 (即ち端に於て  $I/w$  の値の零なる場合) 等に對し此の値を算出せんとす

- |                     |  |
|---------------------|--|
| 1. $\alpha=0$ の場合   | $\int_0^l \eta^2 dx / \int_0^l \eta dx = 0.0825$ |
| 2. $\alpha=0.2$ の場合 | „ „ = 0.092                                      |
| 3. $\alpha=0.4$     | „ „ = 0.116                                      |
| 4. $\alpha=0.6$     | „ „ = 0.148                                      |
| 5. $\alpha=1.0$     | „ „ = 0.445                                      |

今  $\int_0^l \eta^2 dx / \int_0^l \eta dx$  を  $\lambda$  と置けば

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{8g} \lambda^4 \frac{w+p}{EI_c}$$

$$\therefore T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{8gE} \lambda} \cdot l^2 \sqrt{\frac{w+p}{I_c}}$$

今  $\sqrt{\frac{4\pi^2}{8gE} \lambda}$  を  $c$  と置き  $\alpha$  の種々の値に對して  $c$  を算出すれば

$\pi = 3.142$	$g = 32.2$ 呎/秒 <sup>2</sup>	$E = 30 \times 10^3 \times 144$ 呎 <sup>2</sup> /平方呎			
$\alpha = 0.0$	0.2	0.4	0.6	1.0	
$\lambda = 0.0825$	0.092	0.116	0.148	0.445	
$c = 1.71 \times 10^{-6}$	$1.81 \times 10^{-6}$	$2.03 \times 10^{-6}$	$2.30 \times 10^{-6}$	$3.82 \times 10^{-6}$	

$\alpha$  と  $c$  との關係を圖表を以て示せば附圖第一の如し  
米國鐵道協會に於て提案せる桁振動週期の公式は

$$T = \sqrt{\frac{w+p}{p} d_1}$$

茲に  $d_1$  は等布荷重  $w+p$  に對する桁中央の撓みにして實際に計算するか又は載荷して實測するを要するものにして頗る不便なり而已ならず上式を得る爲めには  $\int_0^l y^2 dx / \int_0^l y dx$  を近似的に  $0.8d_1$  と假定せるものにして實際の計算に依れば

$\alpha =$	0.0	0.2	0.4	0.6	1.0
$\int_0^l \eta^2 dx / \int_0^l \eta dx =$	0.0825	0.092	0.116	0.148	0.445
$d_1 = d_0 \alpha$	0.1034	0.1106	0.1471	0.1893	0.601
$\int_0^l y^2 dx / \int_0^l y dx =$	0.80	0.83	0.79	0.78	0.74

なり

振動週期を與ふる著者の公式は鉸行に對し

$$T = c l^2 \sqrt{\frac{w+p}{I_c}} \dots \dots \dots (9)$$

にして端及中央に於ける慣性能率を算出し  $I_c$  及  $\alpha$  を得れば公式(9)及附圖第一の  $c$  に依りて直ちに振動週期を算出する事を得べし

### 第六節 構桁の振動週期に對する著者の公式

端に於て桁の高さ零なる構桁に於ては半徑間各點の慣性能率の變化は大體

$$I = ax^b$$

なる高次拋物線を以て現はす事を得べく茲に坐標の原點は左端に在りて  $a$  及び  $b$  は懸案の桁の寸法に依りて定むべきものなり(第十八圖參照)而て左端より第一番目の格點に於ける慣性能率  $I_n$  及び中央に於ける  $I_c$  を以て  $a$  及び  $b$  を決定すれば振動週期を算定する上に於て最も適當なり即ち格間數を  $n$  とすれば

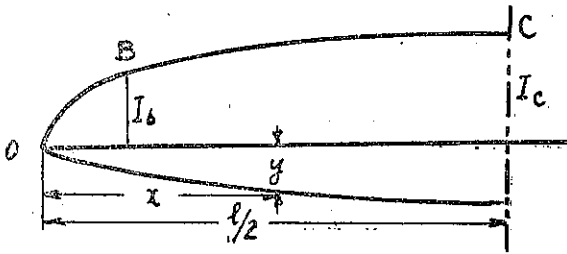
$$I_c = a \left( \frac{l}{2} \right)^b \quad \therefore a = \left( \frac{2}{l} \right)^b I_c$$



$$I_b = a \left( \frac{l}{n} \right)^b \quad \therefore \left( \frac{n}{2} \right)^b = \frac{I_c}{I_b}$$

$$\therefore b = \frac{\log \frac{I_c}{I_b}}{\log \frac{n}{2}}$$

第十 八 圖



今等布荷重  $p$  に依りて  $y$  なる撓みを生じたりとすれば

$$y = \iint \frac{M}{EI} dx \cdot dx$$

$$= \frac{1}{E} \int dx \int \frac{M}{I} dx$$

然るに

$$M = \frac{p}{2} x(l-x), \quad I = ax^b \text{ なる}$$

るを以て

$$y = \frac{p}{2E} \cdot \frac{1}{a} \int dx \int_0^x \{ lx^{1-b} - x^{2-b} \} dx$$

然るに

$$\int_0^x dx \int_0^x \{ lx^{1-b} - x^{2-b} \} dx = \left\{ \frac{lx^{3-b}}{(2-b)(3-b)} - \frac{x^{4-b}}{(3-b)(4-b)} + Cx \right\}_0^x$$

今桁を中央に對して對稱なりと考ふれば  $x = \frac{l}{2}$  に於て  $\frac{dy}{dx} = 0$  なるを以て

$$C = - \frac{l^{3-b}(4-b)}{(2-b)(3-b)2^{3-b}}$$

$$\therefore y = \frac{-p}{2aE(2-b)(3-b)(4-b)} \left\{ (4-b)lx^{3-b} - (2-b)x^{4-b} - \frac{l^{3-b}x(4-b)^2}{2^{3-b}} \right\}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{l}{2}} y^2 dx = \left\{ \frac{p}{2aE(2-b)(3-b)(4-b)} \right\}^2 \frac{l^{2p-2b}}{2^{2p-2b}} \times$$

$$\left\{ \frac{4(4-b)^2}{7-2b} + \frac{(2-b)^2}{9-2b} + (4-b)^4 - 2(2-b) - \frac{4(4-b)^3}{5-b} + \frac{2(2-b)(4-b)^2}{6-b} \right\}$$

$$= \Phi_2 \left( \frac{l}{2} \right)^{3-2b} \left\{ \frac{p}{2aE(2-b)(3-b)(4-b)} \right\}^2 \quad \text{と置く}$$

$$\int_0^{\frac{l}{2}} y dx = \left\{ \frac{-p}{2aE(2-b)(3-b)(4-b)} \right\} \left( \frac{l}{2} \right)^{5-b} \left\{ 2 - \frac{2-b}{5-b} - \frac{(4-b)^2}{1} \right\}$$

$$= \frac{-p}{2\alpha E(2-b)(3-b)(4-b)} \left(\frac{l}{2}\right)^{5-b} \Phi_1 \quad \text{と置く}$$

然るに振動週期  $T$  は前節と同様に

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot \frac{w+p}{p} \frac{\int_0^l y^2 dx}{\int_0^l y dx} \quad \text{なるを以て}$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot \frac{w+p}{EI_c} \left(\frac{l}{2}\right)^4 \frac{-1}{(2-b)(3-b)(4-b)} \frac{\Phi_2}{\Phi_1} \dots (10)$$

$$T = c l^2 \sqrt{\frac{w+p}{I_c}} \dots (11)$$

と置きて  $b$  の種々の値に對する  $c$  の値を算出すれば次の如し

$b =$	1.0	0.5	0.3	0.1	0.08	0.05
$\Phi_2 =$	66.5	131.0	164.3	207.9	212.9	220.2
$\Phi_1 =$	-7.25	-10.58	-12.12	-13.6	-13.76	-13.99
$-(2-b)(3-b)(4-b) =$	-6.00	23.7	32.9	36.4	37.1	38.1
$\left\{ \frac{-\Phi_2}{(2-b)(3-b)(4-b)\Phi_1} \right\}^{\frac{1}{2}} =$	1.23	0.724	0.645	0.649	0.642	0.642
$10^6 c =$	0.367	0.216	0.193	0.194	0.192	0.192

$$\therefore \sqrt{\frac{4\pi^2}{2g} \cdot \frac{1}{E \times 2^4}} = \sqrt{\frac{2 \times 3.142^2}{2 \times 32.2 \times 30 \times 10^6 \times 144 \times 16}} = 0.299$$

即  $b=0.3$  以下に於ては  $C$  は殆んど同一なり此等の  $C$  の値を曲線を以て示せば附圖第二の如し

### 第七節 公式適用の例

第五節及第六節に於て得たる公式の實地使用法を示さんが爲め一二の橋桁に就き振動週期を算定し其結果を實測に對比せんとす

(一) 鈹桁、徑間70呎、單線軌道、礫床、米國モ州ハーヰンに於ける橋桁(米國鐵道協會報告 Vol. 12 Part 3 参照)

檢測番號 第 802 號

二主桁及び水平桁等の重量 81,430 噸

砂利敷床の重量 135,660 噸

機關車一臺の重量 362,000 噸

計

578,090呎

而て端及び中央に於ける慣性能率は既に第四節に於て算出せる所にして構桁に對し

$$I_0 = 2 \times 3.28 \text{ 呎}^4 \quad I_c = 2 \times 4.85 \text{ 呎}^4$$

$$\therefore \alpha = \frac{9.7 - 6.56}{9.7} = 0.323$$

附圖第一の曲線に依りて  $c = 1.94 \times 10^{-6}$

$$\therefore T = \frac{1.94}{10^6} \frac{70^2}{70} \sqrt{\frac{578,000}{70 \times 9.7}} = 0.277 \text{ 秒}$$

然るに機關車働輪の周圍は18.09呎なるを以て 0.277 秒間に一廻轉する爲めの速度は

$$\text{列車速度} = \frac{18.09}{0.277} = 65.2 \text{ 呎/秒} = 45 \text{ 哩/時}$$

然るに檢測の結果は Critical speed (働輪の一廻轉に要する時間と桁の振動週期と同一なる如き列車速度) は毎時45哩にして算出と一致せり而て米國鐵道協會の提案せる公式に依れば  $T$  は 0.23 秒にして之れに依りて Critical speed を算出すれば毎時52哩となり實測に比し過大なり

(二)セオドルシヤン氏設計徑間 100 呎ワレン鈹桁(鍊鐵製)

此桁の慣性能率は既に第四節に於て算出せる所にして二桁に對し

$$I_0 = 2 \times 10.82 \times 10^4 (\text{in}^4) = 21.64 \times 0.482 = 10.4 (\text{呎}^4)$$

$$I_1 = 2 \times 8.8 \times 10^4 (\text{in}^4) = 8.5 (\text{呎}^4)$$

格間數=11

$$\therefore b = \log \frac{I_0}{I_1} / \log \frac{11}{2} = 0.084$$

故に附圖第二の曲線に依り  $C = 0.193$

然るに此桁は鍊鐵製なるを以て  $E$  は約  $28 \times 10^6 \times 144$  呎<sup>2</sup>/平方呎 なり

故に 
$$C = 0.193 \times \sqrt{\frac{30}{28}}$$

死荷重は一呎當約 1,100 呎なるを以て活荷重なき場合の振動週期を求むれば

$$T = 0.193 \times \sqrt{\frac{30}{28}} \cdot \frac{99}{10^6} \sqrt{\frac{1,100}{10.4}} = 0.203 \text{ 秒}$$

而て本桁は一呎當り一噸の活荷重に對して安全なる様設計されたるものなるを

以て此最大活荷重が徑間全體を覆ふ場合の振動週期を算出すれば

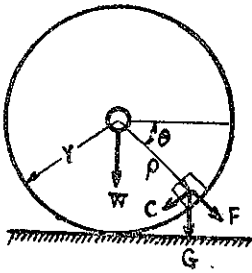
$$T = 0.193 \sqrt{\frac{30}{28}} \cdot \frac{99}{10^6} \sqrt{\frac{1,100 + 2,240}{10.4}} = 0.352 \text{ 秒}$$

即ち動荷重なき場合は約 0.2 秒にして最大荷重を満載する場合には約 0.35 秒なるを以て普通走行列車によりて現れるる振動週期は此中間に在るべし大森理學博士が久慈川鐵道橋に於て檢測せられたるものは最大 0.35 秒にして平均 0.34 秒、酒匂川山北驛附近の鐵道橋に於て觀測せられたるものは最大 0.35 秒平均 0.31 秒なりき尙余は後節に於て此等の公式を用ひて多數の橋桁の振動週期を算定し之を實測の結果に對比せんとす

#### 第八節 機關車衝輪の過平衡對重

衝輪がある速度を以て廻轉する時は其質量に遠心力作用す而て過平衡對重 (Over-balanced weight) を除くの外の部分に對して對稱的に配置さるるを以て遠心

第十九圖



力の合成は零なるも過平衡對重は特定の位置に置かるるを以て之に作用する遠心力は其大きさは車輪の廻轉速度に依りて定まり其方向は斷えず放射的に外方に向つて作用するを以て對重の重心が下方に在る間は車軸及び車輪に掛る重量を増大せしめ反對に上方にある場合は之を輕減するが如き作用をなす今(第十九圖参照)次の如き記號を用ふれば

$G$  = 過平衡對重の重量

$c$  =  $G$  の速度

$\rho$  = 輪中心より  $G$  の重心迄の距離

$r$  = 車輪の半径

$v$  = 車輪外縁の速度

$F$  =  $G$  に作用する遠心力

$$F = \frac{G}{g} \cdot \frac{c^2}{\rho} \quad \text{然るに} \quad \frac{c}{v} = \frac{\rho}{r}$$

$$\therefore F = \frac{G}{g} \cdot \frac{\rho}{r^2} v^2 = C' v^2$$

即ち與へられたる車輪に於ては  $(G/g) \times (\rho/r^2)$  は一定なるを以て  $F$  は車輪の速度  $v$  の二乗に比例す依て軌條上に作用する垂直荷重 ( $L$ ) は

$$L = W + F \sin \theta = W + F \sin \frac{v}{r} t = W \pm W' \text{ と置く}$$

即ち  $W'$  は  $2\pi/v$  を週期とする力なり今普通使用する鐵道機關車に於て  $W'$  は如何なる程度のものであるやを知らんが爲め1909年當時に於て獨逸國鐵道に於て使用せし機關車に於て  $W$  及び  $G$  の値を求むるに (Handbuch der Ingenieurwissenschaften, Teil II, Brückenbau Bd. III. 4 Auflage p. 51 より引用す)

	$G(\text{kg})$		$r(\text{m})$	$\rho(\text{m})$	$G'(\text{m. kg})$	
	Driving wheel.	Coupling wheel			Driving	Coupling
旅客列車用 機關車 (二主軸)	120~160	50~70	0.85~1.0	0.7~0.8	118~158	49~69
貨物列車用 三又又 四主軸	200~250	100~130	0.57~0.7	0.32~0.52	200~250	108~140

此等の材料に由て走行速度( $v$ )と  $W'$  の關係を算出すれば次表の如し

速度(米/秒)	$W'(\text{kg})$ の値			
	旅客列車		貨物列車	
	Driving wh.	Coupling wh.	Driving wh.	Coupling wh.
5	300~400	120~170	500~625	270~350
10	1,180~1,580	490~690	2,000~2,500	1,080~1,400
15	2,650~3,650	1,100~1,550	4,500~5,600	2,400~3,200
20	4,700~6,300	1,960~2,760	8,000~10,000	4,300~5,600
30	10,600~14,200	4,400~6,200		

當時獨逸に於て使用せし機關車の一車輪に對する最大重量は旅客列車用に於て働輪15噸, Coupling wheel 10噸にして貨物列車に於ては働輪 13.3 噸, Coupling wheel 9.2 噸なり今一機關車に於て全働輪荷重を 30 噸 Coupling wheel 荷重を 20 噸 (以上旅客列車) 及び働輪荷重を 55 噸 (貨物列車) として種々の列車速度に對する  $W'/W$  の最大値を百分率を以て示せば次表の如し

速 度 米/秒	哩/時	旅客列車		貨物列車	
		働 輪	Coupling wh.	働 輪	
5	11.2	1.33%	0.85%	1.1%	
10	22.4	5.3	3.45	4.5	

15	33.6	12.2	7.75	10.2
20	44.8	21.5	13.8	18.2
30	67.2	47.3	31.0	

次に米國鐵道協會に於て橋桁の衝撃作用研究の爲めに使用せし機關車中過平衡對重を有するものを摘出し  $W, G$  及び働輪直徑等を表示すれば次表の如し

機關車型	全重量(噸)	働輪荷重(噸)	直徑(吋)	過平衡對重(噸)
4-6-0	177,000	45,300	69	786
4-4-2	177,470	46,225	84 1/4	1,632
2-6-0	164,000	44,010	63	1,233
2-6-2	210,190	50,180	69	1,205
2-8-0	198,600	44,300	63	856
2-8-0	238,850	56,150	63	964
4-8-0	200,000	42,960	56	596
4-6-2	196,250	45,645	68	267
4-4-2	167,700	41,970	79	403
4-4-2	200,000	42,960	56	596
2-8-0	193,500	46,000	55	632
4-4-2	176,600	55,300	77	537
4-4-2	187,000	46,500	84 1/4	694
4-4-2	191,000	54,400	78	650
4-4-2	187,000	46,500	84 1/4	694
平均	191,000	47,500	70	783

今平均の機關車重量、働輪直徑及び過平衡對重を用ひ  $\rho$  を30吋として種々の列車速度に對する  $W'/W$  を百分率を以て示せば次表の如し

速度(哩/時)	10	20	30	40	50	60
$W'/W$ (%)	1.17	4.66	10.5	18.7	29.0	47.6

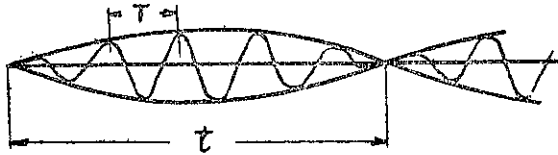
即ち過平衡對重の影響は極めて大なるものにして機關車荷重を週期的に變化せしめ以て橋桁の振動を誘起するものなり

#### 第九節 橋桁の振動か外力の週期と共鳴する場合の振動の累積

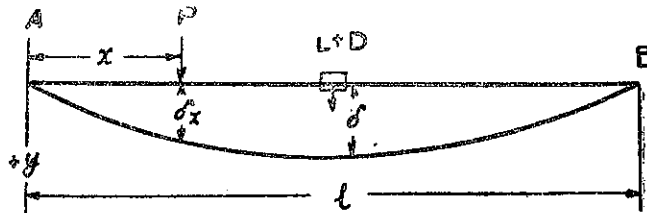
列車が橋梁上を走過する場合に之に週期的外力を及ぼすを以て桁は振動を起し外力の週期  $T_a$  と載荷せる桁の振動週期  $T_b$  とが接近する程愈々大なる振動を生ずべし然るに實際に於ては桁の週期は荷重に依りて異なるを以て列車走行に際しては瞬間毎に變化すべしある瞬間に  $T_b$  と  $T_a$  一致するも次の瞬間に於ては若干の差を生ずるを以て完全なる共鳴現象は起り得ず然りと雖も  $T_b$  と  $T_a$  とが近き時は唸りの現象を生じ(第二十圖参照)振幅は

$$t = \frac{T_a}{T_a - T_b} \quad \text{即ち} \quad \frac{T_b}{T_b - T_a}$$

第二十圖



第二十一圖



の  $1/2$  の期間だけ増大し次の  $1/2$  の期間に次第に衰弱す即ち振幅は  $2t$  を週期として變化す而て  $t$  は  $T_a$  と  $T_b$  との差の小なる程大にして従て振動の累積する期間大なるを以て振幅の絶対極大値も亦大なり而て米國鐵道協會に於ては桁の中央に不動荷重を載する桁が中央に作用する週期的外力に因る振動の累積を理論的に研究せり然れども其結果を以て走行列車の影響を論ずる事は到底不可能なり(上記報告五五頁参照)

依て余は本節に於て出來得る限り列車走行の事實を參酌して橋桁の振動を論ぜんとす

桁の荷重  $P$  と撓み  $\delta$  との間には次の如き關係あり

荷重  $P$  が  $x = \frac{l}{2}$  に加へられて生ずる  $x$  點の撓度  $\delta_x =$  荷重  $P$  が  $x$  に加へられて生ずる  $x = -\frac{l}{2}$  點の撓度 (第二十一圖参照)

今桁の斷面を均等なりと假定すれば中央に  $P$  なる荷重を載する場合の撓みの曲線は

$$\delta_x = \frac{+Px}{48EI} (3l^2 - 4x^2) = \text{荷重 } P \text{ が } x \text{ 點に加へられたる時の中心の撓度}$$

今桁の中央に於ける撓み及び振動を考ふるに荷重  $P$  は一端  $A$  より進行して中央に近づき之を過ぎて  $B$  に達す此間に中央の撓み  $\delta$  は零より次第に増大し  $\delta_{max}$  となり次で次第に減少す而て週期的外力の主要なるものは機關車の過平衡對重なるを以て機關車の重心に對重の質量  $m$  が集中するものと考えれば前節に依り

$$\begin{aligned} \text{遠心力} &= m \frac{v^2}{r} \\ W' &= m \frac{r}{r^2} v^2 \sin \frac{v}{r} t = P \end{aligned}$$

列車進行に際して桁上の活荷重の重心も次第に移動するも其前進は機關車の夫れと伴ふ事能はず列車が徑間に比し長さ程益々多くの遅れを生ず依て列車荷重  $L$  及び桁の死荷重  $W$  を中央に集中するものと考へ週期的荷重  $P$  のみが機關車の速度を以て走行すと假定して問題を解かんとす

$y =$  中央に於て桁軸の變位

$$M = \frac{1}{g} (L + W)$$

$k =$  Elastic force of girder 即ち桁の中央に於て

單位撓みを生せしむる爲めに中央に加ふべき荷重

然る時は振動體に於て

$$\text{Elastic force} + \text{External force} = \text{Mass} \times \text{Acceleration}$$

なるを以て

$$-ky + \frac{+m \frac{r}{r^2} v^2 \sin \frac{v}{r} t \cdot \frac{x}{48EI} (3l^2 - 4x^2)}{48EI} = M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \dots (12)$$

今中央に  $k$  なる荷重を加へて之を放ちて生ずる桁の振動を考ふるに撓みは 1 なる



を以て

$$\text{最大位置の勢力} = 1 \times \frac{k}{2}$$

$$\text{最大運動の勢力} = \frac{1}{2} M V^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{2\pi}{T} \right)^2 l^2 = \frac{1}{2} p^2 M$$

茲に  $T$  は桁の振動週期にして  $p$  は其振動數(Frequency)なり由て

$$\frac{k}{2} = \frac{1}{2} p^2 M \quad \therefore k = p^2 M \quad \therefore p = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

時の起點を  $P$  が桁の左端即ち  $x=0$  に來りし瞬間に取れば

$$x = vt$$

なり今  $-\frac{m\rho v^3}{r^2 l} t \left( 3 - 4 \frac{v^2}{l^2} t^2 \right) \sin \frac{v}{r} t$  を  $f(t)$  と置けば微分方程式(12)は次の如き形となる

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{k}{M} y = f(t) \quad \dots \dots \dots (12')$$

此の微分方程式の一般解法は

$$y = \sin pt \{ c_1 - \int f(t) \cos pt dt \} + \cos pt \{ c_2 + \int f(t) \sin pt dt \} \dots \dots (a)$$

而て

$$\begin{aligned} & - \sin pt \int f(t) \cos pt dt = + m \frac{p}{r^2} \cdot \frac{v^3}{l} \left\{ \frac{3}{4p} \left( \frac{1}{2p} \sin pt \sin 2pt - t \sin pt \cos 2pt \right) \right. \\ & \left. - 2 \frac{v^2}{l^2} \left[ \sin pt \cos 2pt \left( \frac{6t}{8p^3} - \frac{t^3}{2p} \right) + \sin pt \sin 2pt \left( \frac{3t^2}{4p^3} - \frac{6}{16p^4} \right) \right] \right\} \\ & + \cos pt \int f(t) \sin pt dt = + m \frac{p}{r^2} \cdot \frac{v^3}{l} \left\{ \frac{3}{8p^2} \cos pt (4 \sin^2 pt - 1) + \frac{3t}{4p} \sin pt \right. \\ & \left. + \frac{2v^2}{l^2} \left[ \sin pt \left( \frac{6t}{8p^3} - \frac{t^3}{2p} \right) + \cos pt \frac{3t^2}{4p^3} - \frac{6}{16p^4} (4 \sin^2 pt - 1) \cos pt \right] \right\} \end{aligned}$$

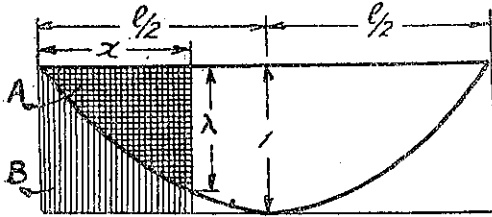
此等の値を (a) 式に挿入すれば  $y$  の現式は非常に煩雜なる形となり之を應用して振動累積の現象を研究する事は頗る困難なるを以て近似的方法を以て之を解決せんとす

荷重  $P$  が  $x$  に在る時と中央に在る時との中央の撓みの比を求むれば (第二十二圖参照)

$$\frac{x \text{ 點の撓み}}{\text{中央の撓み}} = \lambda = \frac{x}{l} \left( 3 - 4 \frac{x^2}{l^2} \right)$$

故に  $p$  が走行する場合と中央に止まる場合との桁に與ふる勢力の平均量を比するに  $x=0$  より  $\lambda=x$ 迄の間に對しては第二十二圖中に  $A$  の面積と  $B$  の面積との比に等しく即ち  $\frac{1}{x} \int \lambda dx$  と 1 との比なり故に

第二十二圖



$$x < \frac{l}{2} \text{ のとき } \frac{1}{x} \int \lambda dx = \frac{3x}{2l} - \frac{x^3}{l^3}$$

$$x > \frac{l}{2} \text{ のとき } \frac{1}{x} \int \lambda dx = \frac{5l}{8} - \frac{1}{l}$$

$$\left\{ \frac{3}{2}(l-x)^2 - \frac{1}{l}(l-x)^4 \right\}$$

然るに  $P$  が中央に止まる場合には

$$y = \frac{m\rho}{2M} \left( \frac{3}{2l}vt - \frac{v^3t^3}{l^3} \right) (\sin pt - pt) \dots \dots \dots x < \frac{l}{2} \text{ のとき}$$

$$\text{又は } \frac{m\rho}{2M} \left\{ \frac{5l}{8vt} - \frac{1}{lvt} \left\{ \frac{3}{2}(l-vt)^2 - \frac{1}{l^3}(l-vt)^4 \right\} \right\} (\sin pt - pt \cos pt) \dots \dots x > \frac{l}{2}$$

のとき

上式に於て  $y$  の式を見るに  $t$  の長さ程即ち  $P$  が長く作用する程  $y$  の極大値(振幅の 1/2)は増大す今振幅の 1/2 を  $Y$  としそれが  $t$  の繼續につれて増大する關係を數式を以て現はせば

$$Y = \frac{m\rho}{2M} \left( \frac{3}{2l}vt - \frac{v^3t^3}{l^3} \right) \cdot pt$$

然るに  $p = \frac{2\pi}{T} = \frac{v}{r}$  にして機關車が桁上を走過する期間を  $t_1$  とすれば

$l = vt_1$  なり故に

$$pt_1 = \frac{v}{r} t_1$$

故に此等の關係を  $Y$  の式に入れば

$$Y_{max} = C \frac{m\rho}{2M} \cdot \frac{l}{r} = C \frac{l}{M}$$

而て  $P$  の移動する影響を考ふれば  $Y_{max} = \int_0^l \lambda dx$  を乗ぜざるべからず兎に角走行列車に由りて生ずる桁の最大振幅は對重の質量  $m$  其半徑  $\rho$  及び桁の徑間  $l$  に比例し桁の總荷重(死荷重  $D$  と活荷重  $L$  との和)に逆比例する事を知れり

今動荷重の強さ即ち  $L/l$  を  $q$  と置けば桁が  $q$  なる等布荷重を受けて生ずる靜力的撓み(Statical deflection)は中央に於て

$$D \propto \frac{ql^4}{I} \quad I = \text{桁の断面の慣性能率}$$

今桁が  $(W+L)/l = w+q$  なる等布荷重に對して設計されたるものと考ふれば中央に於て桁の高さを  $h$  とすれば

$$B.M \propto l^2(w+q)$$

$$\therefore I \propto B.M \times h \propto l^2(w+q)h$$

若し桁に於て高さと同径間とが略一定の割合を保つと假定すれば

$$I \propto l^3(w+q)$$

故に

$$D \propto \frac{ql^4}{(w+p)l^3} \propto \frac{ql^2}{M}$$

故に振動に依る最大撓み  $Y_{max}$  と静力的撓み  $D$  との比  $I$  は

$$I \propto C_1 \frac{l}{M} \times \frac{M}{gl^2} = C_1 \frac{1}{gl}$$

然るに或る線路に於ては列車の長さ一呎當りの最大重量は略一定せるを以て

$$I \propto \frac{1}{l} \dots \dots \dots (13)$$

然るに  $I$  は動荷重の運動によりて生ずる最大撓みと動荷重自身に依る静力的撓みとの比なるを以て直ちに之れを桁に作用する彎曲力率の衝撃係數 (Coefficient of Impact) と見做す事を得故に橋桁に對して最も危險なる速度即ち過平衡對重に因る荷重の週期と桁の振動週期とが一致する如き速度を以て列車が進行する場合には彎曲力率に對する衝撃係數は徑間  $l$  に逆比例すと云ふことを得

然りと雖も短徑間に於て  $Y$  を少なからしむる影響種々あり其の主たるものは短徑間に於ては自重は動荷重に比して割合に小なるを以て動荷重なき場合の振動週期と之を滿載する場合の週期とは稍著しき差隔ありて列車が桁上を通過する間始終共鳴又は唸りの現象を生ずる事能はざるを以て  $Y$  は上に算出せるものより一般に小なるべく從て  $I$  も亦(13)式の示すものより小なるべし

**第十節 桁と外力との週期が異なる場合の振動の累積**

此場合に於ては外力  $P$  の週期と桁の振動週期とは異なるを以て前者の振動數を  $p_1$  後者の夫れを  $p$  とす前節に於ける振動の微分方程式は

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{M}y = \frac{m}{M} \cdot \frac{\rho}{v^2} \cdot v^2 \frac{\omega}{l} \left( 3 - 4 \frac{\omega^2}{l^2} \right) \sin p_1 t$$

先づ  $P$  は中央に止まるものとして問題を解き其の進行の影響は前節の結果に依りて之を補正せんとす 今

$$\frac{k}{M} = p^2 \qquad \frac{m\rho}{M} = R$$

と置けば方程式は

$$\frac{d^2 M}{dt^2} + \frac{k}{M} y = R p_1^2 \sin p_1 t \dots \dots \dots (14)$$

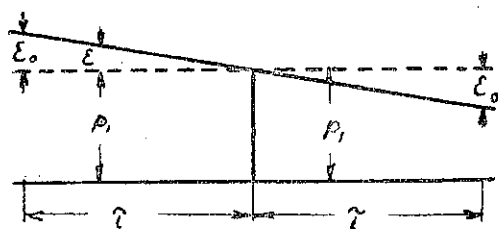
にして此場合は米國鐵道協會に於て既に取扱ひたる所にして其解答は(同報告五五頁参照)

$$y = \frac{R p_1^2}{p^2 - p_1^2} \left( \sin p_1 t - \frac{p_1}{p} \sin p t \right) \dots \dots \dots (15)$$

なり

此結果を利用して振動累積の現象を研究せんが爲め(第二十三圖参照)

第二十三圖



$$p = p_1(1 + \epsilon)$$

と置く然るときは

$$\sin p t = \sin(1 + \epsilon)p_1 t \doteq \sin p_1 t + \epsilon p_1 t \cos p_1 t$$

$$\therefore y = \frac{R p_1^2}{p^2 - p_1^2} \left( \left( 1 - \frac{p_1}{p} \right) \sin p_1 t - \right.$$

$$\left. \epsilon \frac{p_1^2}{p} \cos p_1 t \right)$$

今一往復振動の後の振幅の 1/2 を  $Y_1$  とすれば

$$p_1 t = 2\pi$$

$$Y_1 = \frac{R p_1^2}{p^2 - p_1^2} \epsilon \frac{p_1^2}{p} \cdot \frac{2\pi}{p_1} = \frac{R}{2} 2\pi \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}$$

同様にして  $n$  往復振動後の  $Y_n$  は

$$Y_n = \frac{R}{2} 2n\pi \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}$$

即ち一振動間に振幅の増大する量は  $\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}$  に比例す故に次の如き關係を得

$$\mu = \frac{p = p_1(1 + \epsilon) \text{ なる場合に單位時間に振幅の増大する量}}{p = p_1 \text{ なる場合に單位時間に振幅増大する量}} = \frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon}$$

今近似的に  $\frac{1 - \epsilon}{1 + \epsilon} \doteq 1 - 2\epsilon$  として  $t$  期間の  $\mu$  の平均を求めれば

$$\text{Mean } \mu = \frac{1}{t} \int_0^t (1 - 2\epsilon) dt$$

然るに機關車が左端に現はれたる時桁の荷重は最小にして  $p$  は最大に之れより  
 機關車が桁上に進行するに従ひ荷重は次第に大となり従て  $p$  は次第に減少し機關  
 車が右端に達したる時荷重最大にして  $p$  は最小なり今機關車がある點に達したる  
 時  $p - p_1 = \epsilon_0 p_1$  となりて茲に振動を累積せしむる作用を生じ之より  $p$  は直線的に減  
 少して  $\tau$  の後  $p_1 - p_0$  となり更に  $\tau$  の後  $p_1 - p_0 = \epsilon_0 p_1$  となりて茲に累積作用止む  
 ものと考ふる時は

$$\epsilon = \frac{\epsilon_0}{\tau} t \quad \text{なるを以て}$$

$$\text{Mean } \mu = 1 - \epsilon_0$$

即ち  $2\tau$  なる期間終始共鳴をなす場合振幅は零より  $A$  に増大するものとすれば  
 最初  $p$  と  $p_1$  とが  $\epsilon_0$  だけの差隔あり次第に近づき  $\tau$  の後  $p = p_1$  となり更に  $\tau$  の後  
 差が再び  $\epsilon_0$  に達する如き場合の  $2\tau$  後の振動振幅は  $A(1 - \epsilon_0)$  なり

然るに前節に由り第一の場合の  $p_1 t$  後の最大振幅の  $1/2$  は  $Y = \frac{m\rho}{2M} p_1 t$  なるを以て

第二の場合に對しては

$$Y' = \frac{m\rho}{2M} (1 - \epsilon_0) p_1 t \quad \text{茲に} \quad \epsilon_0 = \frac{p_1 - p_0}{p_1} \dots \dots \dots (16)$$

次に前節に於て得たる  $I$  の形に  $p$  と  $p_1$  との終始一致せざる爲めの補正を加へん  
 爲め極めて大體の計算を施さんに普通鐵道橋に於て死荷重と活荷重との割合は  
 (Kunz:—Design of Steel Bridge, p. 1 参照)

$$\frac{\text{死荷重}}{\text{動荷重}} = \frac{l}{400} \quad (l \text{ は呎を以て現はす})$$

然るに與へられたる桁に於て動荷重なき場合の振動週期  $T_0$  と満載の場合の週期  
 $T$  との比は

$$\frac{T_0}{T} = \sqrt{\frac{\text{死荷重}}{\text{死荷重} + \text{動荷重}}} = \sqrt{\frac{l}{l + 400}}$$

$$\therefore \frac{p_0}{p_{\max}} = \sqrt{\frac{l + 400}{l}}$$

故に  $l$  の種々の値に對して  $\frac{p_0}{p_{\max}}$  の値を求めれば

$$l = \quad 100 \quad 200 \quad 300 \quad 400 \dots$$

$p^0/p_{max.} = 2.2$	1.73	1.53	1.41
$\epsilon_0 = \frac{1}{2}(p^0/p_{max.} - 1) = 0.6$	0.36	0.26	0.20

之より  $\epsilon_0$  と  $l$  との關係を求むれば大體

$$\epsilon_0 = \frac{88.8}{l + 44.4} \quad \therefore 1 - \epsilon_0 = \frac{l - 44.4}{l + 44.4}$$

$$\therefore I \propto \frac{1 - \epsilon_0}{l} = \frac{l - 44.4}{l(l + 44.4)}$$

故に  $l$  が大なる場合には

$$I = \frac{c}{c' + l} \dots \dots \dots (17)$$

にして即ち今日普通使用さるゝ衝撃係數の公式は彎曲力率及び弦材應力に就ては理論上の根據を有するものと云ふべし

### 第十一節 橋桁に於ける振動累積の算定

前節に於て得たる如く  $t$  後の半振幅  $Y'$  は

$$Y' = \frac{m\rho}{2M}(1 - \epsilon_0)p_1 t$$

$t$  期間に  $n$  回振動せりとすれば  $p_1 t = 2n\pi$

故に  $n$  回振動後の半振幅は

$$Y' = \frac{m\rho}{2M}(1 - \epsilon_0)2n\pi \dots \dots \dots (18)$$

此公式は振動に對する諸抵抗を無視し且つ  $p$  と  $p_1$  と差大なる場合に外力の影響を過大視せるを以て  $n$  回振動後の實際の半振幅は公式(18)の與ふるものを超ゆる事なかるべし而て上式の適用には次の諸材料を必要とす

1. 振幅を最大ならしむる如き速度即ち Critical speed を知る事
2. 過平衡對重の質量  $m$  及其位置  $\rho$  を知る事
3. 走行荷重の詳細を知る事
4. 桁の主要なる寸法構及び全重量を知る事

米國鐵道協會の實驗は極めて多數にあるも其報告書中此等の材料を具備するものは少數にして其内二三に就て公式(18)に依りて算出したる  $Y$  と實際の最大半振幅とを對比せんとす

一、橋桁第二十五號、徑間七十呎鉄桁、礫床  $B-44$ . (第四節及び第五節參照)  
本計算に用ひんとするものは實驗第 846 號なり

$$l = 70' - 1.75 = 68.25 \quad c, \text{ to } c. \text{ of bearing}$$

$$I_c = 2 \times 4.85 = 9.7 \text{ (呎}^4\text{)} \quad I_0 = 6.56 \text{ (呎}^4\text{)}$$

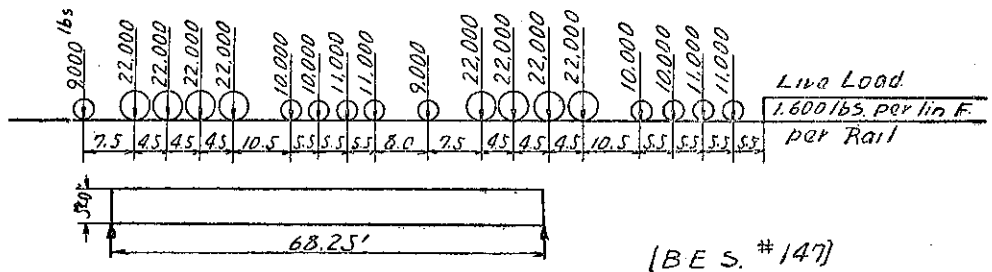
$$b = \left(1 - \frac{I_0}{I_c}\right) = 0.325$$

故に附圖第一の曲線に依り  $C = 1.92 \times 10^{-6}$

$$T = CF \sqrt{\frac{w+p}{I_c}}$$

$$\text{全死荷重} = 217,090 \text{ 呎} \quad \therefore w = 3,180 \text{ 呎}$$

第 二 十 四 圖



試験用機關車は第 1,115 號(第二十四圖參照)にして活荷重の最大なる場合は機關車と列車の一部とが桁上にある場合にして即ち

$$P_1 = 322,800 + \frac{76,100}{36.75} \times 13 = 349,800 \text{ 呎}$$

$$\therefore P_1 = \frac{L_1}{l} = 5,110 \text{ 呎}$$

次に車輛のみにて桁上を占むる場合の活荷重は

$$L_2 = \frac{76,100}{36.75} \times 68.25 = 141,000 \text{ 呎}$$

$$\therefore p_2 = \frac{L_2}{l} = 2,060 \text{ 呎}$$

故に

$$\text{活荷重なき場合 } T_0 = \frac{1.92}{10^6} \times 68.25^2 \sqrt{\frac{3,180}{9.7}} = 0.162 \text{ 秒}$$

$$\text{最大活荷重の場合 } T_1 = \frac{1.92}{10^6} \times 68.25^2 \sqrt{\frac{3,180 + 5,110}{9.7}} = 0.26 \text{ 秒}$$

$$\text{車輛滿載の場合 } T_2 = \frac{1.92}{10^6} \times 68.25^2 \sqrt{\frac{3,180 + 2,060}{9.7}} = 0.207 \text{ 秒}$$

機關車の働輪が 0.26 秒に一廻轉する如き列車速度を求むるに輪周は 18.09 呎なるを

以て

$$v = \frac{18.00}{0.26} = 69.6 \text{ 呎/秒} \quad \text{即チ} \quad 47 \text{ 哩/時}$$

然るに實際に觀測せる最危險速度は毎時45哩にして突縁の最大衝撃係數は30%なりき

$$\frac{m}{M} = \frac{1,205}{322,800 + 217,090 + 27,000} = 2.12 \times 10^{-3}$$

$\rho = 1.74$  呎 而て振動の累積は二週期間なるを以て

$$Y = \frac{2.12 \times 1.74}{2} \times 10^{-3} \left( 1 - \frac{0.26 - 0.16}{0.26} \right) 2 \times 2\pi = 0.0116 \text{ 呎}$$

然るに最大荷重に依る中央の撓みは0.4呎なるを以て

$$i = \frac{Y}{D} = \frac{12 \times 0.0116}{0.40} = 0.35$$

即ち計算に依れば衝撃係數は35%を超ゆる事なかるべし若し礫床に代ふるに開床を用ふれば衝撃係數は幾何に達すべきやを推定せしに

$$\text{Open floor の場合の死荷重} = 81,430 + 360 \times 70 = 106,430$$

$$\therefore w = \frac{106,430}{68.25} = 1,560 \text{ 秒}$$

$$T_0 = \frac{1.92}{10^3} \times 68.25^2 \sqrt{\frac{1,560}{9.7}} = 0.114 \text{ 秒}$$

$$T_1 = \frac{1.92}{10^3} \times 68.25^2 \sqrt{\frac{1,560 + 5,110}{9.7}} = 0.234 \text{ 秒}$$

$$T_2 = \frac{1.92}{10^3} \times 68.25^2 \sqrt{\frac{1,560 + 2,060}{9.7}} = 0.144 \text{ 秒}$$

而て此場合最危險列車速度を求むるに約毎時52哩にして前者より約5哩大なり

$$\frac{m}{M} = \frac{1,205}{106,430 + 217,090 + 27,000} = 3.45 \times 10^{-3}$$

$$\therefore Y = \frac{1.74 \times 3.45 \times 10^{-3}}{2} 2 \times 2\pi \left( 1 - \frac{0.234 - 0.114}{0.234} \right) = 0.0155 \text{ 呎}$$

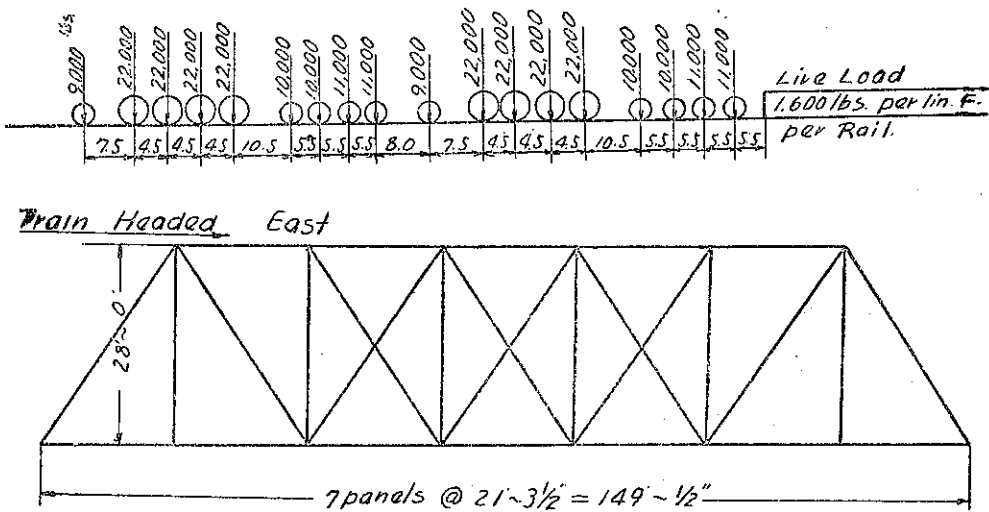
$$\therefore i = \frac{12 \times 0.0155}{0.4} = 0.465$$

即ち彎曲力率に對する衝撃係數の極限は約46.5%なるも實際は荷重なき場合の振動週期と滿載の場合の夫れとは稍著しき差隔あるを以て尙一層小なるべし要するに振動の大小に關しては礫床にても開床にても著しき差異あるにあらず而て最危



險速度は前者に於て小なり故に連続せる徑間の數少なく列車が前後の線路と同一の高速を以て橋上を走過する場合には70呎又は夫以上の桁に於ては礮床を利とすべく若し列車が橋梁を通過するに前後より小なる速度を用ひる場合には其效果少し要するに牀の種類は徑間、活荷重及び通過する速度等に依りて撰定すべきものにして主振動を軽減する爲めに場合を問はず礮床を用ふるも無意義なり

第二十五圖



(二) 橋桁徑間 149 呎 1/2 吋 實驗番號 S46

Pin connected, through, shallow suspended ballasted floor. (第二十五圖參照)

橋梁の全重量 1,305,187 听

機關車第 115 號, 重量 322,800 听, 長さ 55 呎

過平衡對重 120 听, 働輪周 18.9 呎

四輛の貨車の量は = 76,100 + 80,900 + 83,200 + 36,000 = 279,000 听

四輛の貨車の長さ = 36.75 + 36.75 + 36.75 + 34' = 144.25

$$I = \left(\frac{2x}{l}\right)^b I_c \qquad \frac{2x}{l} = \frac{1}{3.5}$$

$$I_1 = 213 \text{ (呎}^4\text{)} \qquad I_c = 314 \text{ (呎}^4\text{)}$$

$$\therefore b = \log \frac{314}{213} / \log 3.5 = 0.31$$

故に第二十一圖の曲線に依り  $C=1.86 \times 10^{-6}$

$$\begin{aligned} \text{桁上の最大活荷重} &= 322,800 + 76,100 + 80,900 + \frac{1}{2} \times 83,200 \\ &= 521,400 \text{ 呎} \end{aligned}$$

$$\therefore w+p = \frac{1,305,187 + 521,400}{149} = 8,800 + 3,500 = 12,300 \text{ 呎}$$

故に振動周期は

$$\text{活荷重なき場合 } T_0 = \frac{1.86}{10^6} \times 149^2 \sqrt{\frac{8,800}{314}} = 0.22 \text{ 秒}$$

$$\text{最大荷重の場合 } T = \frac{1.86}{10^6} \times 149^2 \sqrt{\frac{8,800 + 3,500}{314}} = 0.26 \text{ 秒}$$

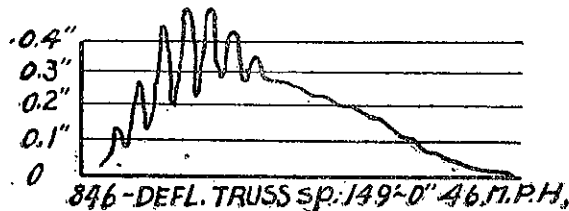
今  $T$  と同一期間に働輪が一廻轉をなす如き列車速度即ち桁に對する最危険速度を  
 求むるに

$$V = \frac{18.09}{0.26} = 69.5 \text{ 呎/秒} = 46.6 \text{ 哩/時}$$

而て實際の觀測に依る最危険速度は毎時45哩なり次に振動累積の程度を推定せんとす(第二十六圖參照)

$$\rho = 1.74 \text{ 呎}, \quad \frac{m}{M} = \frac{1,205}{1,826,587} = 0.66 \times 10^{-3}$$

第 二 十 六 圖



今働輪に因る週期的外力と桁の振動とが徑間の  $\frac{1}{2}$  の距離だけ共鳴するものと假定すれば

$$\text{累積する振動回数} = \frac{149}{2 \times 18.09} = 4.1 = n$$

故に桁振動の半振幅の極限值は

$$Y = \frac{1}{2} \times 1.74 \times 0.66 \times 10^{-3} \times 4 \times 2\pi \left( 1 - \frac{0.26 - 0.22}{0.26} \right) = 0.0122 \text{ 呎}$$

然るに最大活荷重に因る中央の撓みは

$$\text{靜力的撓み} = 0.34 \text{ 吋}$$

故に彎曲力率に對する衝擊係數の限度は

$$i = \frac{0.0122 \times 12}{0.34} = 0.43 \quad \text{即ち} \quad 43\%$$

然るに實測に於て得たる弦材の最大衝擊係數は45%なりき(實驗第846)而して桁の中央に於ける撓み及び振動は第二十六圖に示すが如し

(三) 構桁第12號 徑間 176 呎 6 吋 Through, skew, pin connected, open floor (第二十七圖) 實驗第 454 號 機關車番號 925

橋桁の全死荷重 365,000 噸

機關車の重量 303,100 噸

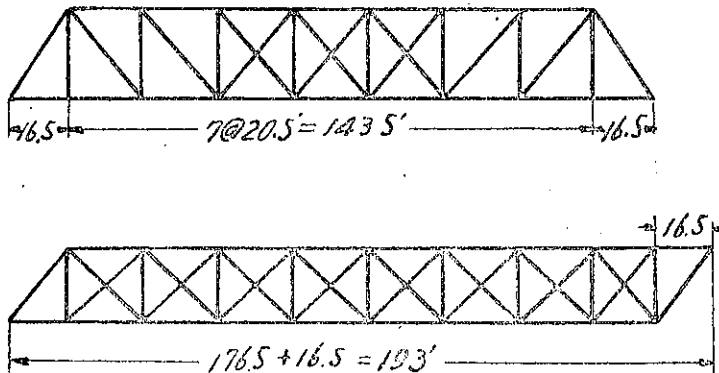
過平衡對重 1,632 噸

働輪の周圍長 22.1 呎

貨車三輛各重量 114,000 噸 長さ 44 呎

桁上の最大活荷重 605,000 噸

第 二 十 七 圖



$$I_c = 268 \text{ (呎}^4\text{)} \quad I_o = 190 \text{ (呎}^4\text{)}$$

$$l = \frac{\log I_c}{\log I_o} \bigg/ \log \frac{2 \times 16.5}{176.5} = 0.222$$

故に附圖第二の曲線に依り  $C = 1.90 \times 10^{-6}$

長一呎當死荷重 = 2,070 噸

長一呎當總荷重 = 5,500 噸

故に

$$\text{活荷重なき場合の振動週期} = \frac{1.90}{10^6} \times 176.5^2 \sqrt{\frac{2,070}{268}} = 0.165 \text{ 秒}$$

$$\text{最大活荷重を載する場合の振動週期 } T = \frac{1.90}{10^6} \times 176.5^2 \sqrt{\frac{5,500}{268}} = 0.27 \text{ 秒}$$

之に由て最危険列車速度を計算するに

$$V = \frac{22.1}{0.27} = 87 \text{ 呎/秒} \quad \text{即ち } 56 \text{ 哩/時}$$

然るに實際觀測の結果最大衝撃を與へしは列車速度毎時44哩にして算出値と著しき差あり之れ本桁は著しき斜橋にして振動を論ずる場合には最も隔りたる二支點間を徑間として使用せざるへからさりしに由る(第二十七圖参照)即ち

$$l = 176.5 + 16.5 = 193 \text{ 呎}$$

之に由て振動週期を算出すれば

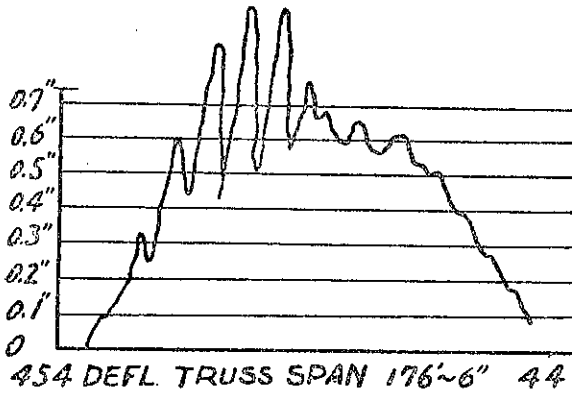
$$T_0 = \frac{1.9}{10^6} \times 193^2 \sqrt{\frac{2,070}{268}} = 0.198 \text{ 秒}$$

$$T = \frac{1.9}{10^6} \times 193^2 \sqrt{\frac{5,500}{268}} = 0.324 \text{ 秒}$$

故に最危険速度は

$$V = \frac{22.1}{0.324} = 68.5 \text{ 呎/秒} \quad \text{即ち } 47 \text{ 哩/時}$$

第二十八圖



次に前例の如く徑間の 1/2 の距離の間振動累積するものと假定せば(第二十八圖参照)

$$n = \frac{193}{2 \times 22.1} = 4.4$$

而て

$$\rho = 1.67 \text{ 呎}$$

$$\frac{m}{M} = \frac{1,632}{970,000} = 1.68 \times 10^{-3}$$

故に半振幅の極限值は

$$Y = 1.67 \frac{1.68 \times 10^{-3}}{2} 4 \times 2\pi \left( 1 - \frac{0.27 - 0.17}{0.27} \right) = 0.0284 \text{ 呎}$$

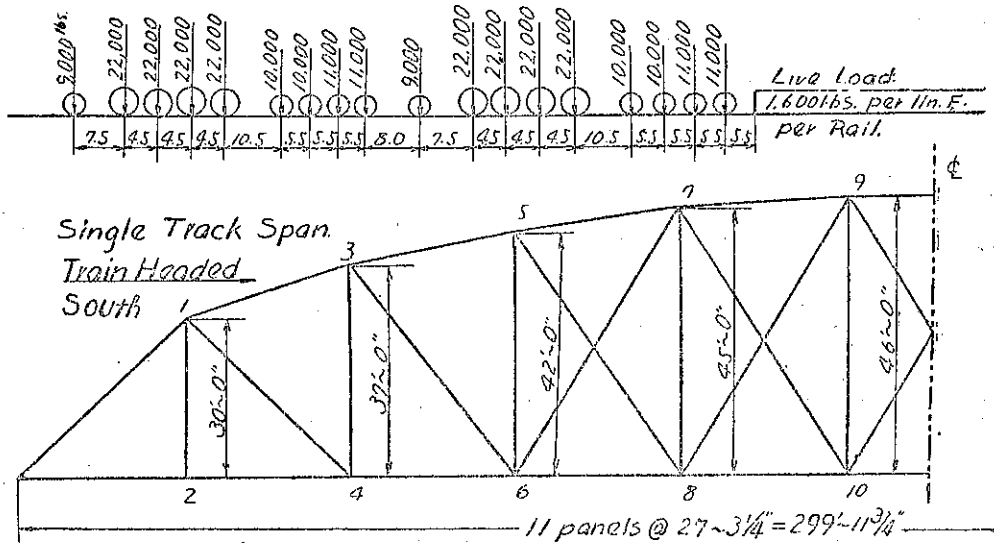
然るに最大活荷重に對する靜力的撓みDは

$$D = 0.72 \text{ 吋}$$

故に衝撃係數の極限值は

$$i = \frac{0.0284 \times 12}{0.72} = 0.49 \quad \text{即ち } 49\%$$

第 二 十 九 圖



然るに弦材の最大衝撃係數を生ぜし列車速度は44哩にして其係數は36%なりき第二十八圖は徑間の中央に於ける撓みと振動の累積現象とを示すものなり

(四) 構桁第26號 徑間300呎 Pin connected, through, open floor (第二十九圖)

實驗番號890

桁の總死荷重 1,112,438呎

機關車番號 1,066

重量 322,800呎

働輪周圍 18.09呎

過平衝對重 1,205呎

働輪心よりの距離 1.74呎

車輛

三輛	一輛に付き	108,300 呎、長さ40呎
一輛		82,300 呎、長さ37.25呎
一輛		108,300 呎、長さ40呎

桁上の最大活荷重740,800呎、長さ252.25呎

$$I_1 = 2 \times 223 \text{ (呎}^4\text{)} \quad I_c = 2 \times 630 \text{ (呎}^4\text{)}$$

$$\therefore b = \log \frac{630}{223} / \log \frac{11}{2} = 0.61$$

故に附圖第二の曲線に依りて  $C = 2.45 = 10^{-c}$

長一呎當り死荷重 = 3,708 呎

長一呎當り最大活荷重 = 2,470 呎

故に振動週期は

$$\text{活荷重なき場合} \quad T_0 = \frac{2.45}{10^6} \times 300^2 \sqrt{\frac{3,708}{1,260}} = 0.38 \text{ 秒}$$

$$\text{活荷重最大なる場合} \quad T_1 = \frac{2.45}{10^6} \times 300^2 \sqrt{\frac{3,708 + 2,470}{1,260}} = 0.49 \text{ 秒}$$

之より最大活荷重に對する最危險列車速度を算出するに

$$V = \frac{18.09}{0.49} = 37 \text{ 呎/秒} \quad \text{即ち} \quad 25 \text{ 哩/時}$$

然るに實測の結果弦材に最大衝撃を與へし列車速度は毎時25哩にして算出値と一致するを見る

次に振動の累積を推定せん

$$\frac{m}{M} = \frac{1,205}{1,112,438 + 740,800} = 0.65 \times 10^{-3}$$

振動回数を8として

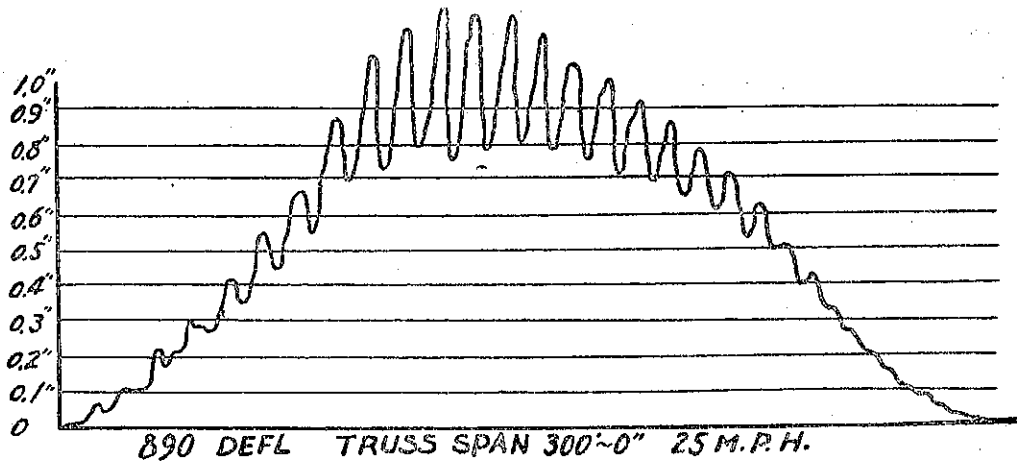
$$Y = 1.74 \frac{0.65 \times 10^{-3}}{2} \times 8 \times 2\pi \left(1 - \frac{0.49 - 0.38}{0.49}\right) = 0.0216 \text{ 呎}$$

然るに最大荷重に因る中央の撓みは0.97呎なるを以て衝撃係數の極限は

$$i = \frac{0.0216 \times 12^{-3}}{0.97} = 27\%$$

然るに最危險速度毎時25哩に由る衝撃係數は最大22%なりき次に該桁の中央に於ける撓み及振動の狀況を第三十圖に示す

## 第 三 十 圖



## (五) 舊日鐵型徑間200呎 Double warren

茲に用ゆる材料は舊大井川鐵道橋に就きて田邊工學博士の行はれたる實驗にして其成績は土木學會誌第一卷第一號に發表されたる者なり(同氏論說第二圖參照)

桁の總死荷重165.6噸 (370,000斤)

實驗に使用せる荷重は機關車1臺にして其重量24.2噸即ち54,000斤にして(前記第二圖)に示せる實驗は速度毎時18哩を以て桁上を走過せるものなり既に第四節IIの(2)に於て計算せし如く桁の慣性能率は

$$I_1 = 208 \times 10^4 (\text{吋}^4) = 101 (\text{呎}^4)$$

$$I_0 = 296 \times 10^4 (\text{吋}^4) = 144 (\text{呎}^4)$$

$$\therefore b = \log \frac{296}{208} / \log 6 = 0.196$$

故に附圖第二の曲線に依り  $C = 1.90 \times 10^{-6}$

長1呎當り死荷重=1,780斤

長1呎當り活荷重=270斤

故に桁の振動週期は

$$\text{活荷重なき場合 } T_0 = \frac{1.90}{10^6} \times 208^2 \sqrt{\frac{1,780}{144}} = 0.29 \text{ 秒}$$

$$\text{活荷重ある場合 } T = \frac{1.90}{10^6} \times 208^2 \sqrt{\frac{2,040}{144}} = 0.31 \text{ 秒}$$

然るに實際の檢測に依る最大週期は機關車が桁の中央に來りし時にして約 0.36 4 秒なり即ち算出値より著しく大なり是れ本公式は荷重を徑間全體に等布なりと假定せるに此實驗に於ては 1 臺の機關車が 200 呎の桁上を走行するを以て其中央に近き場合には之れを等布と見做す場合に比し著しく大なる撓み即ち位置の勢力を生ず而て振動週期は撓みに比例して大となるを以て之に補正を加ふれば

$$P \text{ なる荷重が等布なる場合桁の中央の撓み} = \frac{5P^3}{384EI}$$

$$P \text{ が中央に集中せる場合桁の中央の撓み} = \frac{1}{48} \cdot \frac{P^3}{EI}$$

$$\text{兩者の比は } \frac{1}{1.6}$$

故に

$$\text{機關車が桁の中央に在る場合 } T = 0.31 \times \sqrt{1.6} = 0.39 \text{ 秒}$$

而て機關車動輪の周圍 15 呎なれば最危險速度は

$$V = \frac{15}{0.39} = 38.5 \text{ 呎/秒} \quad \text{即ち } 26 \text{ 哩/時}$$

實驗速度 18 哩より大なる速度を用ひなば一層大なる振動を生ぜしなるべし

次に人夫が橋上を走行せし場合の振動を掲げられ其意外に顯著なるより該桁の薄弱なるを推定されたりしが人の馳足の歩調は 1 分間に 180 歩内外にして爲めに桁に作用する週期的外力の週期は 0.3 秒内外なるを以て活荷重なき場合の桁の振動週期と良く一致し爲めに振動を累積せしめたるものなり

以上算出せる結果を便宜の爲め表示すれば次の如し

型 式	徑間	中央部ノ 高さ(呎)	週 期(秒)		最危險列車速度		算出 衝撃%	實測 衝撃%
			無活荷 重ノ時	最大活荷 重ノ時	呎/秒	哩/時		
(1) 鉸桁、砂利敷床	69.25	5.0	0.163	0.26	69.5	47	35	30
(1)' 平行ぶらっと桁、 砂利敷床	149	28.0	0.22	0.26	69.5	47	43	45
(2) 平行ぶらっと桁、 開床	149	28.0	0.114	0.234	—	52	46.5	—
(3) 平行ぶらっと桁 開床、(斜 橋)	193 (176.5)	29.0	0.198 (0.165)	0.324 (0.27)	68.5 87	47 56	49	36
(4) 曲撓ぶらっと桁、 開床	300	49.0	0.38	0.49	37	25	27	°
(5) だぶるわ-れん 桁、 開床	200	16.33	0.29	0.31	38.5	26	—	38

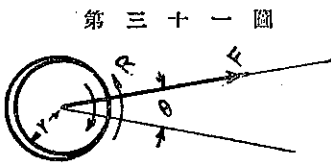


以上引用せる實例は多數の實測成果より主振動の最も顯著なるもの從て弦材の衝撃の最大なるものを摘出せるものなり橋床上に敷設せる軌條も一定の長さを有するを以て其ツョイントに於て烈しき衝撃を受く此作用は車輛の振動には極めて顯著に現はるるも橋桁の主振動に對する影響は餘り明瞭ならず然れども牀の構造に對しては極めて重要にして衝撃作用の主要部をなすものの如し尙橋桁に於ては格間等距にして若し活荷重に依りて軌道がツクザクの曲線を成す時は橋に週期的外力を及ぼす事となる然し此影響も上記の實驗に於ては明瞭に檢出するを得ず兎に角此等の諸作用に對しては尙今後の研究を期せざるべからず

### 第十二節 桁の振動に對する諸種の抵抗

桁が振動するに當りて種々の抵抗作用して之を漸衰せしめ若し外部より勢力を與へて振動を勵ます場合には之に因る振幅増大の割合を少ならしむ而て一般に抵抗は振幅の大なる程大なるを以て如何に累積するも振幅はある限度を超越する事能はざるべし實際に作用する抵抗の主なるものは三種にして即ち空氣抵抗、内部摩擦抵抗、及び外部摩擦抵抗是れなり

(一)空氣抵抗 振動體と空氣との比速度に因りて其速度の自乗に略比例する抵抗が斷へず運動に逆みて作用す然れども振幅は一般に小なるものにして今週期を0.2秒振幅を2吋とするも最大速度は $2\pi/T$ 吋にして即ち毎秒2.6呎位にすぎざるを以て爲めに生ずる抵抗は微小なるものなり



第三十一圖

(二)内部摩擦抵抗 桁が振動する時は各部材の方向も亦之に伴ふて微小なる變動をなす若し部材が兩端に於て完全に固定さるゝか又は結合が完全なる彈性を有する時は勢力の消費をも微小なりと雖も實際の構造に於ては銻と銻孔又は鑲釘と釘孔との間に多少の滑動を生じ其間に發生する摩擦力が若干の内働を爲し斷えず勢力の消費を起すべし第三十一圖に於て $F$ は活荷重を載する場合の部材の應力にして其方向は材軸の方向の變動を示し $R$ は滑面に作用する摩擦力なり $f$ を滑面の摩擦とすれば

$$R = f \cdot F$$

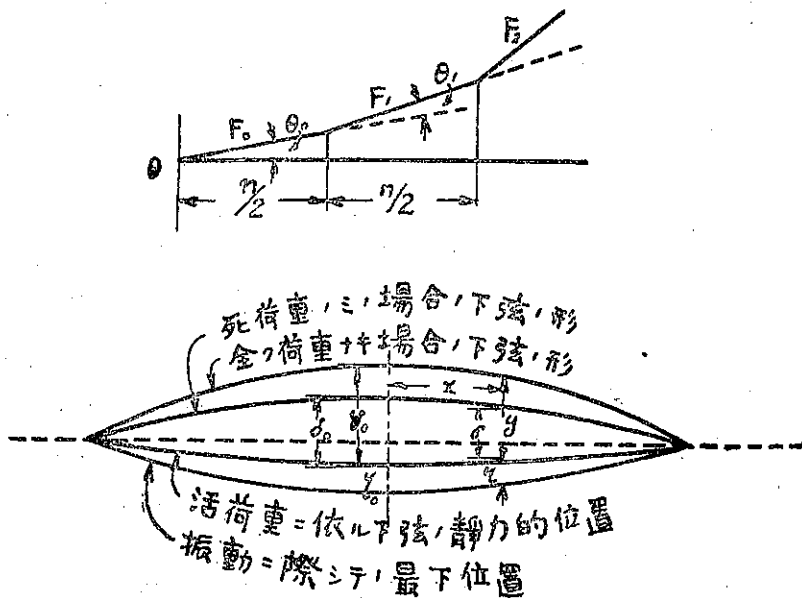
故に一往復振動間に $R$ のなす働(Work done)は

$$4f \cdot F \cdot r \cdot \theta$$

鑲釘接合にては滑動少なく勢力の消費も大ならず銻結構造に於ても上弦材は多

く連續せるを以て勢力消費は主として下弦材及び腹材の端に於て起るべし今下弦材の場合を考ふるに(第三十二圖)桁の中央に於ける鉛直線を縦軸とし活荷重に依る下弦の靜力的位置を横軸として振動に依る最下位の下弦の位置を現はせば

第 三 十 二 圖



$$\eta = \eta_0 - ax^2 = \eta_0 - \frac{4\eta_0}{l^2} x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{8\eta_0 x}{l^2} \quad \therefore \theta_0 \div \frac{8\eta_0}{nl} = \theta_1 = \dots\dots$$

今等布死荷重を  $w$  等布活荷重を  $p$  とすれば中央に於ける弦材の應張力  $F_0$  は

$$F_0 = \frac{(w+p)l^2}{8h} = \frac{48}{5} \cdot \frac{EIy_0}{hl^2}$$

茲に構は並行弦にして其の高さを  $h$  とす

然るに彎曲力率の配置は拋物線狀なるを以て弦材應力も亦同様にして

$$F_x = \frac{48}{5} \cdot \frac{EIy_0}{nl^2} \left(1 - \frac{4}{l^2} x^2\right)$$

故に

$$F_0 = \frac{48}{5} \cdot \frac{EI}{hl^2} y_0, \quad F_1 = \frac{48}{5} \cdot \frac{EI}{hl^2} y_0 \left(1 - \frac{4}{n^2}\right)$$

$$E_2 = \frac{48}{5} \cdot \frac{EI}{hl^2} y_0 \left( 1 - \frac{4 \times 2^2}{n^2} \right), \dots\dots\dots$$

故に一振動間に摩擦抵抗の爲す仕事  $w$  は桁の右半部に對して

$$\begin{aligned} w &= 4f (F_0 r \theta + F_1 r \theta + \dots\dots\dots) \\ &= 4f r \frac{8\eta_0}{nl} \cdot \frac{48EI}{5hl^2} y_0 \left( 1 + \frac{n^2 - 4}{n^2} + \frac{n^2 - 4 \times 2^2}{n^2} + \dots\dots\dots \right) \\ &= 4f r \frac{384EI}{5nlh^3} y_0 \eta_0 \left\{ n - \frac{8}{n^2} \left( 2^{\frac{n}{2}} - 1 \right) \right\} \\ &= 4f r \frac{(p+w)l}{nh} \eta_0 \left\{ n - \frac{8}{n^2} \left( 2^{\frac{n}{2}} - 1 \right) \right\} \end{aligned}$$

然るに振動に際して桁の半部の有する位置の勢力  $E_p$  は

$$E_p = \frac{p+w}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \eta dx = \frac{p+w}{2} \int_0^{\frac{l}{2}} \left( \eta_0 - \frac{4\eta_0}{l^2} x^2 \right) dx = \frac{p+w}{6} \eta_0 l$$

故に一回の振動に因り摩擦によりて失ふ勢力の割合は

$$\lambda = \frac{w}{E_p} = \frac{24f r}{h} \left\{ 1 - \frac{8}{n^3} \left( 2^{\frac{n}{2}} - 1 \right) \right\}$$

然るに右邊大括弧内の値は  $n$  が 6 乃至 12 に對して略 18 なり故に

$$\lambda \doteq 18f \frac{r}{h} \dots\dots\dots (19)$$

若し腹材の影響を下弦のそれと略同等なりとすれば

$$\lambda \doteq 36f \frac{r}{h} \dots\dots\dots (19')$$

上弦材も全部鉋を介して連絡する時は

$$\lambda'' \doteq 54f \frac{r}{h} \dots\dots\dots (19'')$$

今  $f=0.2$ ,  $r=5'$ ,  $h=30'$  とすれば

$$\lambda = \frac{1}{20}, \quad \lambda' = \frac{1}{10}, \quad \lambda'' = \frac{3}{10}$$

即  $\lambda$  の値は普通の場合は一割内外と見做して可なり

(三)外部摩擦抵抗 桁が振動する時下弦材は伸縮するを以て自由端は之に伴ふて前後に往復運動を爲す然るに支點は轆子又は承飯上に乗れるを以て往復運動に對して鉛直反力に比例する摩擦抵抗を及ぼし爲めに勢力の消費を生ず今端の運動の

半振幅を  $\zeta$  とすれば一往復に摩擦力に對して爲す仕事は

$$w = 4 \zeta f R$$

今弦材に作用する應力度を凡て一樣なりと假定して之を  $\sigma$  とすれば桁振幅の  $1/2$   $\eta_0$  は

$$\eta_0 = \frac{5}{24} \cdot \frac{\sigma l^2}{E h}$$

而て

$$\zeta = \frac{\sigma}{E} \cdot l = \frac{24}{5} \cdot \frac{h}{l} \eta_0$$

且つ

$$R = \frac{(w+p)l}{2}$$

故に

$$w = 4 \cdot f \cdot \frac{24}{5} \cdot \frac{\zeta}{l} \eta_0 \frac{(w+p)l}{2}$$

然るに振動に際して桁の有する最大位置の勢力は  $\{(p+w)/3\} \times \eta_0$  なるを以て外部摩擦に依りて一振動に失ふる所の勢力の割合  $\lambda_1$  は

$$\lambda_1 = \frac{144}{5} \cdot f \cdot \frac{h}{l} \dots \dots \dots (20)$$

滑面に對しては

$$f = 0.2$$

輻子を有する時は  $f = \frac{c}{r}$ ,  $r$  は輻子の半径(吋)  $c = 0.02$

今輻子端にして  $h = 30'$   $l = 200'$ ,  $f = \frac{0.02}{6''}$

$$\lambda_1 = \frac{144}{5} \cdot \frac{0.02}{6} \times \frac{30}{200} = 0.0144$$

滑面を有する鉸桁にして  $\frac{h}{l} = \frac{1}{10}$  なる時は

$$\lambda_1 = \frac{144}{5} + 0.2 \times \frac{1}{10} = 0.576$$

即ち鉸桁に於ては摩擦は著しき影響を與ふ輻子なき場合に於ては振動の爲めに生ずる弦材の應力が摩擦  $f \cdot R$  を超えざる間は端に於ける運動起らず (完)

Values of C in  $T = C l^2 \sqrt{\frac{w+p}{I_c}}$

C

for Plate Girders.

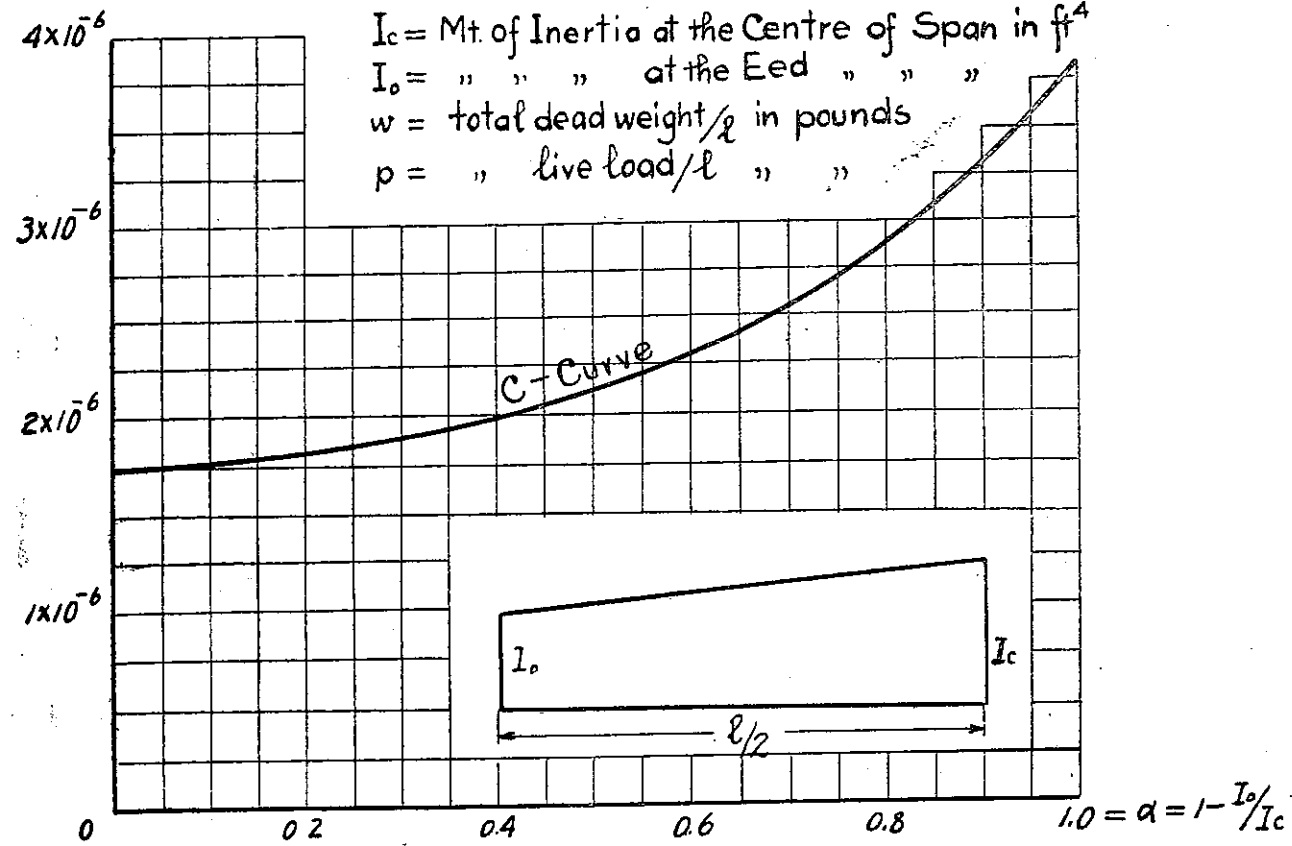
$l$  = Span length in ft

$I_c$  = Mt. of Inertia at the Centre of Span in  $ft^4$

$I_o$  = " " " at the Eed " " "

$w$  = total dead weight/ $l$  in pounds

$p$  = " live load/ $l$  " " "



122-1

Values of  $C$  in  $T = Cl^2 \sqrt{\frac{w+p}{I_c}}$

for Bridge Trusses.

$l$  = Span length in ft

$w$  = total dead weight/ft in lbs.

$p$  = total live load/ft in lbs.

$I_c$  = Mt. of Inertia at the Centre of Span in  $ft^4$

$I_b$  = " " " at the End " " "

$b = \log \frac{I_c}{I_b} / \log \frac{n}{2}$

$n$  = No. of panels.

