論説報告

土木學會誌 第七卷第五號 大正十年十月

水路ノ呑口及ビ吐口ニ於ケル水流特ニ河口ノ水流ニ就イテ

會員 工學士 山口 昇

目次

緒論

水流ニ關スル研究ハ今日ノ所デハ不幸ニシテ未ダ理論物理學ニ其ノ基礎ヲ置ク動水力學 (Hydrodynamics) ト實驗物理學ニソノ基礎ヲ置ク水理學 (Hydraulics) トノ間ニ著シキ懸隔ノ存スル爲メニ一元的ニ體系ヲナスニ至ラナイ此事ハ物理學的ニ嚴密ニ水流研究ヲナスモノニ取ツテ極メテ重大ナル問題デアラネバナラナイ而シテ多クノ學者ガ此レガ解決ニ多大ノ精力ヲ費シツヽモ不幸ニシテ今日ノ所此ノ懸隔ハ未ダ取除カルベクモ見エナイ

然シ乍ラ水流利用ヲ目的トスル水理學者ノ間ニ於テハ實驗ニソノ基礎ヲ有スル水理學的ノ方法デ今日デハ多クノ場合ニ不都合ナキ程度ノ精密ナル計算ヲナスコトヲ得ルニ至ツタ例ヘバ斷面ニ大ナル變化ナキ河川運河ニ於ケル定流又ハ斷面ガ極端ニ急變スル堰缺口等ノ定流ニ關シテハ多クノ實驗的研究ノ結果相當信頼スルニ足ルベキ實驗式ヲ發案サレテキル只一ツ今日マデ斯クノ如キ水理學者ノ研究ニ洩レタル感ガアルノハ上記ノ二極端ノ場合ノ中間ニ位スベキ河川運河ノ呑口及吐口ノ水流ニ就イテノ計算デアル樣ニ思ハレル從來斯カル問題ニ關シテ記述的ノ說明ヲ與ヘタ人々ハ少ナクナイガ

多少トモ理論的計算ヲ敢テシタ例ハ甚ダ少ナイ様デアル此レハ寧ロ不思議ノ事デ或ハ著者ノ寡聞ノ罪ニ歸セラルベキモノカモシレナイ

斯クノ如キ問題ヲ解決セントスル際動水力學ト水理學トノ懸隔ヲ取除カズシテ此ヲ行フニ當リ最モ直接ニ效果ヲ擧ゲ得ル方法トシテヤハリ實驗ニ基礎ヲ置クニアルコトハ明デアルガ不幸ニシテ著者ハ實驗ニヨル機會ヲ有セナカツタ爲メニ甚ダ大膽デハアルガ大ナル懸隔アルヲ無視シテ動水力學ノ數學的所産ト水理學ノ實驗的所産トヲ結合シテ此ノ問題ノ解決ヲ試ムルヨリ外ナイノデアル斯クノ如キハ元ヨリ理論上可成ニ無理ナル方法デアル事ハ明デアルガ多少ノ嚴密度ヲ犧牲ニ供スルトモ斯クノ如キ方法デ萬一實用上差支ナキ結果ヲ導出スルコトガ出來レバ實驗ニ基礎ヲ置イテ導出サレタル實驗式ト同價値ノモノデアラウト思フ即チ著者ハ此處ニ動水力學ノ理論ヲ實驗ノ代リニ基礎條件トシテ使用シテ一個ノ實用式ヲ導出スル目的デアル而シテ其ノ結果ヲ二三先賢ノ調査記錄ト照應セシメテ見タ次第デアルガ此處ニモ不幸ニシテ充分ノ材料ヲ見出セナカツタ從ツテ導出シタル結果ガ果シテ凡テノ場合ニ普遍的ニ適合スルヤ否ヤニ就イテハ甚ダ疑ナキ能ハズ此レ著者ガ本文ヲ掲ゲテ斯クノ如キ實際問題ニ多クノ經驗ヲ有セラルヽ諸先輩ノ御高敎ニ浴セントスル次第デアル

一　水流ノ性質一斑及著者ノ研究順序

おすぼーん・れーのるづ敎授ノ有名ナル實驗 (Osborne Reynolds; Scientific Papers Vol. II, p. 51–p. 105; p. 153–p. 162) ニヨレバ直線管内ヲ流レル水流ニハ二種類アリ或限界速度ヲ境トシテ其レヨリ小ナル流速ニ對シテハ水流ハぽあずいる (Poiseuille) ノ實驗トシテ知ラレテヰル整正ナル平行層ヨリナル薄層運動 (Laminar motion) ヲナシ限界速度以上ニ達スレバ水流ハ渦動及振動ヲ混ヘタル極メテ複雜ナル亂流 (Sinuous flow, or turbulent flow) ヲナス而シテ其ノ限界速度ハ水ノ粘性ニ比例シ管ノ大サニ逆比例スルトイフ今限界速度ヲ ω_0 管ノ半徑ヲ a トシ粘性ヲ ν ト置ケバ

$$\frac{\omega_0 a}{\nu} \approx 1{,}000$$

通常ノ水ニ於テハνハ〇・〇一八ナルヲ以テ半徑一糎ノ管ニ於テハ限界速度ハ毎秒一八糎ノ小ナル値トナル（Lamb: Hydrodynamics p. 592）此ノ限界速度ハ尙管壁ノ粗滑及管ノ彎曲等ニヨリテ大イニ變化スル上ノ結果ハ滑カナル直線硝子管ニ就イテノ結果デアルカラ吾々ノ河川運河等ニ於テハ限界速度ハ尙一層小ナル値ヲ有スベシ即チ吾々ノ河川運河ニ於テ起ル水流ハ殆ンド凡テ亂流ト見テ差支ナシ

薄層運動ノ範圍ニ於テハ水ニ多少ノ粘性ヲ考入シテ純粹ナル動水力學ノ理論ニヨリ直線ニ流レル場合ハ實際トヨク一致スル結果ヲ誘導シ得斯クノ如キ水流デハ水流ノ抵抗ハ速度ノ一乘ニ比例スル場合デアッテ實用ニ供セラルヽコト少ナイ而シテ遙カニ實際的ナル亂流ニ關シテハ動水力學ノ理論ニシテ適合スベキモノハ今日ノ所デハ未ダ求メラレテキナイ

扨吾々ノ問題トスル呑口及吐口ニ於テハ斷面及水流ノ方向ガ各所ニ異ルベキニヨリ吾々ハ先ヅ以ッテ流線ノ方向ヲ決定スルコトガ肝要デアル然シ乍ラ上述ノ如ク直線ニ流レル亂流ニ關シテモ既ニ動水力學理論ノ解決ハ困難デアルノデ此ノ方法ニヨッテ呑口及吐口ノ流線ヲ見出スコトハ全ク不可能トイフベク一歩退イテ粘性理論ニヨル薄層運動ト見做シテモ既ニ呑口吐口等ノ解決ヲ求ムルコトハ極メテ複雜ナル數式ヲ生ジ此レガ解決ハ甚ダ困難デアル

著者ハ此處ニ於テ致シ方ナク粘性ヲ無視シ完全液體ト考ヘテ導出シタル動水力學ノ流線ヲ種々ナル境界條件ニ對シテ求メ之ヲ適宜ノ尺度ヲ以テ描出シテ實際ニ起ル流線ト照應セシメタノデアル而シテ適宜ニ照應シタナラバ其ノ流線內ノ水流ハ凡テ完全液體ノ流線ノ性質ヲ帶ブルモノト考ヘテ各點ノ速度及勾配等ヲ計算スルコトヽシタ勿論實際河口等ニ於テ起ル水流ハ細カク檢察スレバ亂流ヲ多分ニ有シテキルケレドモ大體ニ於テ甚シキ屈折ナキ流線ヲナスコトハ多クノ浮子等ニヨル實測ノ示ス所デアル斯クノ如クシテ亂流ヲ無視スルコトハ水流ノ微量ニツイテ分子的ニ研究スルノデナク或有限ノ範圍ヲ大マカニ捕ヘ來ッテ其ノ全體トシテノ運動ノ平均値ヲ考ヘレバ足リル場合ニハ其ノ結果ニ性質的ニ亘ル矛盾ハ來サナイト思ハレル唯數量的ニハ多少ノ差異ヲ生ズルデアラウガ其レハ所謂實驗係數ノ導入ニヨッテ適宜實驗ニヨッテ補正シウルモノデアル粘性ヲ無視スルコトハろーど・れーれー（Lord Rayleigh）ニヨレバ亂流ノ場合ニハ却ッテ實

際ニ近イ (Lamb: Hydrodynamics p. 593) トイフコト又だるしーノ實驗もろー (Morrow) ノ研究等ニヨレバ亂流ノ際ノ平均速度ハ存外斷面ノ各點ニ於テ大差ナク單ニ壁ニ極メテ近キ部分ニノミ著シク差ヲ表ハス (Lamb: Hyd. p. 593) 等ノ事ヨリ個體ニ接觸スル附近ヲ除イテハ完全液體ノ流線論ハ可ナリニ近似的ノ適合カ可能ナルカノ如ク察セラレル

完全液體ノ流線論ハ水流ハ何等粘性摩擦力ノ如キ應剪力ナク且其ノ運動ハ非旋廻性 (Irrotational) ナリトイフ假定ノ下ニ生マル非旋廻性トイフハ水流中ノ如何ナル點ニ微量ヲ取ツテ見テモ其ノ運動ニ廻轉性ヲ有セザルコトデアツテ斯カル場合ニ於テハ水流ヲ研究スルニ一ツノ補助函數ヲ用ヒテ甚ダ解決ヲ容易ニスルコトヲ得此ノ補助函數ヲ速位 (Velocity potential) トイフ即非旋廻性ノ完全液體流ニ於テハ速位ガ成立スル而シテカヽル時ハ水流運動ハ力學的考察ヲ離レテ單ニ動學的 (Kinetics) ニ歸セラレ從テ單純ナル數學ノ應用ヲ自由ナラシムル便ガアル因テ著者ハ此ノ場合ニ基礎ヲ措キ其ノ結果ヲ漸次旋廻性ノ運動亂流ニ擴張セントス

次ニ問題トナルハ水流ヲ形成スル水分子ガ質量ヲ有スル爲メニ水流ガ急角度ニ屈折スル個體面ニソウテ流ルヽトキハ水分子ハ慣性ヲ有シ屈折點ニ於テハ個體面ヲ離レルモシ斯クノ如キ空所ヲ充タスニ空氣ヲモツテスレバ水流ハ噴射 (Jet) ノ狀況ヲ呈スルニ至ル噴射ノ理論的研究ハ既ニへるむほるつ及さるひほふニヨツテナサレテキルケレドモ河川運河ノ呑口及吐口ニ於テハ空所ヲ充タスニヤハリ水ヲ以テスル此爲メニ其ノ境界面ハ著シク動搖ヲ來タスコトハれーのるづノ實驗ニヨツテ知ラレテキルれーれーハ斯クノ如キ動搖ハ境界面ヲ少シク離レヽバ其ノ影響ハ大シタモノデハナイト言ツテキルガろーど・けるびん (Lord Kervin) ハコレト全ク反對ノ說ヲ出シテキル (Lamb: Hyd. p. 97–99) 吾人ノ場合ニ於テハ水流ガ噴射ヲナシテ不變斷面ヲ有シ長ク海中ニ整流 (Uniform flow) トシテ流入スル樣ナコトハ考ヘラレナイ此事ハ餘論ニ於テ詳シク述ベル

次ニ運動ヲ三軸的ニ考ヘルコトハ數學ノ應用ヲ複雜ニシテ自然極メテ小範圍ノ解決ヨリ望マレナイ呑口吐口ノ如キ場合

ノ解決ハ見出シ難イ從テ著者ハ平面ト縱斷面トヲ別途ニ取扱ツテ問題ヲ凡テ二軸的タラシメ然ル後ニ其ノ兩者ヲ多少ノ精密度ヲ犧牲ニシテ結合スルコトヽシタ

以上述ベタコトハ凡テ定流 (Steady flow) ニ關シテノ積リデアルガ實際ニ河口等デ起ル水流特ニ潮汐干滿ノアル河口ノ如キハ時間ガ重要ナル要素ヲナシテヰル斯クノ如キ場合ノ理論的ノ解決ハ著者ニトツテハ未ダ不可能ノコトデ此等ニツイテハ餘論ニ於テ一言觸ルヽニ過ギナイ擧ゲテ後日ノ研究ニ讓ル次第デアル

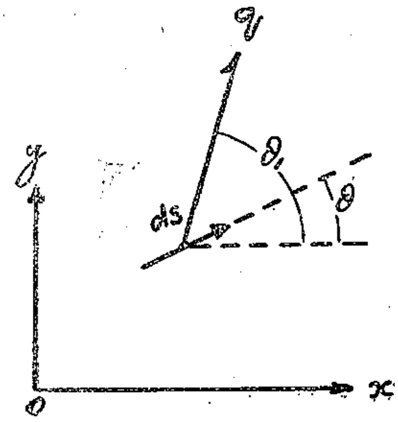
二 流線函數 (Stream function) ト速位 (Velocity potential)

非壓縮性液體ノ連續式 (Equation of continuity) ハ二軸的關係ニ於テ通常ノ書キ方ニ從ヘバ次ノ如シ

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \cdots\cdots\cdots (1)$$

コヽニ u v ハ x 及 y 軸ニ沿フ分速度デアル今或函數 ψ ヲ次ノ如キ關係ニヨツテ導キ來ルトキ

$$u=-\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad \cdots\cdots\cdots (2)$$



第一圖

ψ ハ(1)ノ條件ヲ滿足スル ψ ハ非壓縮性液體ノ運動ヲ研究スル爲メニ至便ナル一種ノ補助函數デアツテ其ノ物理的意味ハ次ノ如ク說明サレル

ψ ノ全微分ヲトリ

$$d\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\psi}{\partial y}dy=v\,dx-u\,dy$$

$$=q\sin\theta_1 ds\cos\theta-q\cos\theta_1 ds\sin\theta=q\,ds\sin(\theta_1-\theta)=q_n ds$$

但 q = 速度, ds = 線要素 (Line element),

q_n = ds ニ直角ノ分速度何レモ矢ノ方向ヲ以テ正トス

即 $d\psi$ ハ單位時間ニ ds ヲ超エテ右ヨリ左ニ流レタ流體ノ量ヲ示ス $\psi=$ Const. ナラバ $d\psi=0$ 即 ds ヲ超エテ流レル水量ハ零、換言スレバ $\psi=$ Const. ハ流體ノ流レル道行ヲ示スモノト考ヘラル因テ ψ ヲ流線函數 (Stream function) ト稱スル

(1)(2)ノ關係ハ水流ガ廻旋的ナル場合ト雖モ成立スル非廻旋的ナルトキハ此ノ外ニ尚次ノ如キ函數 φ ガ存在スル

$$u=-\frac{\partial\varphi}{\partial x},\qquad v=-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)ニヨリ

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

或ハ簡單ニシテ次ノ如ク書ク

$$\nabla^2\varphi=0\quad\text{or}\quad\nabla\varphi=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4')$$

φ ハ位函數 (Potential function) トシテ知ラレタルモノ特ニコノ場合ハ速度ニ關係アルヲ以テ速位 (Velocity potential) トイフ

速位ガ存在シテ分速度 u v ヲ(3)式ニヨリ φ ニヨッテ決定サル丶場合ニハ次ノコトガイヘル

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

此式ノ u 及 v ニ(2)式ヲ入レテ

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

又ハ

$$\nabla^2\psi=0\quad\text{or}\quad\nabla\psi=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6')$$

即非壓縮性ニシテ且非旋廻的ナル水流運動ニ於テハ流線函數ニ關シテモ恰カモ速位函數ト同一ノ性質ヲ與ヘラレル

此ノ事ハ φ ト ψ トハ置キ換ヘテモ依然トシテ凡テノ條件ヲ滿足スルコトヲ意味スル即非旋廻的水流ニ於テハ一ツノ運動

ニ對シテ常ニコレニ共軛ナル他ノ運動ガ存在スルト云ヘル其ノ共軛ナル運動ニ於テハψヲ速位トシφヲ流線函數トスルモノデアル又 $\varphi = \text{Const.}$ ト $\psi = \text{Const.}$ トハ直交線 (Orthogonal trajectories) ヲナス

$$\because\quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}=-uv+(-v)(-u)=0$$

畢竟スルニ非壓縮性液體ノ非旋廻的運動ヲ論ズルニハ(4)及(6)ヲ滿足スルφ及ψノ二函數ヲ求メナケレバナラナイコレニハ函數論ニ於ケル共軛函數 (Conjugate functions) ノ理論ヲ用フルガヨイ

φ及ψヲ組合セテ復素函數 $\varphi+i\psi$ ヲ作リ,コレヲ x y ヲ組合セタル復素數 $x+iy$ ノ一意函數 (Monogenous function) ト考ヘ

$$\varphi+i\psi=f(x+iy) \qquad \cdots\cdots (7)$$

又ハ簡單ニスル爲メ

$$\varphi+i\psi\equiv w,\quad x+iy\equiv z \qquad \cdots\cdots (8)$$

ト置ケバ

$$w=f(z) \qquad \cdots\cdots (7')$$

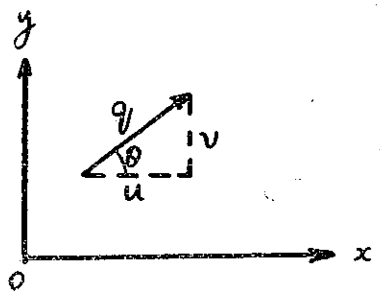
函數論ニ從ヘバ復素函數 w ノ復素數 z ニ關スル微分ハ

$$\frac{dw}{dz}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\psi}{\partial x} \qquad \cdots\cdots (9)$$

ヲ以テ表ハスコトヲ得 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ $\frac{\partial\psi}{\partial y}$ ヲ(2)(3)ニヨリ u v ヲ以テ表ハセバ

$$\frac{dw}{dz}=-u+iv$$

$$-\frac{dz}{dw}=\frac{1}{u-iv}=\frac{1}{q}\,\frac{1}{\left(\frac{u}{q}-i\frac{v}{q}\right)}=\frac{1}{q}\left(\frac{u}{q}+i\frac{v}{q}\right) \qquad \cdots\cdots (10)$$



第二圖

$$\frac{u}{q} = \cos\theta, \qquad \frac{v}{q} = \sin\theta$$

$$\therefore \quad -\frac{dz}{dw} = \frac{1}{q}(\cos\theta + i\sin\theta) \quad \cdots\cdots (11)$$

$$\left|-\frac{dz}{dw}\right| = \frac{1}{|q|} \quad \cdots\cdots (12)$$

即 $-\frac{dz}{dw}$ ノ絶對値ハ速度ノ逆數値ヲ與ヘ $-\frac{dz}{dw}$ ノ徽角 (Argument) θ ハ速度ノ方向ヲ與ヘル

(7)式ヲ以テ表ハス函數fノ形ヲ種々ナル場合ニ對シテ求メルニハ通常逆ニ色々ノ形ノfヲ作ツテソノ周界條件ヲ滿足スルヤ否ヤヲ檢シテ見ル方法ヲ用ヒル而シテ周界條件ヲ滿足スルfノ形ガ求メラルレバφ及ψヲx及yニヨツテ表ハスコトモ出來從ツテφ及ψノ圖形ヲ描クコトガ出來ルノデアル

幸ニシテfノ種々ナル形ガ既ニ先賢ノ手ニヨツテ求メラレテキル吾々ノ必要トスル場合ニ關シテハらむノ動水力學書ニ記載サレタル二ツノ場合ヲ先ヅ吟味スル必要ガアル

三　らむノ動水力學ニ載レル二流線式

I　二ツノ薄キ平行壁ヲ有スル運河ノ入口又ハ吐口

コレハへるむほるつノ考案ニナル有名ナモノデアル

$$z = x + iy, \qquad w = \varphi + i\psi \quad \cdots\cdots (8)$$

$$w = f(z) \quad \cdots\cdots (7')$$

此ヨリ逆函數ヲ求メ

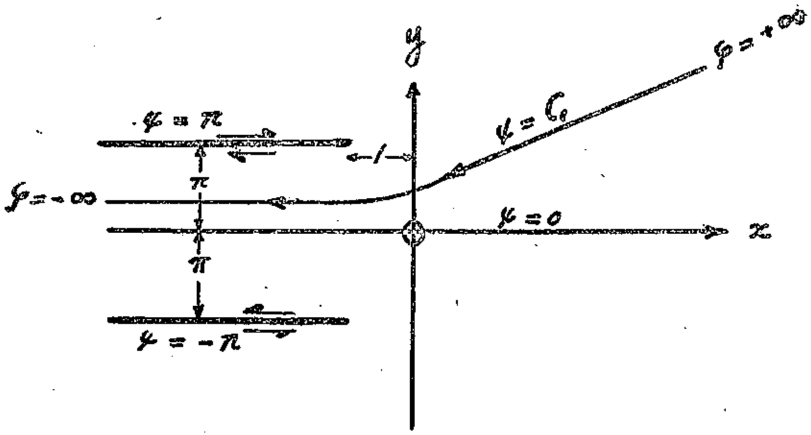
$$z = f_{-1}(w) \quad \cdots\cdots (13)$$

トスへるむほるつガ平行壁ノ場合ニ與ヘタルハ此ノ形ニ於テヾアル即

$$z = w + e^{w} \quad \cdots\cdots (14)$$

$$\text{or} \quad x = \varphi + e^{\varphi}\cos\psi, \quad y = \psi + e^{\varphi}\sin\psi \quad \cdots\cdots (14')$$

此ヨリ流線 $\psi=0$ ハ x 軸ト合スルコトヲ知ル又 $\psi=\pm\pi$ ハ $x=-\infty$ ヨリ壁ノ外側ニ沿フテ來リ $x=-1$ ニ於テ急ニ



第三圖

折レ曲リ內壁ニ沿フテ再 $x=-\infty$ ニ去ル流線ヲ示ス而シテ $0<\psi<\pi$ ナル値ヲモツ ψ ハ $y>0$ ナル上半面ヲ $0>\psi>-\pi$ ナル値ヲモツ ψ ハ $y<0$ ナル下半面ヲ蓋ヒ兩壁ノ外側無限大ノ距離ヨリ來リ兩壁ニ挾マレタル平行線トナリテ又無限大ノ距離ニ走ル即チコレハ呑口ノ狀況ヲ示ス

(11)(12)ニヨリ $-\frac{dz}{dw}$ ノ絕對値ハ速度ノ逆數値ヲ其ノ徵角ハ速度ノ方向ヲ與ヘル(14)ニツイテ此計算ヲ行ヘバ

$$-\frac{dz}{dw} = -1 - e^{w} = -1 - e^{\varphi}\cos\psi - ie^{\varphi}\sin\psi \quad \cdots\cdots (15)$$

此値ヲ檢スルトキハ極メテ大ナル φ ノ正値ニ對シテハ $-\frac{dz}{dw}$ ハ $-\infty$ ニ近ヅク從テ速度ハ0ニ近ヅク又 φ ノ極メテ大ナル負値ニ對シテハ $-\frac{dz}{dw}$ ハ -1 ニ近ヅク從テ速度 q ハ大サ1方向ハ x ノ負ノ方向ニ向フコトヲ知ル

吐口ノ場合ニ於テハ單ニ w ノ附號ヲ變ズレバ可ナリ此コトハ(15)ニ於テ明カデアル然ルトキハ

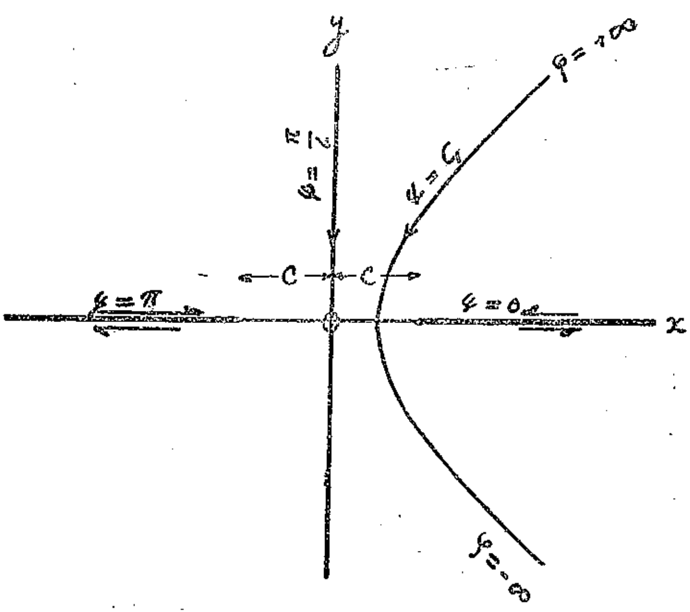
$$\left.\begin{aligned} & z = -w + e^{-w} \\ \text{or} \quad & x = -\varphi + e^{-\varphi}\cos\psi \\ & y = -\psi - e^{-\varphi}\sin\psi \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (16)$$

$$-\frac{dz}{dw} = 1+e^{-w} = 1+e^{-\varphi}\cos\psi - ie^{-\varphi}\sin\psi \quad \cdots\cdots(17)$$

コノ流線ノ一般ノ景況ハ別紙附圖第一ニアリ

II 一ツノ薄キ平面隔壁ノ缺口ヲ通ジテ片側ヨリ他ノ側ニ流出スル場合

斯クノ如キ水流ハ次ノ式ニテ與ヘラレル



第四圖

$$z = c\cosh w = \frac{c}{2}(e^{w}+e^{-w})$$

or

$$\left.\begin{aligned} x &= c\cosh\varphi\cos\psi = \frac{c}{2}(e^{\varphi}+e^{-\varphi})\cos\psi \\ y &= c\sinh\varphi\sin\psi = \frac{c}{2}(e^{\varphi}-e^{-\varphi})\sin\psi \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(18)$$

$$\frac{x^2}{c^2\cosh^2\varphi} = \cos^2\psi, \quad \frac{y^2}{c^2\sinh^2\varphi} = \sin^2\psi$$

$$\therefore \quad \frac{x^2}{c^2\cosh^2\varphi} + \frac{y^2}{c^2\sinh^2\varphi} = 1 \quad \cdots\cdots(19)$$

∴ $\varphi = \text{Const.}$ ハ同焦楕圓ノ一族ヲ作ル其焦點距離ハ

$2\sqrt{c^2\cosh^2\varphi - c^2\sinh^2\varphi} = 2c$ ナリ

次ニ(18)ヨリφヲ逐出ストキハ

$$\frac{x^2}{c^2\cos^2\psi} - \frac{y^2}{c^2\sin^2\psi} = 1 \quad \cdots\cdots(20)$$

∴ $\psi = \text{Const.}$ ハ同焦雙曲線ノ一族ヲ爲シ其焦點ハ楕圓ノソレト同様ナリ

隔壁ハ x 軸ト一致シ流線 $\psi=0$ ハ $x=+\infty$ ヨリ隔壁ノ $y>0$ ノ側ニ沿フテ來リ $x=+c$ ニ於テ急ニ折レ曲リ壁ノ $y<0$ ノ側ニ沿ヒテ再ヒ $x=+\infty$ ニ去ル $\psi=-\pi$ ハコレト對稱的ニ $x=-\infty$ ヨリ壁ノ $y>0$ 側ニ沿ヒテ來リ $x=-c$ ニ於テ折曲リ壁ノ $y<0$ 側ニ沿ヒテ再ヒ $x=-\infty$ ニ去ル $\psi=\frac{\pi}{2}$ ハ y 軸ニ一致シ $y=+\infty$ ヨリ $y=-\infty$ ニ至ル $0<\psi<\pi$ ノ間ニアル ψ ノ値ハ全平面ヲ蓋フ流線ヲ與フ即(18)ハ x 軸ヲ隔壁トシ其一部 $2c$ ナル缺口ヲ通ジテ $y>0$ 側ヨリ $y<0$ 側ニ流入スル水流ヲ示ス而シテ其流線ハ凡テ雙曲線狀ヲナシ等位線 (Equi-potential line) ハ凡テ楕圓ヲナス任意ナル點ノ速度ハ

$$-\frac{dz}{dw}=-c\sinh w=-\frac{c}{2}(e^{w}-e^{-w})$$

$$=-\frac{c}{2}\left\{(e^{\varphi}-e^{-\varphi})\cos\psi+i(e^{\varphi}+e^{-\varphi})\sin\psi\right\}\qquad\cdots\cdots(21)$$

$\varphi=\pm\infty$ ニテ $-\frac{dz}{dw}=\mp\infty$ 故ニ速度ハ零トナル缺口ニ於ケル速度ハ凡テ y 軸ニ平行トナルコレ(21)ニ於テ $\varphi=0$ トスルトキ實値 (Real value) 消滅スルニヨリ明カナリ此流線ノ一般ノ景況ハ別紙附圖第二ニアリ（此節及前節ニ關シテハ Lamb: Hyd. chap. 4 ヲ參照）

四 任意ナル角度ヲナス二隔壁ノ流線式

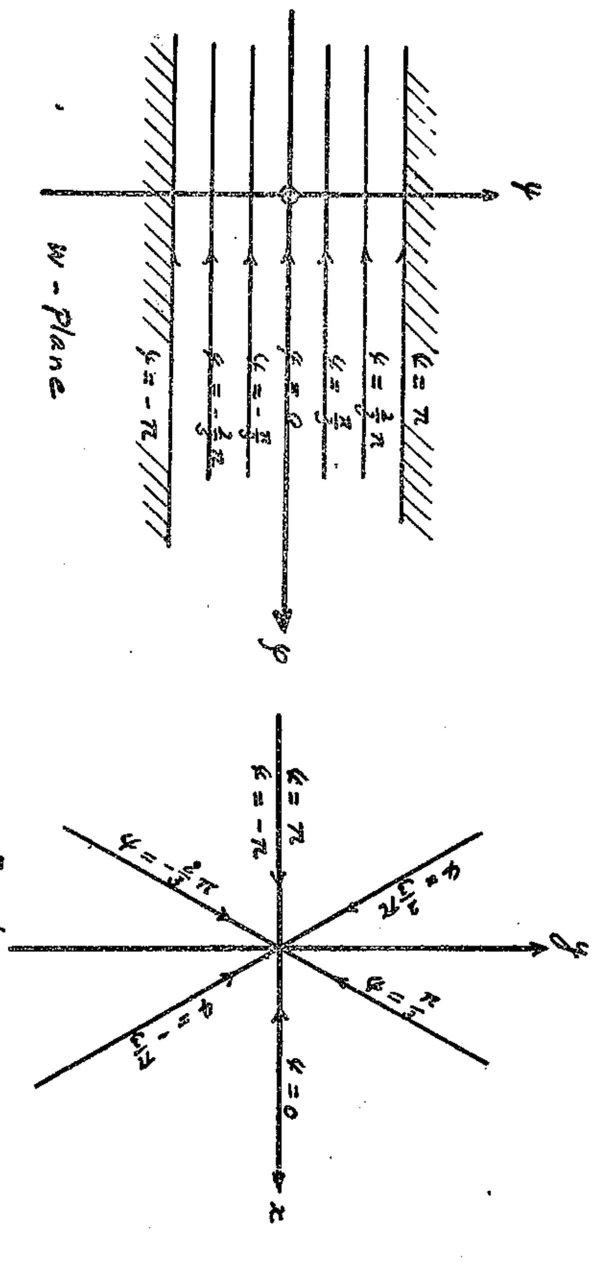
任意ナル角度ヲナス二隔壁ノ交點ノ附近ヲ缺口トシコレヲ通ジテ起ル水流ノ流線ヲ求ムルニ著者ハ函數論ノ基本定理タル等角投影 (Isogonale Verwandtschaften) ノ方法ヲ用ヒル

$\varphi\psi$ ヲ直角軸ニモツ平面ニ於テ φ 軸ニ平行ニシテ反對ノ方向ヲ有スル $-\pi\leqq\psi\leqq+\pi$ ナル流線ニヨリテ充タサレタル w 平面ヲ

$$z_1=e^{w}\qquad\cdots\cdots(22)$$

ナル關係ニヨリ x y ヲ直角軸トスル平面ニ投射スル時ハ流線 $-\pi \leqq \psi \leqq +\pi$ ハ無限大ノ距離ヨリ來ツテ原點ニ向ツテ集中スル放射狀ノ完全平面 (Complete plane) ヲナスコノ平面ヲ今 z_1 ト名付ケル

第五圖



次ニ二ツノ隔壁ノナス角ヲ θ トシ z_1 ヲ $2\pi-\theta$ ナル角ニテ表ハサルヽ部分平面ニ縮ムル爲メニ次ノ如キ投射ヲナス

$$z_1 = z_2^{\frac{2\pi}{2\pi-\theta}}$$

$$\therefore \quad e^w = z_2^{\frac{2\pi}{2\pi-\theta}}$$

$$z_2 = e^{\frac{2\pi-\theta}{2\pi}w} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (23)$$

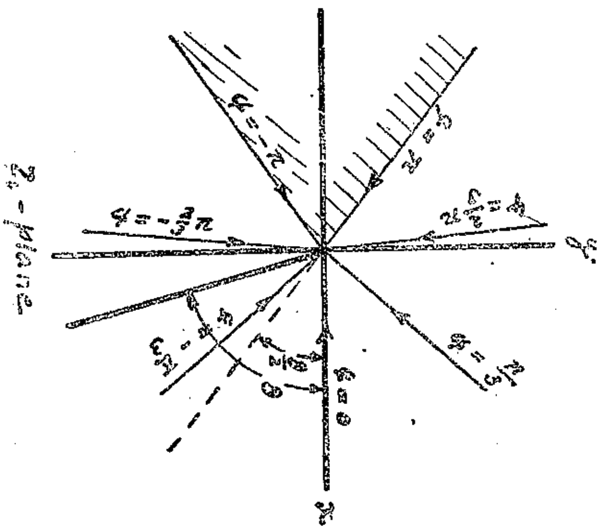
z_2平面ノ圖ニ於テ陰影ヲ施セル部分ハ取除カル

又原點ヲ起點トシテ限リナク四方ニ流出スル流線ハ z_1 ノ逆函數ヲ以テ表ハシ得即

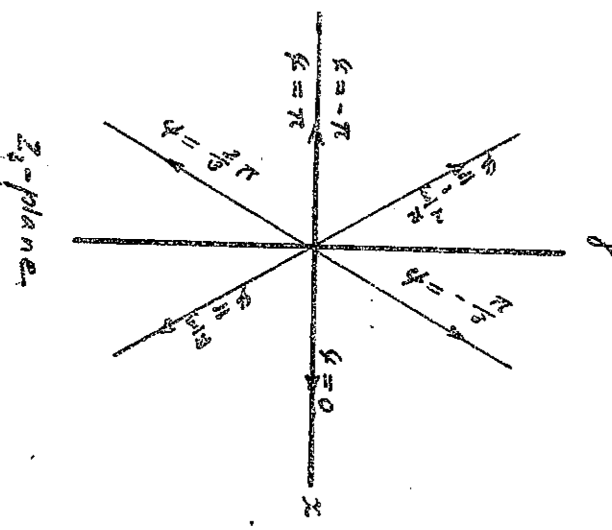
$$z_1 = \frac{1}{z_3}$$

此場合ϕノ正負ノ位置 z_1 ト相反スルコトヲ注意スルヲ要ス z_1 ニ w ノ値ヲ入レテ

$$z_3 = e^{-w} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (24)$$



第六圖

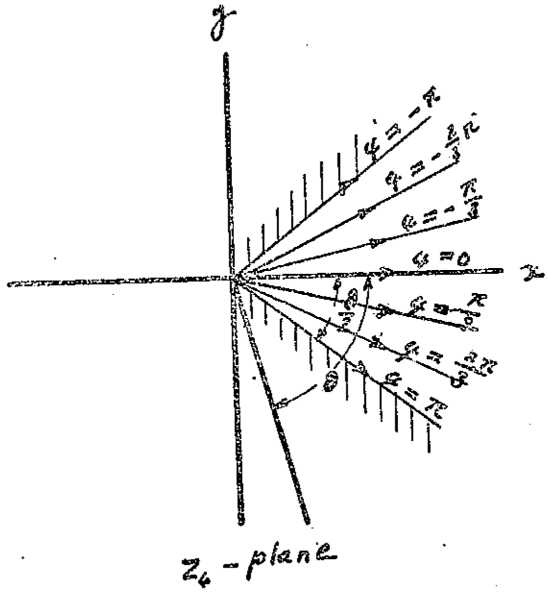


第七圖

次ニ之ヲ角θノ間ニ狹マレタル部分平面ニ縮メル爲メニ次ノ如キ投射ヲナス

$$z_3 = z_4^{\frac{2\pi}{\theta}}$$

$$\therefore \quad z_4 = e^{-\frac{\theta}{2\pi}w} \quad \cdots\cdots (25)$$



第八圖

扨吾人ハz_2トz_4ヲ適宜ニ結合シテ周界條件ヲ滿足セシムレバヨイ（等角投影ニ關シテハ Holtzmüller: Einleitung in die Theorie der isogonalen Verwandtschaften und der Conformen Abbildungen ヲ參照）z_2トz_4トハ已ニ我々ノ場合ニ對スル要素ヲ有スルヲ以テ此レ以上此要素ノ性質ヲ變更スル投影ヲ行ハズシテ單ニ此兩者ヲ加算スレバヨイ即z_2トz_4トノ結合ハ直線的ナルベシ最モ一般的ナル一次式ヲ以テ表ハセバ

$$z = Az_2 + Bz_4 + C \quad \cdots\cdots (26)$$

此處ニ$A\,B\,C$ハ境界條件ニヨリテ決定サルベキ復常數 (Complex constants.)

$$z = Ae^{\frac{2\pi-\theta}{2\pi}w} + Be^{-\frac{\theta}{2\pi}w} + C$$

簡單ノ爲ニ

$$\frac{\theta}{2\pi} = k, \quad \frac{2\pi-\theta}{2\pi} = k' \quad \text{or} \quad k+k'=1 \quad \cdots\cdots (27)$$

ト置ケバ

$$z = Ae^{k'w} + Be^{-kw} + C \quad \cdots\cdots (28)$$

$$A = ae^{\alpha i}, \quad B = be^{\beta i}, \quad C = ce^{\gamma i}$$

但 $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$, 實常數

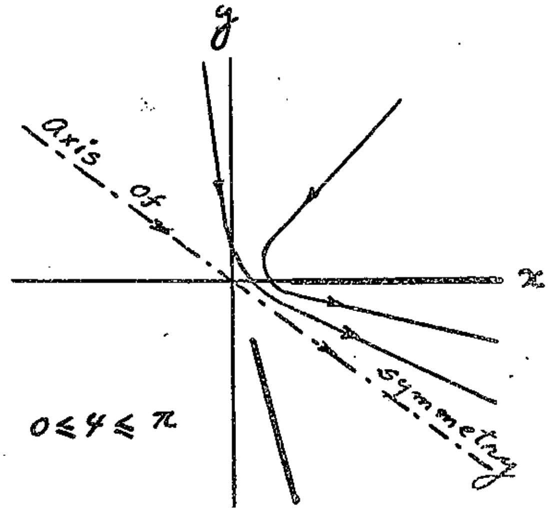
$$\left.\begin{array}{l} z = ae^{k'w+\alpha i} + be^{-kw+\beta i} + ce^{\gamma i} \\ \text{or}\ \ x+iy = ae^{k'(\varphi+i\psi)+\alpha i} + be^{-k(\varphi+i\psi)+\beta i} + ce^{\gamma i} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(29)$$

次ニ此式ニ充タスベキ周界條件ヲ導クニ先ダチ次ノ如キ簡單ナル場合ヲ考フ

$$z = z_3 + z_4 \quad \cdots\cdots(30)$$

此式ニ於テ z_3 及 z_4 ヲ $0 \leqq \psi \leqq \pi$ ニ制限スルトキハ第九圖ノ如キ場合トナル即流線ノ狀況ハヤヽ吾々ノ目的ニ近ク其對稱軸ハ x 軸ニ對シテ $-\frac{\theta}{2}$ ノ角ヲモツ

我々ノ場合即(29)ニ於テハ便宜ノ爲メ x y 兩軸ノ原點ヲ一方ノ隔壁ノ先端ニ置キ流線ノ對稱軸ハ之レヲ x 軸ニ平行ナラシメントスル此レヲ(30)ト對比セシメルトキハ(30)ノ全組織ヲ先ヅ $+\frac{\theta}{2}$ ナル角丈回轉スルヲ要ス夫レ故ニ(29)ノ z_3 及 z_4 ノ係數ハ $e^{\frac{\theta}{2}i}$ 又ハ $e^{k'\pi i}$ ナル共通値ヲモツ即(29)ニテ $\alpha = \beta = k\pi$



第九圖

$$z = e^{k'\pi i}\{ae^{k'w} + be^{-kw}\} + C \quad \cdots\cdots(31)$$

此ニ a b ハ實常數 C ハ復常數ニテ a b ハ單ニ大サヲ表ハシ C ハ全組織ノ直動 (Translation) ヲ示ス

(31) ニ於テ速度ノ逆數ヲ求ムルトキハ

$$-\frac{dz}{dw} = -e^{k'\pi i}\{k'ae^{k'w} - kbe^{-kw}\} \quad \cdots\cdots(32)$$

第十圖 $A\begin{pmatrix}\varphi=0\\ \psi=0\end{pmatrix}$ ニ於ケル速度ハ無限大トナルベキニヨリ

$$\left|-\frac{dz}{dw}\right|_{\substack{\varphi=0\\ \psi=0}}=\left|-e^{k\pi i}\{k'a-kb\}\right|=0$$

$\therefore\ k'a=kb$ ………………(33)

$\therefore\ z=ae^{k\pi i}\left\{e^{k'w}+\frac{k'}{k}e^{-kw}\right\}+C$ ………………(34)

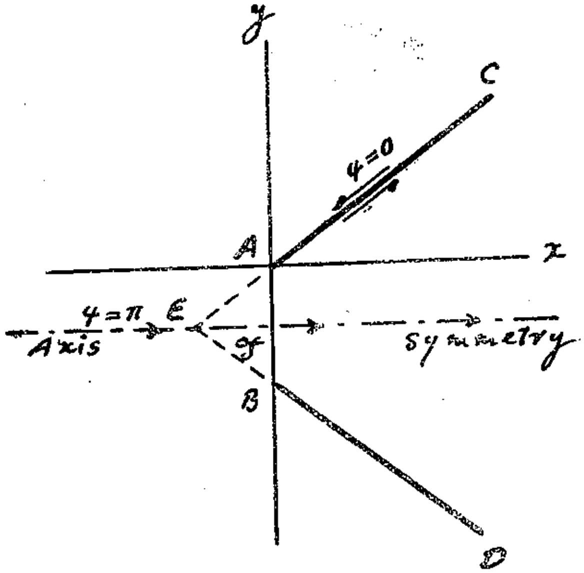
A ヲ原點トスル故ニ

$$(z)_A=ae^{k\pi i}\left\{1+\frac{k'}{k}\right\}+C=0$$

$\therefore\ C=-\frac{1}{k}\,ae^{k\pi i}$

$\therefore\ z=ae^{k\pi i}\left\{e^{k'w}+\frac{k'}{k}e^{-kw}-\frac{1}{k}\right\}$ ………………(35)

但 a ハ w ニ無關係ニシテ k ノ函數



第十圖

(35) ヨリ對稱軸ニ當ル流線 $\psi=\pi$ ヲ $x\ y$ ニテ表ハセバ

$$\left.\begin{aligned} x&=a\left\{-e^{k'\varphi}+\frac{k'}{k}e^{-k\varphi}-\frac{1}{k}\cos k\pi\right\}\\ y&=a\left\{-\frac{1}{k}\sin k\pi\right\}\end{aligned}\right\}$$

故ニコノ流線ハ φ ノ値ニ係ラズ一定ノ y 値ヲモツ而シテ此値ハ單ニ k ニヨリテ變化スル今吾人ハ呑口又ハ吐口ノ缺口ノ幅員ヲ二ツノ隔壁ノ角度ニ無關係ニ一定ナルモノトスレバ此場合ニハ

$$\text{Opening width}=2y=-\frac{2a}{k}\sin k\pi=-c\quad(\text{say})$$

$$\therefore\quad a=\frac{kc}{\sin k\pi}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

此値ヲ(35)挿入スルトキハ

$$z=\frac{kce^{k\pi i}}{2\sin k\pi}\left\{e^{k'w}+\frac{k'}{k}e^{-kw}-\frac{1}{k}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

此レ吾人ノ求ムル任意ノ角度θヲナス二隔壁ヲナシ其交點附近ニ於テ幅員cヲ缺口トスル水流ノ流線ノ示ス式デアル但シ$k=\dfrac{\theta}{2\pi}$，$k'=1-k$，z及wハ共ニ復素變數ヲ以テ表ハシタ値デアル

(37)ヲwニ就イテ微分シ符號ヲ變ズレバ

$$-\frac{dz}{dw}=-\frac{kk'ce^{k\pi i}}{2\sin k\pi}\left\{e^{k'w}-e^{-kw}\right\}$$

又ハwヲφ及ψニテ表ハシテ

$$-\frac{dz}{dw}=-\frac{kk'c}{2\sin k\pi}\left\{e^{k'\varphi}\cos(k'\psi+k\pi)-e^{-k\varphi}\cos(-k\psi+k\pi)+i\left(e^{k'\varphi}\sin k'\varphi+k\pi)-e^{-k\varphi}\sin(-k\psi+k\pi)\right\}$$

此絕對值ハ(11)(12)ニヨリ速度ノ絕對値ノ逆數ヲ與ヘ此ノ徧角ハ速度ノ方向ヲ與ヘル

$$\left|-\frac{dz}{dw}\right|=\frac{kk'c}{2\sin k\pi}\sqrt{\left\{e^{k'\varphi}\quad(k'\psi+k\pi)-e^{-k\varphi}\cos(-k\psi+k\pi)\right\}^2+\left\{e^{k'\varphi}\sin(k'\psi+k\pi)-e^{-k\varphi}\sin(-k\psi+k\pi)\right\}^2}$$

$$=\frac{k'kc}{2\sin k\pi}\sqrt{e^{2k'\varphi}+e^{-2k\varphi}-2e^{(k'-k)\varphi}\cos(k'+k)\psi}=\frac{k'kc}{2\sin k\pi}\sqrt{e^{2k'\varphi}+e^{-2k\varphi}-2e^{(k'-k)\varphi}\cos\psi},\quad k'+k=1$$

$$\left|V\right|=\frac{2\sin k\pi}{k'kc}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^{2k'\varphi}+e^{-2k\varphi}-2e^{(k'-k)\varphi}\cos\psi}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

$$\theta = \cos^{-1}\left[\left\{e^{k'\varphi}\cos(k'\psi+k\pi)-e^{-k\varphi}\cos(-k\psi+k\pi)\right\}\times\frac{kk'c}{2\sin k\pi}\sqrt{e^{2k'\varphi}+e^{-2k\varphi}-2e^{(k'-k)\varphi}\cos\psi}\right] \quad \cdots (39)$$

次ニ缺口ヨリ流出スル流量ヲ計算スルニハ速位 c_1 ニ沿ヒテ次ノ如キ積分ヲスレバ可ナリ

$$\left|\frac{Q_*}{2}\right| = \int\left|\begin{matrix}\varphi=\pi\\ \varphi=c_1\\ \psi=0\end{matrix}\right| |V| |dz| = \int\left|-\frac{dw}{dz}\right||dz| = \int|dw|$$

$$w = \varphi + i\psi, \qquad dw = d(\varphi+i\psi) = d\varphi + i\,d\psi$$

$$\left|dw\right| = \sqrt{\overline{d\varphi}|^2 + \overline{d\psi}|^2}$$

$$\varphi = c_1, \quad \text{Const}; \quad d\varphi = 0$$

$$\therefore \quad |dw| = d\psi$$

$$\therefore \quad \left|\frac{Q}{2}\right| = \int_{\psi=0}^{\psi=\pi} d\psi = \pi$$

$$|Q| = 2\pi$$

特別ナル場合　其一

$$k = 0, \qquad k' = 1$$

$$z_0 = \operatorname*{Lim}_{\substack{k=0\\k'=1}} \frac{kce^{k\pi i}}{2\sin k\pi}\left\{e^{k'w}+\frac{k'}{k}e^{-kw}-\frac{1}{k}\right\} = \operatorname*{Lim}_{\substack{k=0\\k'=1}} \frac{ce^{k\pi i}}{2\sin k\pi}\left\{ke^{k'w}+k'e^{-kw}-1\right\}$$

此不定形 (Indeterminate form) ヲ評價 (Evaluate) スレバ左ノ如シ

分子　$N = ce^{k\pi i}\{ke^{(1-k)w}+(1-k)e^{-kw}-1\}$

$$\frac{dN}{dk} = c\pi i e^{k\pi i}\{ke^{(1-k)w}+(1-k)e^{-kw}-1\}+ce^{k\pi i}\{e^{(1-k)w}-kwe^{(1-k)w}-e^{-kw}-w(1-k)e^{-kw}\}$$

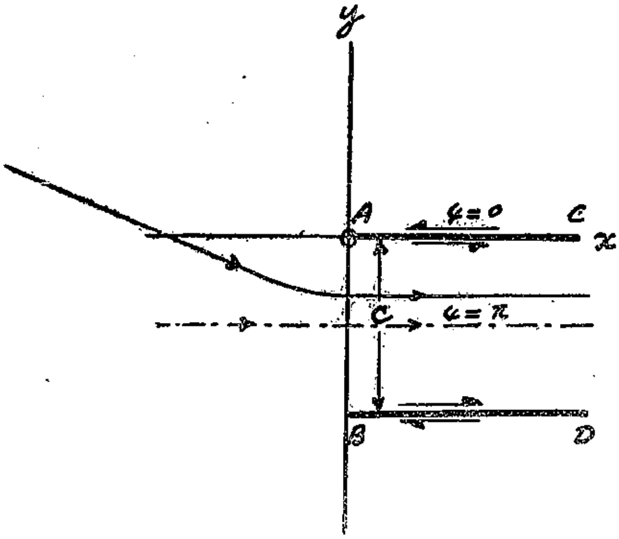
$$\lim_{k=0}\frac{dN}{dk}=c\{e^{w}-w-1\}$$

分母　$D=2\sin k\pi$

$$\lim_{k=0}\frac{dD}{dk}=\lim_{k=0}2\pi\cos k\pi=2\pi$$

$$z_0=\frac{c}{2\pi}\{e^{w}-w-1\}\quad\cdots\cdots(40)$$

此レ三Iニ詳述セル場合ニ一致ス何トナレバy軸ヲ境目トシテ全組織ヲ折返シ$\psi=0$ヲ對稱軸ニ沿フ流線$\psi=\pm\pi$ヲ兩壁ニ沿フ流線トシcヲ2πニ等シクトリ且原點ヲ對稱軸上-1ノ點ニ移ストキハ全ク三Iノ場合ト同一ノモノトナル（別紙附圖第一參照）



第十一圖

特別ナル場合　其二

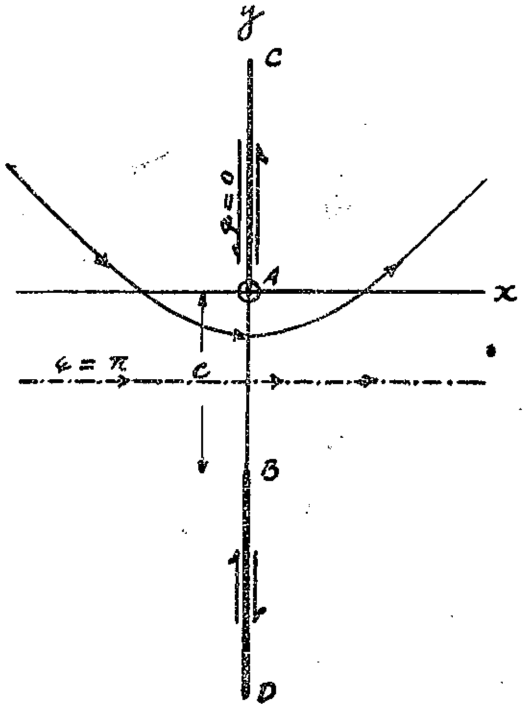
$$k=k'=\frac{1}{2}$$

$$\frac{z_1}{\pi}=\frac{ci}{4}\left\{e^{\frac{w}{\pi}}+e^{-\frac{w}{\pi}}-2\right\}\quad\cdots\cdots(41)$$

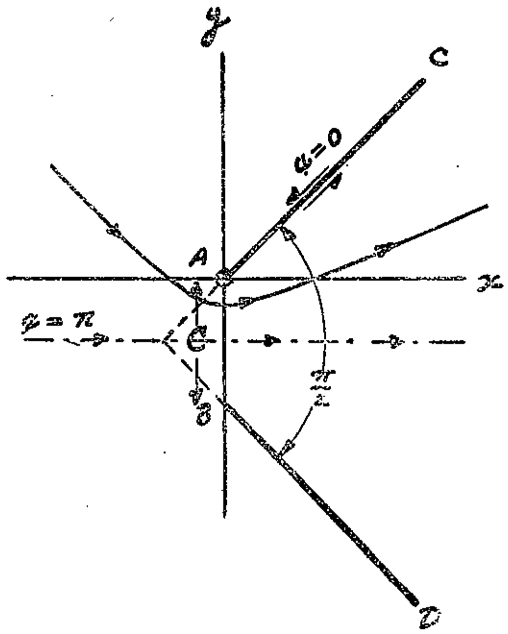
此レ三IIニ解述セル場合ニ一致ス何トナレバcヲ$2c$ニwヲ$2w$ニトリ實軸xト虚軸yトヲ交換シ然ル後原點ヲ實軸ニソヒテ$-\frac{c}{2}$丈移動セシムレバ(41)ハ全ク(18)ト一致セルコト第十二圖（次頁）ノ如シ

尚此場合ニ於ケル流線ノ一般景況ハ別紙附圖第二ニアリ

第十二圖



第十三圖



持別ナル場合　其三

$$k=\frac{1}{4}, \quad k'=\frac{3}{4}$$

$$z_{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}ce^{\frac{\pi}{4}i}}{8}\left\{e^{\frac{3}{4}w}+3e^{-\frac{w}{4}}-4\right\} \cdots\cdots\cdots (42)$$

此レ二隔壁ノ夾角 $\theta = 2\pi k = \frac{\pi}{2}$ ノ場合ニ於ケル流線式デアル（第十三圖參照）尙此場合ニ於ケル流線ノ一般景況ハ別紙附圖第三ニ示ス如シ

附記 らむ動水力學一九一六年版ヲ見ルニ其七五頁ニ著者ノ此處ニ誘導シタル公式ト類似ノ式見エタリ即

$$z = \frac{1-n}{n}(1-e^{-nw}) + e^{(1-n)w}, \quad 但 \quad n = \frac{\theta}{2\pi}$$

又同書ノ脚註ノ示ス所ニヨレバ斯クノ如キ公式ハ一九〇〇——一九〇一ノ數學年報（Annals of Mathematics）ニはりす(Harris) ナル米人ニヨリテ既ニ解決サレタルモノアリト即此レヲ見ルニ

$$z = \frac{\varepsilon^{\varepsilon}(1-\varepsilon)^{1-\varepsilon}}{\sin \varepsilon\pi}\left\{e^{(1-\varepsilon)w} - e^{-\varepsilon w}\right\}$$

但 ε = any real pos. quantity varying from 0 to $\frac{1}{2}$.

トアリ此等何レモ多少ノ變換ヲナサバ著者ノ(37)式ト一致スベク不幸ニシテ著者ノ所有スルらむ動水力學書ハ一九〇六年版ナリシ爲斯クノ如キ貴重ナル先賢ノ作アルヲ知ラズ此ニ獨立ニ37(式)ヲ導出セル次第デアル尤モ前記二書ニアルモノハ其公式ハ突然ニ與ヘラレ何等導出ノ順序ニツイテノ說明ナク缺口ノ幅員ヲ一定ニシテソノ隔壁ノ角度ノ變化ニヨル水流ノ模樣ノ變化ヲ考ヘヤウトスル場合等ニ應用スルニハ不便ノ感ガアル其他連續式ヲ果シテ滿足スルヤ否ヤノ吟味ヲ缺ク等不備ノ點モ見ラレルノテ著者ノ公式誘導モ全々徒勞デハアルマイト信ズル

五 三ツノ代表的流線式ニ就イテノ詳論

前節ニ於テ導出シタル公式(37)(38)ヲ用ヒテ任意ナル角度ヲ爲ス二隔壁ノ流線及流速ヲ知ルコトヲ得ル次第ナルガ先ニ述ベタル如ク隔壁ノナス角度ト水流トノ關係ヲ明カニスル爲メニ著者ハ先ニアゲタル三ツノ代表的ノ場合(40)(41)(42)ニ就イテ更ニ詳論シヤウト思フ

今計算ヲ簡單ニスル爲ニ $c=2\pi$ 卽缺口幅ヲ 2π ニトルトキハ前記三式ハ次ノ如クナル

$$z_0=e^w-w-1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (40')$$

$$z_{\frac{1}{2}}=\frac{\pi i}{2}\left\{e^{\frac{w}{2}}+e^{-\frac{w}{2}}-2\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (41')$$

$$z_{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}.e.^{\frac{\pi i}{4}}\left\{e^{\frac{3}{4}w}+3e^{-\frac{w}{4}}-4\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (42')$$

此等ノ式ニヨリ w ト z トノ關係換言スレバ速位ト x y トノ關係ヲ三ツノ場合ニ就イテ比較スル事ヲ得此等速位線ノ一般ノ模様ニ就イテハ別紙附圖第一第二第三ヲ見ヨ

最モ重大ナルハ對稱線（中心線）ニ沿ヘル流線ナルヲ以テ先ヅ之ニ就イテ比較スルトキハ次ノ如クナル(40′)ニテ $4=z$ ト置ケバ

$$x_0+iy_0=e^{\pi i}e^{\varphi}-(\varphi+i\pi)-1$$

實部分及虛部分ヲ分ツトキハ

$$\left.\begin{aligned}x_0&=e^{\varphi}\cos\pi-\varphi-1=-e^{\varphi}-\varphi-1\\ y_0&=e^{\varphi}\sin\pi-\pi\quad=-\pi\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (40'')$$

同樣ニ(41′)ニ $\psi=\pi$ ト置ケバ

$$x_{\frac{1}{2}}+iy_{\frac{1}{2}}=\frac{\pi i}{2}\left\{e^{\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}}-2\right\}$$

實部分及虛部分ヲ分ツトキハ

$$\left.\begin{aligned}x_{\frac{1}{2}}&=\frac{\pi}{2}\left\{-e^{\frac{\varphi}{2}}+e^{-\frac{\varphi}{2}}\right\}\\ y_{\frac{1}{2}}&=-\pi\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (41'')$$

同様ニ(42′)ヨリ

$$x_{\frac{1}{4}}+iy_{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\left\{e^{\frac{3}{4}\varphi}e^{\pi i}+3e^{-\frac{\varphi}{4}}-4e^{\frac{\pi}{3}i}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{\frac{1}{4}}&=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left\{-e^{\frac{3}{4}\varphi}+3e^{-\frac{\varphi}{4}}-\frac{4}{\sqrt{2}}\right\} \\ y_{\frac{1}{4}}&=-\pi \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(42'')$$

此等ヲ一覽スルトキyノ値ハ凡テ　$-\pi$　ナルヲ知ル今xノ値ヲ種々ナルφノ値ニ對シテ求ムルトキハ次表ニ示ス如シ但xノ原點ヲ隔壁ノ尖端ヲ結ベル中心點ニトル（第一表參照）

第　一　表　$(4=\pi)$

φ	x_0	$x_{\frac{1}{2}}$	$x_{\frac{1}{4}}$
∞	−∞	−∞	−∞
8.0	—	−85.74	—
6.4	—	−38.47	−137.41
5.6	—	−25.74	−76.39
4.0	−58.60	−11.40	−24.26
3.2	−26.73	−7.46	−13.90
2.4	−12.42	−4.74	−8.04
1.6	−5.55	−2.79	−4.60
0.8	−2.03	−1.29	−2.44
0.0	−2.00	−0.00	−0.92
−0.8	−0.65	+1.29	+0.32
−1.6	+0.40	+2.79	+1.50
−2.4	+1.31	+4.74	+2.75
−3.2	+2.16	+7.46	+4.18
−4.0	+2.98	+11.40	+5.87
−5.6	—	+25.74	+10.34

−6.4	—	+38.47	+ 13.34
− ∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞

次ニ隔壁ニ沿フ流線ハ前ニ述ベタル如ク實際ニ用ヲナサヾルモノナレドモ一ツノ極端ヲ示ス標準トナルベキニヨリコヽニ計算スル(40′)(41′)(42′)ヨリ $\varphi=0$ ト置ケバ次ノ三組ノ式ヲ得

$$x_0=e^{\varphi}-\varphi-1,\qquad y=0\qquad\cdots\cdots\cdots(40''')$$

$$x_{\frac{1}{2}}=0,\qquad y_{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}\left\{e^{\frac{\varphi}{2}}+e^{-\frac{\varphi}{2}}-2\right\}\qquad\cdots\cdots\cdots(41''')$$

$$x_{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{4}\left\{e^{\frac{3}{4}\varphi}+3e^{-\frac{\varphi}{4}}-4\right\},\qquad y_{\frac{1}{4}}=\frac{\pi}{4}\left\{e^{\frac{3}{4}\varphi}+3e^{-\frac{\varphi}{4}}-4\right\}\qquad\cdots\cdots\cdots(42''')$$

(40‴)ニ於テハ y ハ零即壁ハ x 軸ニ合シ(41‴)ニ於テハ x ハ零即壁ハ y 軸ト合スル(42‴)ニ於テハ x y ノ値常ニ等シク壁ハ坐標軸ト四十五度ノ角ヲナス今コノ壁ニ沿フテ φ ノ値ヲ計算スルトキハ第二表ノ如シ但壁ノ尖端ヲ原點トスル

第　二　表　$(\psi=0)$

φ	x_0	φ	$y_{\frac{1}{2}}$	φ	$\sqrt{x_{\frac{1}{4}}^2+y_{\frac{1}{4}}^2}=\sqrt{2}x_{\frac{1}{4}}$
+∞	+ ∞	+∞	+ ∞	+ ∞	+ ∞
5	+142.41	9.2	153.20	+6.4	+131.20
4	+ 49.60	8.0	82.70	+4.0	+ 19.11
3	+ 16.09	6.0	28.50	+3.2	+ 9.30
2	+ 4.40	4.0	8.68	+2.4	+ 4.11
1	+ 0.72	2.0	1.71	+1.6	+ 1.48
0	0.00	1.2	0.58	+0.8	+ 0.31
−1	+ 0.37	0.4	0.06	+0.0	+ 0.0
−2	+ 1.13	0.0	0.00	−0.8	+ 0.23

φ	x_0	φ	$y_{\frac{1}{2}}$	φ	$\sqrt{x_{\frac{1}{4}}^2+y_{\frac{1}{4}}^2}=\sqrt{2x_{\frac{1}{4}}}$
-3	$+\ 2.05$	$-\varphi$ ニ對シテハ凡テ		-1.6	$+\ 0.86$
-4	$+\ 3.02$	對稱値ナルヲ以テ逆		-2.4	$+\ 1.80$
-5	$+\ 4.01$	ニスレバ可ナリ		-3.2	$+\ 3.08$
$-\infty$	$+\ \infty$			-4.0	$+\ 4.67$

次ニ對稱線ト隔壁トノ中間ニ位スル $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ ニ沿フ流線ヲ計算スルニ $(40')\,(41')\,(42'')$ ヨリ次ノ三組ノ式ヲ得

$$x_0=-(\varphi+1),\qquad y_0=e^{\varphi}-\frac{\pi}{2}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40^{\text{IV}})$$

$$x_{\frac{1}{2}}=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\left(e^{\frac{\varphi}{2}}-e^{-\frac{\varphi}{2}}\right),\qquad y_{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{\frac{\varphi}{2}}+e^{-\frac{\varphi}{2}}\right)-2\right\}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41^{\text{IV}})$$

$$\left.\begin{aligned}x_{\frac{1}{4}}&=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\left(-e^{\frac{3}{4}\varphi}\sin\frac{\pi}{8}+3e^{-\frac{\varphi}{4}}\cos\frac{\pi}{8}-\frac{4}{\sqrt{2}}\right)\\ y_{\frac{1}{4}}&=\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}\left(e^{\frac{3}{4}\varphi}\cos\frac{\pi}{8}+3e^{-\frac{\varphi}{4}}\sin\frac{\pi}{8}-\frac{4}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}\right\}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(42^{\text{IV}})$$

(40^{IV}) ニ於テ吐口(呑口)ニ於テハ $x_0=0\quad\therefore\ \varphi=-1\quad\therefore\ y_0=e^{-1}-\dfrac{\pi}{2}=-1.203$

$$dx_0=-d\varphi,\qquad dy_0=e^{\varphi}\,d\varphi$$

$$\therefore\ ds_0=-\sqrt{\overline{dx_0}^2+\overline{dy_0}^2}=-(1+e^{2\varphi})^{\frac{1}{2}}d\varphi$$

s_0 ト φ トノ增加ノ方向相反スルヲ以テ平方根ノ負號ヲトル之ヲ積分スルトキ

$$s_0=-\sqrt{1+e^{2\varphi}}+\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+e^{2\varphi}}+1}{\sqrt{1+e^{2\varphi}}-1}+\text{Const}$$

今 s ヲ計ルベキ原點ヲ吐口(呑口)ニトレバ

$$\mathrm{Const} = +\sqrt{1+e^{-2}} - \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+e^{-2}}+1}{\sqrt{1+e^{-2}}-1}$$

$$\therefore\quad s_0 = -\sqrt{1+e^{2\varphi}} + \sqrt{1+e^{-2}} + \frac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{1+e^{2\varphi}}+1)(\sqrt{1+e^{-2}}-1)}{(\sqrt{1+e^{2\varphi}}-1)(\sqrt{1+e^{-2}}+1)} \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (40^{\mathrm{V}})$$

(41^{IV}) ニ於テ吐口(呑口)ノ坐標ハ $x_{\frac{1}{2}} = 0$, $\quad\therefore\ \varphi = 0$, $\quad\therefore\ y_{\frac{1}{2}} = \pi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right) = -0.918$

$$dx_{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left(e^{\frac{\varphi}{2}}+e^{-\frac{\varphi}{2}}\right)d\varphi, \qquad dy_{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left(e^{\frac{\varphi}{2}}-e^{-\frac{\varphi}{2}}\right)d\varphi$$

$$ds_{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left\{\left(e^{\frac{\varphi}{2}}+e^{-\frac{\varphi}{2}}\right)^2+\left(e^{\frac{\varphi}{2}}-e^{-\frac{\varphi}{2}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}d\varphi = -\frac{\pi}{4}(e^{\varphi}+e^{-\varphi})^{\frac{1}{2}}d\varphi = -\frac{\pi}{4}e^{\frac{\varphi}{2}}(1+e^{-2\varphi})^{\frac{1}{2}}d\varphi$$

此式ヲ積分スル事ハ困難ナリ縱テ吾人ハコヽニ一ツノ近似法ヲ用フル即此式ヲ φ ノ正ノ値ニ局限シテ二項定理ニヨリ展開スルトキハ

$$ds_{\frac{1}{2}} = -\frac{\pi}{4}e^{\frac{\varphi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}e^{-2\varphi}-\frac{1}{8}e^{-4\varphi}+\frac{1}{16}e^{-6\varphi}-\cdots\cdots\right)d\varphi = -\frac{\pi}{4}\left(e^{\frac{\varphi}{2}}+\frac{1}{2}e^{-\frac{3\varphi}{2}}-\frac{1}{8}e^{-\frac{7}{2}\varphi}+\frac{1}{16}e^{-\frac{11}{2}\varphi}-\cdots\cdots\right)d\varphi$$

之レヲ原點 $\varphi = 0$ ヨリ $\varphi = \varphi$ マデ積分スルトキハ

$$s_{\frac{1}{2}}\Big]_{\varphi=0}^{\varphi>0} \approx -\frac{\pi}{4}\left[2e^{\frac{\varphi}{2}}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}\varphi}+\frac{1}{28}e^{-\frac{7}{2}\varphi}\right]_{\varphi=0}^{\varphi} \text{ for } \varphi > 0 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (41^{\mathrm{V}})$$

$\varphi < 0$ ニ對シテハ對稱値ヲ用フル事ヲ得ベキニヨリ重ネテ計算ノ要無キ譯デアル

(42^{IV}) ニ於テ吐口(入口)ノ坐標ハ $x_{\frac{}{4}} = 0$

$$\therefore\quad -\sin\frac{\pi}{8}e^{\frac{3}{4}\varphi} + 3e^{-\frac{\varphi}{4}}\cos\frac{\pi}{8} - \frac{4}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\therefore \quad e^{\varphi}+7.38\,e^{\frac{\varphi}{4}}-7.24=0$$

$$\therefore \quad \varphi \approx = -0.5$$

$$\therefore \quad y_{\frac{1}{4}}'' = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi\left\{0.685\times0.924+3\times1.133\times383-\frac{4}{1.414}\right\} = -1.0$$

$$dx_{\frac{1}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4\times4}\pi\left\{-\sin\frac{\pi}{8}e^{\frac{3}{4}\varphi}-\cos\frac{\pi}{8}e^{-\frac{\varphi}{4}}\right\}d\varphi$$

$$dy_{\frac{1}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{4\times4}\pi\left\{\cos\frac{\pi}{8}e^{\frac{3}{4}\varphi}-\sin\frac{\pi}{8}e^{-\frac{\varphi}{4}}\right\}d\varphi$$

$$ds_{\frac{1}{4}} = -\frac{8\sqrt{2}}{4\times4}\pi\left\{\sin^2\frac{\pi}{8}e^{\frac{3}{2}\varphi}+\cos^2\frac{\pi}{8}e^{-\frac{\varphi}{2}}+2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}e^{\frac{\varphi}{2}}+\cos^2\frac{\pi}{8}e^{\frac{3}{2}\varphi}+\sin^2\frac{\pi}{8}e^{-\frac{\varphi}{2}}-2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}e^{\frac{\varphi}{2}}\right\}^{\frac{1}{2}}d\varphi$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{4\times4}\pi\left(e^{\frac{3}{2}\varphi}+e^{-\frac{\varphi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}d\varphi$$

此積分モ困難ナルニヨリ前同様ノ方法ニヨリテ近似値ヲ求メテ我慢スル

$$ds_{\frac{1}{4}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4\times4}\pi e^{\frac{3}{4}\varphi}\left(1+e^{-2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}d\varphi \qquad \text{for} \quad \varphi>0$$

$$= -\frac{3\sqrt{2}}{4\times4}\pi e^{\frac{3}{4}\varphi}\left(1+\frac{1}{2}e^{-2\varphi}-\frac{1}{8}e^{-4\varphi}+\frac{1}{16}e^{-6\varphi}-\cdots\cdots\right)d\varphi = -\frac{3\sqrt{2}}{4\times4}\pi\left(e^{\frac{3}{4}\varphi}+\frac{1}{2}e^{-\frac{5}{4}\varphi}-\frac{1}{8}e^{-\frac{13}{4}\varphi}+\cdots\cdots\right)d\varphi$$

$$s_{\frac{1}{4}}\Big]_{\varphi=0}^{\varphi>0} \approx -\frac{3\sqrt{2}}{4\times4}\pi\left[\frac{4}{3}e^{\frac{3}{4}\varphi}-\frac{4}{10}e^{-\frac{5}{4}\varphi}+\frac{1}{26}e^{-\frac{13}{4}\varphi}\right]_{\varphi=0}^{\varphi>0} \qquad \text{for} \quad \varphi>0$$

$$ds_{\frac{1}{4}} = -\frac{3\sqrt{2}}{4\times4}\pi e^{-\frac{\varphi}{4}}\left(1+e^{2\varphi}\right)^{\frac{1}{2}}d\varphi \qquad \text{for} \quad \varphi<0$$

$$\left.\begin{aligned} &= -\frac{3\sqrt{2}}{4\times 4}\pi e^{\frac{\varphi}{4}}\left(1+\frac{1}{2}e^{2\varphi}-\frac{1}{8}e^{4\varphi}+\frac{1}{16}e^{6\varphi}-\cdots\cdots\right)d\varphi \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{4\times 4}\pi\left(e^{-\frac{\varphi}{4}}+\frac{1}{2}e^{\frac{7}{4}\varphi}-\frac{1}{8}e^{\frac{15}{4}\varphi}+\frac{1}{16}e^{\frac{23}{4}\varphi}-\cdots\cdots\right)d\varphi \\ s_{\frac{1}{4}}\Big]_{\varphi=-0.5}^{\varphi<0} &\approx -\frac{3\sqrt{2}}{4\times 4}\pi\left[-4e^{-\frac{\varphi}{4}}+\frac{2}{7}e^{\frac{7}{4}\varphi}-\frac{1}{30}e^{\frac{15}{4}\varphi}+\frac{1}{92}e^{\frac{23}{4}\varphi}\right]_{\varphi=-0.5}^{\varphi<0} \quad \text{for} \quad \varphi<0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (42^{v})$$

此等ノ値ヲ吐口(呑口)ヲ起點トスル事ヲ注意シツヽ計算スルトキハ第三表ニ示ス様ナ値ヲ得但起點ヨリ左方ニ計リタル s_0 ノ値ヲ負右方ヘ計リタルモノヲ正トス

第　三　表　$\left(\psi=\frac{\pi}{2}\right)$

φ	s_0	φ	$s_{\frac{1}{2}}$	φ	$s_{\frac{1}{4}}$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
3	-20.714	6	-30.25	4	-22.23
2	-7.98	4	-10.28	3	-10.45
1	-3.20	2	-2.935	2	-4.85
0	-1.197	1.2	-1.105	1	-2.24
-1	0.000	0	0.000	0	-0.68
-2	$+0.977$	$-\varphi$ ニ對シテハ對		-0.5	0.00
-3	$+1.974$	稱値ヲトル.		-1	$+0.415$
$-\infty$	$+\infty$			-2	$+1.835$
				-3	$+3.405$
				$-\infty$	$+\infty$

以上三表ニヨリ $\varphi-s$ 圖表ヲ作ルトキハ別紙附圖第四ノ如クナル

次ニ各點ニ於ケル速度ヲ比較スルニハ公式(38)ニヨリ一般ニ速度 V ノ絶對値ヲ與ヘラレル三ツノ代表的ノ場合ニハ $k=0$,

$k'=1$; $k=k'=\frac{1}{2}$; $k=\frac{1}{4}$, $k'=\frac{3}{4}$ ト置キ不定値ヲ生ズルトキハ此レヲ評値スレバヨイ而シテ中心線ニ沿ヘルモノハ斯クノ如クシテ得タルモノニ $\varphi=\pi$ ト置ケバ可ナリ又ハ (40″) (41″) (42″) ヨリ

$$|V_0|=\left|-\frac{1}{\frac{dz_0}{dw}}\right|_{\varphi=\pi}=\left|-\frac{1}{\frac{dx_0}{d\varphi}}\right|=\frac{1}{1+e^{\varphi}} \quad \cdots\cdots \quad (43)$$

$$|V_{\frac{1}{2}}|=\left|-\frac{1}{\frac{dz_{\frac{1}{2}}}{dw}}\right|_{\varphi=\pi}=\left|-\frac{1}{\frac{dx_{\frac{1}{2}}}{d\varphi}}\right|=\frac{1}{\frac{\pi}{4}\left(e^{\frac{\varphi}{2}}+e^{-\frac{\varphi}{4}}\right)} \quad \cdots\cdots \quad (44)$$

$$|V_{\frac{1}{4}}|=\left|-\frac{1}{\frac{dz_{\frac{1}{4}}}{dw}}\right|_{\varphi=\pi}=\left|-\frac{1}{\frac{dx_{\frac{1}{4}}}{d\varphi}}\right|=\frac{1}{\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi\left(e^{\frac{3}{4}\varphi}+e^{-\frac{\varphi}{4}}\right)} \quad \cdots\cdots \quad (45)$$

但例ノ如ク添字 (Suffix) ハ隔壁ノナス角度ヲ示スベキ係数 k ノ値トスル

此等ノ値ヲ計算シテ表ニ示シタルモノガ第四表デアル

第　四　表　($\psi=\pi$)

φ	v_0	φ	$v_{\frac{1}{2}}$	φ	$v_{\frac{1}{4}}$
∞	0.000	∞	0.000	∞	0.000
4.8	0.008	9.2	0.013	6.4	0.010
4.6	0.010	8.0	0.024	5.6	0.018
4.0	0.018	6.4	0.052	4.0	0.059
3.2	0.039	5.6	0.077	3.2	0.105
2.4	0.083	4.0	0.169	2.4	0.182
1.6	0.168	3.2	0.247	1.6	0.302
0.8	0.310	2.4	0.352	0.8	0.456

0.0	0.500	1.6	0.495	0.0	0.602
−0.8	0.692	0.8	0.590	−0.8	0.678
−1.6	0.832	0.0	0.637	−1.6	0.670
−2.4	0.917			−2.4	0.604
−3.2	0.961			−3.2	0.519
−4.0	0.982			−4.0	0.440
−∞	1.000			−∞	0.000

$-\varphi$ ニ對シテハ凡テ對稱値ナリ

V_0, $V_{\frac{1}{2}}$, $V_{\frac{1}{4}}$ ノ最大最小値ヲ求ムル事ハ興味アル問題デ後ニ $V-S$ 圖表ヲ作ルトキニ至便デアル即(43)ヨリ

$$\frac{dV_0}{d\varphi}=\frac{e^\varphi}{(1+e^\varphi)^2}=0$$

$$e^\varphi=0 \qquad \therefore\ \varphi=-\infty$$

又

$$1+e^\varphi \doteqdot \infty \qquad \varphi=+\infty$$

前者ハ最大値ヲ後者ハ最小値ヲ與フ

又(44)ヨリ

$$\frac{dV_{\frac{1}{2}}}{d\varphi}=\frac{-\dfrac{\pi}{8}\left(e^{\frac{\varphi}{2}}-e^{-\frac{\varphi}{2}}\right)}{\dfrac{\pi^2}{16}\left(e^{\frac{\varphi}{2}}+e^{-\frac{\varphi}{2}}\right)^2}=0$$

$$e^{\frac{\varphi}{2}}=e^{-\frac{\varphi}{2}} \qquad \therefore\ e^\varphi=1 \quad \text{or} \quad \varphi=0$$

又

$$e^{\frac{\varphi}{2}}+e^{-\frac{\varphi}{2}}=\infty \qquad \varphi=\pm\infty$$

前者ハ最大値ヲ後者ハ最小値ヲ與フ即 $x=0$ ニ於テ最大値ヲモツ

又(45)ヨリ

$$\frac{dV_{\frac{1}{4}}}{d\varphi}=\frac{-\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi\left(\frac{3}{4}e^{\frac{3}{4}\varphi}-\frac{1}{4}e^{-\frac{\varphi}{4}}\right)}{\frac{18}{16\times16}\pi^2\left(e^{\frac{3}{4}\varphi}+e^{-\frac{\varphi}{4}}\right)^2}$$

$$\frac{3}{4}e^{\frac{3}{4}\varphi}-\frac{1}{4}e^{-\frac{\varphi}{4}}=0\qquad\therefore\ e^{-\varphi}=3\ \text{or}\ -\varphi=ln.\,3=1.0986\qquad\therefore\ \varphi\approx-1.1$$

又　$$e^{\frac{3}{4}\varphi}+e^{-\frac{\varphi}{2}}=\infty,\qquad\varphi=\pm\infty$$

前者ハ最大値ヲ後者ハ最小値ヲ與ヘル

尚此等ノφノ値ヲ(43)(44)(45)式ニ入ルヽ事ニヨリテ

$$\max.V_0=1,\qquad\max.V_{\frac{1}{2}}=0.636,\qquad\max.V_{\frac{1}{4}}=0.680$$

トナル事ハ容易ニ知ルコトヲ得

次ニ隔壁ニ沿ヘル流線ニツイテ其各點ニ於ケル速度ヲ求メレバ(40‴)(41‴)(42‴)ヨリ

$$\left|V_0\right|=\left|-\frac{1}{\frac{dz_0}{dw}}\right|_{\varphi=0}=\left|-\frac{1}{\frac{dx_0}{d\varphi}}\right|=\frac{1}{1-e^{\varphi}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(43')$$

$$\left|V_{\frac{1}{2}}\right|=\left|-\frac{1}{\frac{dy_{\frac{1}{2}}}{d\varphi}}\right|=\frac{1}{\frac{\pi}{4}\left\{e^{-\frac{\varphi}{2}}-e^{\frac{\varphi}{2}}\right\}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(44')$$

$$\left|V_{\frac{1}{4}}\right|=\left|-\frac{1}{\frac{d\sqrt{x_{\frac{1}{4}}^2+y_{\frac{1}{4}}^2}}{d\varphi}}\right|=\frac{16}{3\sqrt{2}\pi\left\{e^{-\frac{\varphi}{4}}-e^{\frac{3}{4}\varphi}\right\}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\quad(45')$$

此等ノ値ヲ計算シテ表示スレバ第五表ノ如クナル

第　五　表　($\psi=0$)

φ	v_0	φ	$v_{\frac{1}{2}}$	φ	$v_{\frac{1}{4}}$
∞	0.000	∞	0	∞	0
5	−0.007	9.2	0.013	6.4	0.010
4	−0.019	8.0	0.023	4.0	0.061
3	−0.052	6.0	0.063	3.2	0.114
2	−0.156	4.0	0.175	2.4	0.218
1	−0.581	2.0	0.542	1.6	0.453
0.6	−1.216	1.2	1.000	0.8	1.000
0.2	−4.520	0.4	3.160	0	∞
0	∞	0	∞	−0.8	1.790
−0.2	5.520	$-\varphi$ ニ對シテハ		−1.6	1.008
−0.6	2.215	對稱値ヲトル		−2.4	0.725
−1.0	1.582			−3.2	0.562
−2.0	1.155			−4.0	0.450
−3.0	1.055			$-\infty$	0
−4.0	1.020				
−5.0	1.005				
$-\infty$	1.000				

次ニ $\psi=\frac{\pi}{2}$ ニ沿ヘル流線ノ各點ニ於ケル流速ヲ求ムルトキハ (40^{IV}) (41^{IV}) (42^{IV}) ヨリ

$$\left|V_0\right|=\left|-\frac{1}{\frac{dz_0}{dw}}\right|_{\psi=\frac{\pi}{2}}=\left|-\frac{d\varphi}{ds_0}\right|=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2\varphi}}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(43'')$$

943

$$\left|V_{\frac{1}{2}}\right| = \left|-\frac{d\varphi}{ds_{\frac{1}{2}}}\right| = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (44'')$$

$$\left|V_{\frac{1}{4}}\right| = \left|-\frac{d\varphi}{ds_{\frac{1}{4}}}\right| = \frac{4\times 4}{3\sqrt{2}\,\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^{\frac{3}{2}\varphi}+e^{-\frac{\varphi}{2}}}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (45'')$$

此等ノ値ヲ今表示スレバ第六表ニ示ス通リデアル

第六表 $\left(\psi=\frac{\pi}{2}\right)$

φ	v_0	φ	$v_{\frac{1}{2}}$	φ	$v_{\frac{1}{4}}$
∞	0.000	∞	0.000	∞	0.000
3	0.050	6	0.063	4	0.060
2	0.134	4	0.172	3	0.127
1	0.345	2	0.464	2	0.267
0	0.707	1.2	0.669	1	0.533
−1	0.938	0	0.900	0	0.848
−2	0.991			−0.5	0.910
−3	0.991			−1	0.880
$-\infty$	1.000			−2	0.705
				−3	0.563

$-\varphi$ ニ對シテハコノ對稱値ヲトル

速度ヲ距離ノ函數トシテ數學的ニ求メルニハ一般的ニヤレバ(37)(38)兩式カラwヲ消去スルコトヽナル一定ノ流線ニ沿フ速度ナラバコレニψガ常數ノ條件ヲ入ルレバ可ナリ然シコノ消去法ハ特別ノ場合ヲ除イテハ困難デアルカラ以上第四、第五、第六表ニ依リテ$V-S$圖表ヲ描クコトヽスル附圖第五ハ此レデアル此ヲ見レバ一目シテ各點ノ速度ヲ比較研究スル事ヲ得即吐口ノ極ク近クニ於テハ二隔壁ノナス角小ナルモノ程大ナル速度ヲ有スレドモ少シク吐口ヲ離ルヽニ從ヒ二隔

壁ノナス角大ナルモノ換言スレバ一直線ノ隔壁ニ缺口ヲ有スル場合ガ最モ大ナル速度ヲ有ス此レハ常識的ニ考ヘテモ又覗知シ得ルニ難クナイ何トナレバ吐口ヲ出デタル流水ガ最モ早ク最モ大ナル面積ニ分布セラルヽ場合ハ二隔壁ノナス角ノ最小ナル場合即二ツノ平行隔壁ノ場合ニシテ一直線上ニ二隔壁ノアル場合ハ此ト相反ノ場合ナレバナリ

吐口ニ於ケル流速ハ中心線(對稱線)最小ニシテ兩隔壁ニ近ヅクニ從ッテ増大スルコトモ一ツノ注意ニ値スル現象デアル又中心線ニ沿フ流線上ニ於テ最大速度ヲ與フベキ位置ハ前ニ述ベタ如クV_{II}ノ場合ニハ$+\infty$ノ所ニアリ二隔壁ノ間ノ角増大スルト共ニ漸次吐口(即原點)ニ近ヅキ$V_{\frac{1}{2}}$ノ場合ニ於テ遂ニ原點ニ合スル有様モ一目瞭然デアル

尚吐口ニ於テハ中心線ニ近ヅク程小ナルベキ速度モ此レヲ少シク離レテ外側ニ出ヅレバ此レト反對ニ中心線上ノ速度最大トナル事モ重要ナル性質ノ一ツデアル．

附圖第五ニ示スモノハ三ツノ代表的流線ノ場合デアルガ此ノ中間ニ位スベキ種々ナル角度ヲ有ツ隔壁ノ場合モ挿入(Interpolation)ノ考ニヨッテ想像スル事ガ出來ル

六　呑口又ハ吐口ノ水位

通常ノ河川運河ノ如クニ水流ガ其ノ方向及斷面ノ形狀大サヲ急變セザル開渠ニ於ケル平均流速ト自由水面(Free surface)トノ關係ハぶーしねすく(Boussinesq)ニヨッテ求メラレテキル即次ノ如シ

(Flamant; Hydraulique, 1909 p. 300)

$$I=\frac{\chi}{\omega}bU^2+\alpha\frac{d}{ds}\left(\frac{U^2}{2g}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (46)$$

但 I = 自由水面ノ勾配，　χ = 潤邊，　ω = 斷面積，　U = 平均流速，

s = 自由水面ニ沿フテ計リタル距離，　g = 重力加速度，

α = 斷面ノ形狀ニヨル或係數其平均値 $\frac{10}{9}$ (St. Venant)，　b = 常數

尙此式ヲ達觀スルトキハ左邊ノIハ重力ニヨリテ生ズル加速力 (Accelerating force) ニヨル項ニシテ右邊第一項ハ摩擦滑動ニヨリ減速力 (Retarding force) ヲ示ス項、第二項ハ流レニ沿ヒテ起ル活勢ノ變化ヲ示シ慣性力ヨリ來ル項ト考ヘル事ガ出來ル整流 (Uniform flow) ニ於テハ此第二項ハ消失シテ

$$I = \frac{\chi}{\omega} bU^2$$

トナリ此レヲ書キ換ヘテ

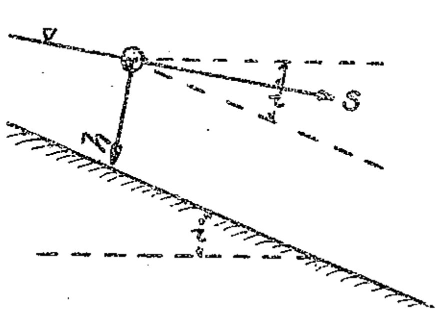
$$U^2 = \frac{\omega}{\chi}\cdot\frac{I}{b}$$

トシ且

$$\frac{\omega}{\chi} = R, \quad \frac{1}{\sqrt{b}} = c$$

ト置クトキハ所謂シェジー (Chézy) ノ摩擦勾配式 (Friction-slope formula) トナル

$$U = c\sqrt{RI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (46')$$



第十四圖

扨(46)式ニ於ケルIハ圖ノ如クiヲ水底面勾配hヲ自由水面ヨリ水底ニ向ッテ計ッタ水深ト考ヘルトキハ

$$I = i - \frac{dh}{ds}$$

吾人ハ最初ニ水深ハ水路ノ何レノ部分ニ於テモ常ニ等シク此レヲh_0ト假定スル然ルトキハ自由水面ト底面トハ到ル處完全ニ平行ナル理デアル

$$\therefore \quad I = i$$

又ω/χハ前述ノ如クシェジー式ニ於ケル徑深 (Hydraulic mean depth) ニ當ル故水路斷面矩形ニ近ク川幅水深ニ比ベテ大ナルトキハ此レハ平均水深ト見テヨイ吾人ハ今或流線ノ間ノ部分ヲトッテ(46)式ヲ應用シヤウト思フノデアルカラ上述ノ條件ニ應ズル樣

ニスル事ハ容易デアル

$$\frac{\omega}{\chi} \approx h_0$$

∴ (46) ハ次ノ如ニナル

$$i = \frac{b}{h_0} U^2 + \frac{\alpha U}{2g} \cdot \frac{dU}{ds}$$

水流ガ速度ヲ急變シナイ場合（吾人ノ場合ハ隔壁端ノ特異點附近ヲ除イテハ皆然リ）ニハUニ比シテ $\frac{dU}{ds}$ ハ通常小ナリ夫レ故ニ今次ノ如ク假定スル事ガ出來ル

$$\frac{dU}{ds} = kU$$

但 k ハ微量ニシテ整流 (Uniform flow) ニ於テハ 0 トナル係數

然ルトキハ i ノ式ハ

$$i = \frac{b}{h_0} U^2 + \frac{\alpha k}{2g} U^2, \qquad U^2 = \left(\frac{b}{h_0} + \frac{\alpha k}{2g}\right)^{-1} i, \qquad U = \frac{\sqrt{h_0 i}}{\sqrt{b}} \left(1 + \frac{\alpha k}{2g} \Big/ \frac{b}{h_0}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$\dfrac{\frac{\alpha k}{2g}}{\frac{b}{h_0}}$ ハ1ニ比ベテ微量デアル故U式ノ右邊ヲ二項定理ニヨッテ展開シテ其最初ノ二項ヲ取レバ

$$U = \frac{1}{\sqrt{b}} \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha k}{2g} \Big/ \frac{b}{h_0}\right) \sqrt{h_0 i}$$

しぇじー式ノ如ク $\frac{1}{\sqrt{b}} = c$ ト置ケバ

$$U = c\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha k}{2g} \cdot \frac{h_0}{b}\right) \sqrt{h_0 i}$$

或ハ簡單ニ

$$U = c(1-\xi)\sqrt{h_0 i}$$

或ハ更ニ簡約シテ $c(1-\xi)$ ノ代リニ c_1 ヲ用フルトキハ外觀しぇじー式ト全ク同一ナル次式ヲ得

但 ξ ハ 1 ニ比シテ微量ナル係數

$$U = c_1\sqrt{h_s i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (47)$$

但此式ニ於ケル c_1 ハしぇじー式ばざん (Bazin) 又ハがんぎれー、くったー (Ganguillet and Kutter) ノ式ニヨッテ求メラルヽ係數 c トハヤヽ異レル値ヲ有スルモノデアル

公式(46)ハこりおり (Coriolis) ニヨリテ始メテ誘導サレタルモノデ彼ハ勢式 (Energy equation) ニ潤面ノ摩擦ヲ考入シテ此式ヲ得タ (Ekdahl; Über die Bewegung des Wassers in Kanälen u.s.w. 1912 s. 4-12) 然シ乍ラ此式ヲ誘導スル際ニ彼ハ次ノ如キ二ツノ假定ヲ置イタノデアル

一　水路ノ斷面要素ニ働ク壓力ハ凡テ靜水壓力ト同一ナリトス

二　潤面摩擦ニヨリ水流ニ爲サルヽ仕事ノ總量ハ整流 (Uniform flow) ノ場合ニ等シ

今日ニ於テ此等ノ假定ガ其儘受容セラルヽノ困難ナ事ハ明カデアル　然ルニ動水力學ノ基礎公式タルをいらー式 (Euler's fundamental equations) ニ水流ト潤面及水流内部ノ摩擦ヲ考入シテモ尙(46)ト同一公式ヲ誘導スル事ガ出來ル (Flamant; Hydraulique p. 38-43) 然シ乍ラ此レトテモ嚴密ニ批判スルトキハ一大矛盾ガアル即をいらー式ハ元來完全液體ニ其基礎ヲ置イテヰルノニ此レヨリ(46)式ヲ導キ來ル際ニ外力ノ項ニ摩擦力ヲ挿入スルト云フコトデアル

然ルニ幸ニモ其後ぶーしねすくニヨッテ摩擦力又ハ粘性ヲ考入シテモ尙依然トシテ公式(46)ノ眞ナル事ヲ證明セラルヽニ至ッタぶーしねすくハ其名著流水論 (Essai sur la théorie des eaux courantes, 1872) ニ於テ此事ヲ證明シテヰル尙其拔粹ハ Flamant; Hydraulique p. 38 ノ脚註ニモ又 Ekdahl: s. 13-31 ニモ載ッテヰル然シ乍ラ更ニ進ンデ亂流ノ場合ニ對シテ此式ガ成立スルヤ否ヤハ今日ノ所理論的ノ證明ハ不可能デアル唯吾々ハ實際上此レヲ用ヒテ差支ナイトイフ實驗的證明ニヨルヨリ外ナイ

扨此(46)式ヨリ吾人ガ簡約シタ處ノ公式(47)ト先ニ詳論シタル流線式トヲ結合スル事ニヨッテ呑口又ハ吐口ノ水位ヲ見出サウトイフノガ著者ノコレカラノ仕事デアル此ニ至ッテ一考ヲ要スル問題ハ此二式ノ成立條件ノ差異トイフ事デアル流線式ハ前述ノ如ク水流ヲ凡テ平面的ニ考ヘ共軛函數ヲ利用スル事ニヨッテ解決セラレタモノデアル共軛函數ノ成立ハ翻ッテ考ヘテ見レバ流速ノ速位 (Velocity potential) ノ成立スルトイフ事換言スレバ $\nabla\varphi=0$ or $\nabla^2\varphi=0$ ナル事ヲ要スル今此レヲ或水流ニ應用スル爲メニハ水流ハ次ノ三ツノ條件ヲ必要トス

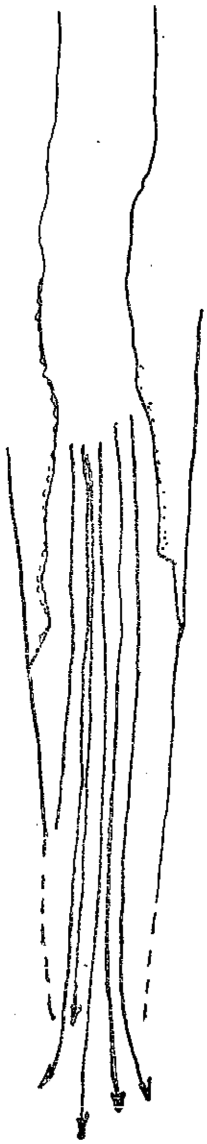
一　完全液體ニシテ非施廻性ナルコト

二　定流 (Steady flow) タルコト

三　流速ノ上下ノ方向ニ對スル變化ガナイコト

此ノ第一條件ハ(46)式ノ成立條件トハ多少異ッテヰル(46)式ハ前述ノ如ク液體ニ粘性ガアルモノトシテ理論上正シイコトガ證明セラレタ此點ニ關シテ第一條件ハ粘性ヲ認メナイトイフコトハ正反對デアルガ曾ッテ第一節ニ述ヘタ如ク實際ノ亂流的ノ水流デハ寧ロ水ノ粘性ヲ考ヘテ導出シタ薄層運動的ノ結論ハ當ハマラナイトイフコトガ實驗ニヨッテ確カメラレタノデアル從ッテ(46)式モ實際上ノ價値ハ其ノ理論的根據ガ粘性液體ノ上ニ建テラレテヰルトイフ丈デハ決シテ保證サレタルモノデハナイ此レガ保證ハ理論的ニイヘバ亂流ニ基礎ヲ置イテ證明サレネバナラナイケレドモ此レハ現今ノ水力學デハ不可能ノコトデアルカラ全ク實驗ニヨッテ妥當性ヲ檢スルヨリ外ナイノデアル幸ニシテ(46)式ヲ有名ナルしぇじー式ノ族ト見テ可ナル故しぇじー式ハ係數cノ決定法ガ發達シテ今日デハ工學上充分ノ精密度ヲ有スルモノト考ヘラレテヰルノデアルカラ(46)式モ亦充分ノ精密度ヲ有シウベキモノト考ヘテモ差支ナカラン而シテ流線式ニ於テモ水ノ完全液體非旋廻性ト見ルコトハ甚ダ亂暴ノ如クナレドモコヽニモ同樣ノ理ニヨッテ此ノ結果ガ實際上充分ノ精密度ヲ與フルコトガ解レバ充分ナル次第デアル河川運河ノ水流ヲ實際ニ就イテ少シク觀察シタ人ハ必ズヤ其ノ水流ガ決シテ單純ナル平行運動デハナク兩岸ニ近イ分子ハ絶エズ流心ニ誘ヒ出サレ底面ニ近キ分子ハ水面ニ導カレ他ノ部分ノモノハ此レニ代リ一ツ

ノ亂流ヲナシテヰルコトヲ知ル然シ乍ラ斯クノ如キ亂流アルニモ係ラズ此レ等ノ亂流狀態ノ爲メニ生ズル兩岸ヨリ流心ニ向フ分速度ハ兩岸ヲ離ルレバ比較的小サクナリ從ツテ水深ニ對シテ充分ニ幅廣キ河川運河等ニ於テハ著シク兩岸ニ接近セル部分ヲ除イテハ此ノ横ノ分速度ハ無視シテモ差支ナイヤウデアル其ノ底面ヨリ水面ニ向フ分速度ハホヾ水深等シキ矩形的ノ斷面デハ河川ノ單位幅ヲトツテ一ツノ流線ト見做ストキハ各流線トモ平等ニ此ノ影響ヲ被ルコトヽ考ヘラレル此レ等ノ實驗ハ水路ノ流線ヲ浮子ヲ以テ測定スルトキニ其ノ浮子ガ甚シク横ニソレルコトナキ事實及斷面流速測定ノ結果其ノ等速線(Isotachen)ガ可成ニ兩測ニ接近シテ水路ノ內部デハホヾ均一ナル流速ヲ有スルコト等カラ推察セラレル前者ノ例トシテハみししっぴー河ノ西南口ニ於ケル流速浮子測量ノ結果ニツイテ見レバ圖ノ如ク可ナリニヨキ平行性



第十五圖

ヲ示シテヰル(Professional memories XI 1919 後出)又後者ノ例ニツイテハうゐーんニ於ケルどなう運河(Hand. d. Ing. Wiss. Wasseran Bd. I s. 455)ハ川幅ガ其ノ水深ニ對シテ可成リニ小サイニモ係ラズ第十六圖ノ如ク等線流ハ可ナリニ兩岸ニ接シテヰル最大流速ノ$\frac{1}{2}$ノ流線ハ兩岸カラ川幅ノ$\frac{1}{20}$位ノ所ニ位スル

尚此等ノ事實ガ吾々ノ問題ノ如ク水路ノ呑口及吐口ノ場合ニモ尚適合スルヤ否ヤハ問題デアルガ玆ニ例示スル如クみししっぴー西南口ノ實測ニヨレバ流線ハ可ナリニヨイ安定ヲ保ツテヰル

扨斯クノ如クニシテ一種ノ流線ハ成立スルコトヲ許ストシテモ尚次ノ問題ガアル即此ノ流線內部ノ狀況ガ果シテ完全液體ノ流線ト同一性質ヲ有スルデアラウカトイフ事デアツテ換言スレバ其ノ流線ニ關シテ速位ガ成立シウベキカ否カデア

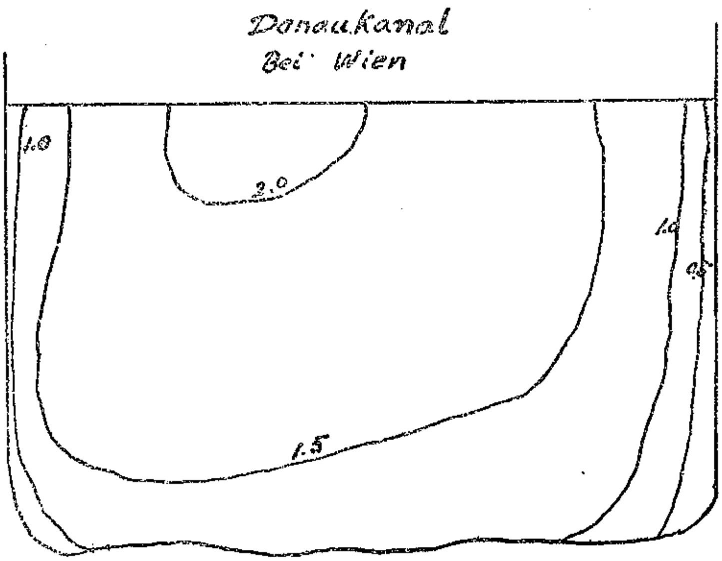
ル此レハ甚ダ疑問デアルガ萬一速位ガ成立シナイトスレバ吾々ハ分速度 u v ヲ次ノ如クニ假定スルコトガ出來ル

$$\left.\begin{aligned} u &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + u_0 \\ v &= -\frac{\partial\varphi}{\partial y} + v_0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (48)$$

但 φ ハ水流ヲ非旋廻性ト考ヘタルトキノ速位

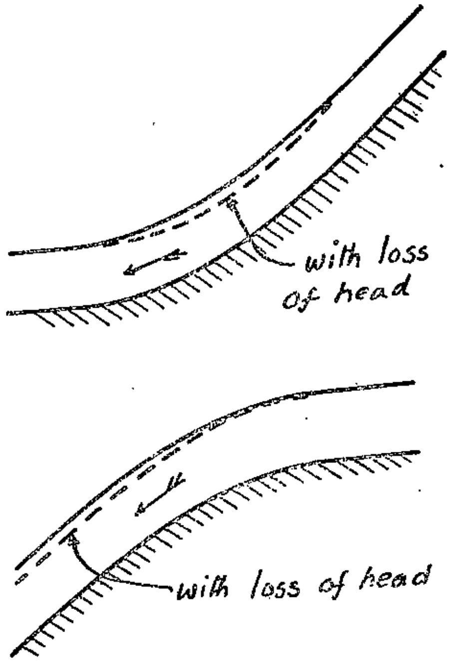
u_0 v_0 ハ渦其他速位以外ノ原因ニヨル速度

此處ニ於テ渦其他ノ速度ヲ生ズル第二次的原因ガ水流ノ各部ニ均一ニ分布サレテキルト考ヘルトキハ(48)式ノ u_0 v_0 ハ常數トナル然ルトキハ此ノ項ハ除去スルトモ問題ノ解決ニ何等性質的ノ變化ヲ來タス要素トハナラナイ然シ乍ラ若シモ此ノ値ガ水流ノ各部ニ於テ異ル場合ニハ u_0 v_0 ハ z ノ函數トナツテ u v ノ數學的解決ハ困難トナル



第十六圖

水路ノ斷面ガ急變スル場合ニハ寧ロ u_0 v_0 ガ常數デナイコトヲ實驗ガ示シテキル即此處ニ起ル損失頭 (Loss of head) ト稱スルモノハ此レデアツテ管ノ水流ニ於テ著シク表レテキル吾々ノ場合ニ於テモ呑口吐口等水流ノ斷面ガ可ナリニ變ルノデアルカラ或ハ此ノ影響ガ表レナイトモ限ラナイ此ノ事ハ全ク實驗ニヨラナケレバ精密ナルコトハ斷言出來ナイガ其ノ影響スル點ハ自由水面ノ勾配ヲ稍急ニスル性質ガアルト考ヘルコトヲ得吐口ニ於テハ多少其ノ勾配ヲ急ニスル位ノコトデスムガ呑口デハ此ノ爲メニ呑込量ヲ減少スル事トナルカラ注目スベキコトデアル（第十七圖參照）尚吾々ノ後節ニ述ベル議論デハ此ノコトハ無視シテ他日實驗ノ結果此レニ就イテ再

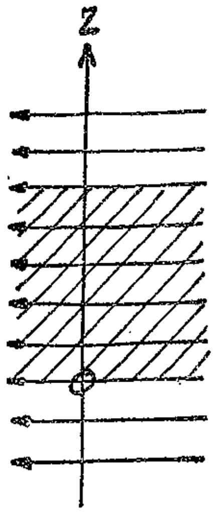


第十七圖

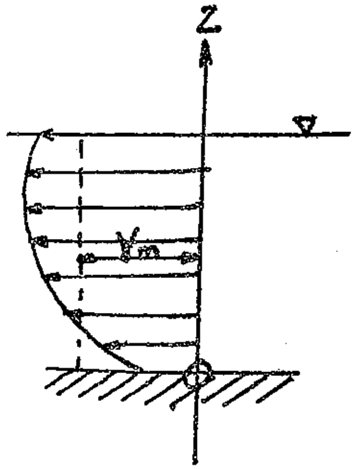
論スルコトヽスル

條件ノ第二ハ完全液體デアルナラバ摩擦力ガナイ爲メニ水面ニ勾配ガ少シデモアレバ必ズ加速度ヲ生ズル筈デアルカラ流線式ハ凡テ完全ナル平面ノ上ニ起ルモノト考ヘネバナラナイ然ルニ實際ノ水流デハ底面ノ摩擦力ガアル爲メ却ッテ相當ノ水面勾配ガアッテ始メテ加速度モ減速度モナイ水流ヲ生ズル夫レ故ニ實際ノ水流ニ於テモ流量一定ノ場合ニハ水位ハ自然水面勾配カラ決定サレ一定ノモノトナル從ッテ流速モ一定ノ點ニ於テハ常ニ不變デアッテ定流(Steady flow)ノ條件ヲ滿足スルコトガ出來ル洪水ノ起リツヽアルトキノ如ク流量不定ノ場合ニハ此ノコトハ成立シナイ又河川自身ノ流量ハタトヘ一定デアッテモ潮汐干滿ノ作用ヲ受ケル海ヘ注グ河川ナドデハ水深ガ絶エズ時ト共ニ變ル爲メ流速モ一定ノ場所ニツイテモ一定トハナラナイ從テ此處デハ此レ等ノ場合ハ全ク除外シテ考ヘル此ノコトハ後ニ餘論ニ於テ一寸述ベルコトヽスル

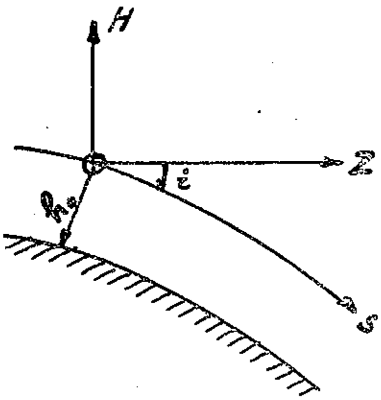
條件ノ第三ハ流速ノ上下ノ方向ニ對スル變化ノナイコトデ此レハ流線式ガ二軸的デアル爲メニ此レヲ實際ノ水流ニ適用スル場合ニ必要トナル原來二軸的ノ流線ヲ以テ三軸的ノ水流關係ヲ決定スルコトハ理論上甚ダ妥當ヲカクコトデアルガ今日ノ所三軸的ニ流線ヲ求ムルコトハ困難デアルカラ此レヲ適用シウルモノト假定シテ論ヲ進メルヨリ外ナイノデアル元來水流ヲ二軸的ニ考ヘルコトハ流速ガ第三ノ軸(即此處デハ上下ノ方向ノ軸)ニ於テハ不變デアルコトヲ意味スルモノデアッテ上下ノ方向ニハ無限ニ厚イ等速ノ層ヨリナッテヰルモノト考ヘルベキデアル從ッテ吾々ハ其ノ一部ヲ x y ニ平行ナル二平面デ切リトッテ考ヘルナラバ此ノ部分(第十八圖陰影ヲ施シタル部分)ノ水流ハソノマヽ二軸的ニ云ヒ表



第十八圖



第十九圖



第二十圖

ハスコトガ出來ル實際ノ水流ニ於テハ上下ノ層ニ於テ流速ガ不變デアルトイフコトハナイ實測ノ結果ニヨレバ水面ニ於テハ大デ水底ニ於テハ小デアルコトガ知レテキルソコデ吾々ハ此ノ縦速線（Vertical velocity curve）ノ平均流速ヲトツテ其ノ部分ノ流速ト考ヘテ水深ガ水路ノ各所デアマリ異ラナイ且水面勾配ノアマリ大ナラザル實際ノ水流ヲ考ヘレバ此レニ二軸的ノ流線ガソノマヽ充當スルモノト假定スルコトハ或程度マデ許サレルヤウニ思ハレル

(47)式ニ於テ坐標 s h ヲ第二十圖ノ如ク z H ニ變ズレバ

$$I = i = -\frac{dH}{dz}$$

$$\therefore \quad U = c_1\sqrt{h_0\left(-\frac{dH}{dz}\right)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (48)$$

然ルニ此左邊 U ハ流線式カラ得タル法則ニヨツテ各點デ變化スベキモノデアル今流線式デ速度ヲ一般ニ表セバ(12)カラ

$$|V| = \left|-\frac{dw}{dz}\right| \quad \text{in reduced unit}$$

然シ此レハ凡テ流量ヲ 2π ト考ヘテ出テキル式デ還元單位（Reduced unit）デ表ハシタモノト云フベキモノデ(48)ハ實用單位デ表ハシテアルカラソノ單位ヲ等シクスル爲メニ流線ノ勝手ナ一點ニ於ケル流速ヲ今實用單位デ表ハシコレヲ U_1 トスル此ノ大サハ今知レテキルモノ

トスル此ノU_1ニ相當スル點ノ速度ヲ絶對單位デ表ハシコレヲ $\left|-\frac{dw}{dz}\right|_1$ トスル此ノ値ハ流線式カラ容易ニ求マルモノデアル然ルトキハ

$$U = \frac{U_1\left|-\frac{dw}{dz}\right|}{\left|-\frac{dw}{dz}\right|_1} \quad \text{in practical unit}$$

∴ (48)式ニヨリ

$$\frac{U_1\left|-\frac{dw}{dz}\right|}{\left|-\frac{dw}{dz}\right|_1} = c_1\sqrt{h_0\left(+\frac{dH}{dw}\right)\left(-\frac{dw}{dz}\right)}$$

$$\left|-\frac{dw}{dz}\right|dw = \frac{c_1^2 h_0}{U_1^2}\left\{\left|-\frac{dw}{dz}\right|_1\right\}^2 dH$$

$$\frac{c_1^2 h_0}{U_1^2}\left\{\left|-\frac{dw}{dz}\right|_1\right\}^2 = A$$

ト置ケバ此ノ値ハc_1ヲ常數ト假定スレバ常數トナル

$$A\,dH = \frac{dw}{\left|-\frac{dz}{dw}\right|} \quad \cdots\cdots (49)$$

$-\frac{dz}{dw}$ ニ(38)式ヲ入ルヽ時ハ

$$A\,dH = \frac{2\sin k\pi}{kk'c}\cdot\frac{dw}{\sqrt{e^{2k'\varphi}+e^{-2k'\varphi}-2e^{(k'-k)\varphi}\cos\phi}} \quad \cdots\cdots (50)$$

此レ流線ノ要素的部分ニ於ケル水面ヲ示スベキ微分方程式デアル如何ナル角ヲ挾ム二隔壁ノ場合デモ此ノ式ヲ逐次使用

スル事ニヨッテ自由水面ノ各點ニ於ケル高サヲ求メルコトガ出來ル又或場合ニハ此式ノ積分ガ可能デアレバ直チニ全體ノ自由水面ノ有樣ガ求メラル

例ニヨッテ最モ大切ナ對稱線(中心線)ニ沿フ流線ノ自由水面ヲ求メレバ(43)(44)(45)式ヨリ

$$A_0\,dH_0=\frac{d\varphi}{1+e^{\varphi}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (51)$$

$$A_{\frac{1}{2}}\,dH_{\frac{1}{2}}=\frac{d\varphi}{\frac{\pi}{4}\left(e^{\frac{\varphi}{2}}+e^{-\frac{\varphi}{2}}\right)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (52)$$

$$A_{\frac{1}{4}}\,dH_{\frac{1}{4}}=\frac{d\varphi}{\frac{3\sqrt{2}}{16}\pi\left(e^{\frac{3}{4}\varphi}+e^{-\frac{\varphi}{4}}\right)} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (53)$$

ナル三式ヲ得

此等ヲ積分スレバ三ツノ代表的ノ場合ノ中心線ノ水面ガ求メラレル即(51)ヲ積分スレバ

$$A_0\,H_0+c=\log\frac{e^{\varphi}}{1+e^{\varphi}}$$

ニ H ノ原點ヲ今 $\varphi=0$ ニトレバ $c=\log\frac{1}{2}=-0.693$

$$A_0\,H_0=\log\frac{2e^{\varphi}}{1+e^{\varphi}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (54)$$

$\varphi>0$ $\quad \frac{2e^{\varphi}}{1+e^{\varphi}}>1$ $\quad \log\frac{2e^{\varphi}}{1+e^{\varphi}}>0$ $\quad H_0>0$

$\varphi<0$ $\quad$ 〃 <1 $\quad$ 〃 <0 $\quad H_0<0$

$$\varphi = +\infty \qquad \frac{2e^{\varphi}}{1+e^{\varphi}} = 2 \qquad \log\frac{2e^{\varphi}}{1+e^{\varphi}} = \log 2 \qquad H_0 = \frac{\log 2}{A_0}$$

$$\varphi = -\infty \qquad \text{,,} \quad = 0 \qquad \text{,,} \quad = -\infty \qquad H_0 = -\infty$$

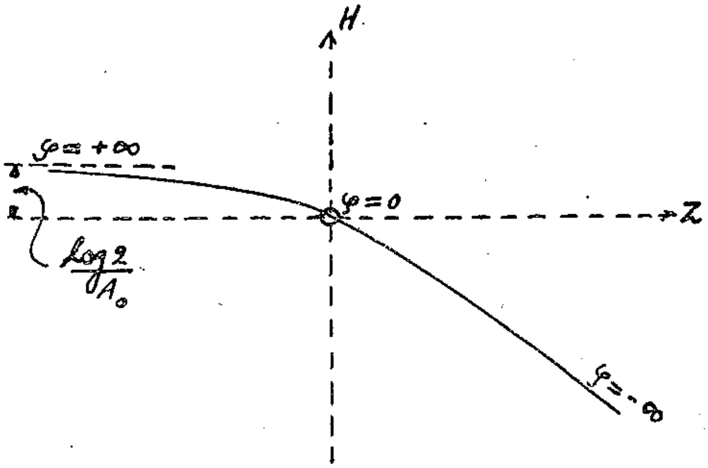
$$\varphi = 0 \qquad \text{,,} \quad = 1 \qquad \text{,,} \quad = 0 \qquad H_0 = -0$$

$$A_0 = \frac{c_1^2 h_0}{U_1^2}\left\{\left|-\frac{dw}{dz}\right|_1\right\}^2$$

$$\left|-\frac{dw}{dz}\right|_1 = \frac{1}{2}, \qquad U_1 = U_0$$

$$\therefore \quad A_0 = \frac{c_1^2 h_0}{4U_0^2}$$

$$\therefore \quad H_0 = \frac{4\log 2\, U_0^2}{c_1^2 h_0} \quad \text{at} \quad \varphi = -\infty \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (55)$$



第二十一圖

此レニヨリテ得タル値ヲ圖示スレバ第二十一圖ノ如シ

次ニ(52)ヲ積分スレバ

$$A_{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{2}} + c = \frac{8}{\pi}\tan^{-1}\left(e^{\frac{\varphi}{2}}\right)$$

ニ H ノ原點ヲ $\varphi = 0$ ニトレバ

$$c = \frac{8}{\pi}\tan^{-1} 1 = \frac{8}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4} = 2$$

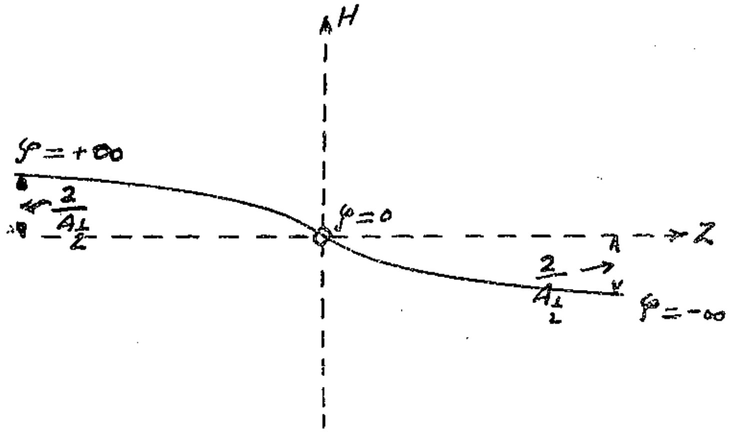
$$\therefore \quad A_{\frac{1}{2}} H_{\frac{1}{2}} + 2 = \frac{8}{\pi}\tan^{-1}\left(e^{\frac{\varphi}{2}}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (56)$$

$$\varphi=+\infty \qquad \tan^{-1}\left(e^{\frac{\varphi}{2}}\right)=\frac{\pi}{2} \qquad A_{\frac{1}{2}}H_{\frac{1}{2}}=2 \qquad H_{\frac{1}{2}}=\frac{2}{A_{\frac{1}{2}}}$$

$$\varphi=0 \qquad ,, \quad =\frac{\pi}{4} \qquad ,, \quad =0 \qquad H_{\frac{1}{2}}=0$$

$$\varphi=-\infty \qquad ,, \quad =0 \qquad ,, \quad =-2 \qquad H_{\frac{1}{2}}=-\frac{2}{A_{\frac{1}{2}}}$$

此レヲ圖示スレバ第二十二圖ノ如シ



第二十二圖

(53)式ハ有限式ニヨッテ積分ヲ表ハス事ハ困難デアルカラ級數積分ニヨッテ表セバ

$$A_{\frac{1}{4}}H_{\frac{1}{4}}+c=\frac{16}{3\sqrt{2}\pi}\int e^{-\frac{3}{4}\varphi}(1+e^{-\varphi})^{-1}d\varphi, \qquad \varphi>0$$

$$=\frac{16}{3\sqrt{2}\pi}\left(-\frac{4}{3}e^{-\frac{3}{4}\varphi}+\frac{4}{7}e^{-\frac{7}{4}\varphi}-\frac{4}{11}e^{-\frac{11}{4}\varphi}+\cdots\cdots\right)$$

原點ヲ $\varphi=0$ ニオケバ

$$c=\frac{4\times 16}{3\sqrt{2}\pi}\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}+\cdots\cdots\right)$$

$$\therefore \quad A_{\frac{1}{4}}H_{\frac{1}{4}}=\frac{16\times 4}{3\sqrt{2}\pi}\left\{-\frac{1}{3}\left(e^{-\frac{3}{4}}-1\right)+\frac{1}{7}\left(e^{-\frac{7}{4}\varphi}-1\right)-\frac{1}{11}\left(e^{-\frac{11}{4}\varphi}-1\right)+\cdots\cdots\right\}, \quad \varphi>0 \quad \cdots\ \cdots\ \cdots \quad (57)_a$$

又 $$A_{\frac{1}{4}}H_{\frac{1}{4}}+c=\frac{16}{3\sqrt{2}\pi}\int e^{\frac{\varphi}{4}}(1+e^{\varphi})^{-1}d\varphi, \quad \varphi<0$$

$$= \frac{16}{3\sqrt{2}\,\pi}\left(4e^{\frac{\varphi}{4}} - \frac{4}{5}e^{\frac{5}{4}\varphi} + \frac{4}{9}e^{\frac{9}{4}\varphi} - \frac{4}{13}e^{\frac{13}{4}} + \cdots\cdots\right)$$

原點ヲ $\varphi=0$ ニオケバ

$$c = \frac{4\times 16}{3\sqrt{2}\,\pi}\left(1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \cdots\cdots\right)$$

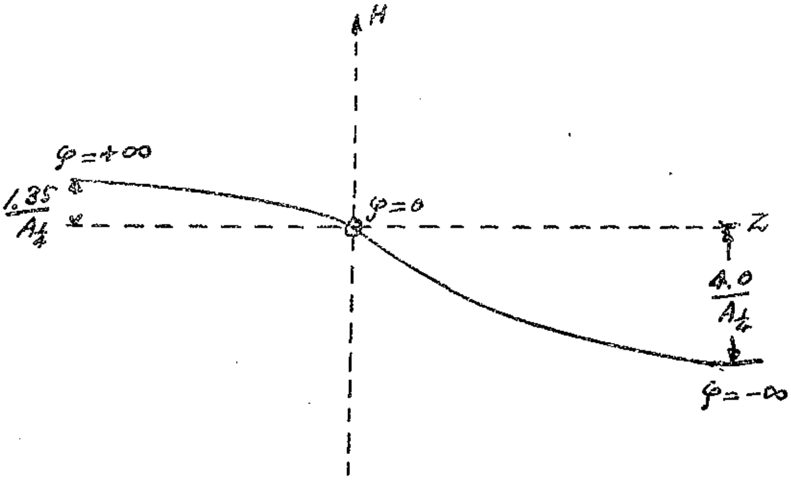
$$\therefore\quad A_{\frac{1}{4}}H_{\frac{1}{4}} = \frac{16\times 4}{3\sqrt{2}\,\pi}\left\{e^{\frac{\varphi}{4}} - 1 - \frac{1}{5}\left(e^{\frac{5}{4}\varphi} - 1\right) + \frac{1}{9}\left(e^{\frac{9}{4}\varphi} - 1\right) - \frac{1}{13}\left(e^{\frac{13}{4}} - 1\right) + \cdots\cdots\right\},\quad \varphi<0 \quad \cdots\cdots \quad (57)_b$$

$\varphi=+\infty \qquad A_{\frac{1}{4}}H_{\frac{1}{4}} = 1.35 \qquad H_{\frac{1}{4}} = \frac{1.35}{A_{\frac{1}{4}}}$

$\varphi=0 \qquad\quad ,, \quad =0 \qquad H_{\frac{1}{4}} = 0$

$\varphi=-\infty \qquad A_{\frac{1}{4}}H_{\frac{1}{4}} = -4.0 \qquad H_{\frac{1}{4}} = -\frac{4}{A_{\frac{1}{4}}}$

此レヲ圖示スレバ第二十三圖ノ如シ



第二十三圖

次ニ流線 $\varphi=\frac{\pi}{2}$ ニツイテ同一ノ事ヲ行ヘバ (43″)(44″)(45″) 式ヨリ

$$A_0'\,dH_0 = \frac{d\varphi}{\sqrt{1+e^2\varphi}} \quad \cdots\cdots \quad (51')$$

$$A_{\frac{1}{2}}'\,dH_{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}} \quad \cdots\cdots \quad (52')$$

$$A_{\frac{1}{4}}'\,dH_{\frac{1}{4}} = \frac{4\times 4}{3\sqrt{2}\,\pi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{e^{\frac{3}{2}\varphi}+e^{-\frac{\varphi}{4}}}} \quad \cdots\cdots \quad (53')$$

(51′) ヲ積分スレバ

$$A_0'\,H_0+c=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{1+e^{2}}-1}{\sqrt{1+e^{2\varphi}}+1}$$

$\varphi=0$ ヲ原點トスレバ

$$c=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$$

$$A_0'\,H_0=\frac{1}{2}\log\frac{(\sqrt{1+e^{2\varphi}}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{1+e^{2\varphi}}+1)(\sqrt{2}-1)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (54')$$

此式ニ於テ　$\varphi=-\infty,\quad \log\cdots\cdots=-\infty,\quad H_0=-\infty$

又　$\varphi=+\infty,\quad \log\dfrac{\sqrt{1+e^{2u}}-1}{\sqrt{\phantom{1+e^{2u}}}+1}=\log\dfrac{\infty}{\infty}$

故ニ此値ヲ評價 (Evaluate) スレバ

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1+2e^{2\varphi}}{\sqrt{\quad ''}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1+2e^{2\varphi}}{\sqrt{\quad ''}}}=1$$

$$\log 1=0,\qquad \therefore\quad H_0=\frac{\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}{A_0'}$$

$$A_0'=\frac{c_1^{\,2}\,h_0}{U_1'^2}=\left\{\left|=\frac{dw}{dz}\right|_1\right\}^2$$

$$\left|-\frac{dw}{dz}\right|_1=\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad U_1'=U_0'$$

$$\therefore \quad A_0' = \frac{c_1^2 h_0}{2U_0'^2}$$

$$\therefore \quad H_0 = \log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{U_0'^2}{c_1^2 h_0} \quad \text{at} \quad \varphi = \infty \quad \cdots\cdots (55')$$

然ルニ元來此値ハ前ニ求メタル(55)ト一致スベキ理ナルニヨリコレヨリU_0トU_0'トノ關係ヲ見出シ得即

$$U_0' = 1.26\, U_0$$

(52′)ヲ積分スレバ

$$A_{\frac{1}{2}}'H_{\frac{1}{2}} + c = \frac{4}{\pi}\left(-2e^{-\frac{\varphi}{2}} + \frac{1}{5}e^{-\frac{5}{2}\varphi} - \frac{6}{72}e^{-\frac{9}{2}\varphi} + \cdots\cdots\right) \quad \varphi > 0$$

$\varphi = 0$ヲ原點トスレバ

$$c = \frac{4}{\pi}\left(-2 + \frac{1}{5} - \frac{6}{72} + \cdots\cdots\right) \approx -2.4$$

$$A_{\frac{1}{2}}'H_{\frac{1}{2}} = \frac{4}{\pi}\left\{-2\left(e^{-\frac{\varphi}{2}} - 1\right) + \frac{1}{5}\left(e^{-\frac{5}{2}\varphi} - 1\right) - \frac{6}{72}\left(e^{-\frac{9}{2}\varphi} - 1\right) + \cdots\cdots\right\} \quad \varphi > 0 \quad \cdots\cdots (56')$$

$$H_{\frac{1}{2}} = \frac{2.4}{A_{\frac{1}{2}}'} \quad \text{for} \quad \varphi = +\infty$$

此$H_{\frac{1}{2}}$ノ値ハ元來(56)ニヨリテ得タルモノト一致スベキニヨリコレヨリ$A_{\frac{1}{2}}$ト$A_{\frac{1}{2}}'$トノ關係ヲ見出スコトヲ得

$$A_{\frac{1}{2}}' = 1.2\, A_{\frac{1}{2}}$$

或ハ此ヨリ尚$U_{\frac{1}{2}}$ト$U_{\frac{1}{2}}'$トノ關係ヲ見出シ得ルコト前ト同一デアル

(53′)ヲ積分シ原點ヲ$\varphi = 0$ニトレバ

$$A_{\frac14}'H_{\frac14}+c=\frac{4\times4}{3\sqrt{2}\,\pi}\left(-\frac{4}{3}e^{-\frac34\varphi}+\frac{2}{11}e^{-\frac{11}{4}\varphi}-\frac{3}{38}e^{-\frac{19}{4}\varphi}+\cdots\right)$$

$$c=\frac{4\times4}{3\sqrt{2}\,\pi}\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{11}-\frac{3}{38}+\cdots\cdots\right)=-1.49 \qquad \varphi>0\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots(57')_a$$

$$A_{\frac14}'H_{\frac14}+c_1=\frac{4\times4}{3\sqrt{2}\,\pi}\left(4e^{\frac{\varphi}{4}}-\frac{2}{9}e^{\frac94\varphi}+\frac{3}{34}e^{\frac{17}{4}\varphi}-\cdots\cdots\right)$$

$$c_1=\frac{4\times4}{3\sqrt{2}\,\pi}\left(4-\frac{2}{9}+\frac{3}{34}-\cdots\cdots\right)=4.64 \qquad \varphi<0\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots(57')_b$$

此ヨリ

$$H_{\frac14}=\frac{-c}{A_{\frac14}'}=\frac{1.49}{A_{\frac14}'} \qquad \text{for}\quad \varphi=+\infty$$

$$H_{\frac14}=\frac{c_1}{A_{\frac14}'}=\frac{-4.64}{A_{\frac14}'} \qquad \text{for}\quad \varphi=-\infty$$

此(57)ニヨリテ求メタル$H_{\frac14}$ノ値ト一致スベキニヨリ其レヨリ$A_{\frac14}$ト$A_{\frac14}'$トノ關係ヲ見出スコトヲ得

$$A_{\frac14}'=1.1\,A_{\frac14} \qquad \text{for}\quad \varphi=+\infty$$

$$A_{\frac14}'=1.15\,A_{\frac14} \qquad \text{for}\quad \varphi=-\infty$$

此二値ハ合致スベキモノナレドモこんま以下二桁目ニ誤差ヲ生ジタルハ近似法ヲ用ヒタル爲デアル尚此レヨリ$U_{\frac14}$ト$U_{\frac14}'$トノ關係ヲモ見出シ得ルコト前同樣デアル

隔壁ニ沿フ流線ニ對シテハ隔壁尖端ニ於テ函數ガ特異點(Singular point)ヲモツ爲メ積分ハ困難トナルガ此ノ場合ハ實用上ニモ不要デアルカラ省クコトヽスル

尚流線ノ各點ニ於テノ自由水面ノ勾配ヲ見出スコトモ容易デアル(49)式ヨリ

$$A\frac{dH}{dz}=-\frac{1}{\left|-\dfrac{dz}{dw}\right|^{2}} \quad \cdots\cdots (58)$$

此ニ(38)式ヲ入レル時ハ

$$A\frac{dH}{dz}=-\frac{4\sin^{2}k\pi}{k^{2}k'^{2}c^{2}}\times\frac{1}{(e^{2k'\varphi}+e^{-2k\varphi}-2e^{(k'-k)\varphi}\cos\psi)} \quad \cdots\cdots (59)$$

(43)(44)(45)式ヲコレニ適用スレバ

$$A_0\frac{dH_0}{dz}=-\frac{1}{(1+e^{\varphi})^{2}} \quad \cdots\cdots (60)$$

$$A_{\frac{1}{2}}\frac{dH_{\frac{1}{2}}}{dz}=-\frac{1}{\dfrac{\pi^{2}}{16}\left(e^{\frac{\varphi}{2}}+e^{-\frac{\varphi}{2}}\right)^{2}} \quad \cdots\cdots (61)$$

$$A_{\frac{1}{4}}\frac{dH_{\frac{1}{4}}}{dz}=-\frac{1}{\dfrac{18\pi^{2}}{16\times16}\left(e^{\frac{3}{4}\varphi}+e^{-\frac{\varphi}{4}}\right)^{2}} \quad \cdots\cdots (62)$$

φ	$\dfrac{dH_0}{dz}$	$\dfrac{dH_{\frac{1}{2}}}{dz}$	$\dfrac{dH_{\frac{1}{4}}}{dz}$
$-\infty$	0	0	0
0	$-\dfrac{1}{4A_0}$	$-\dfrac{4}{\pi^{2}A_{\frac{1}{2}}}$	$-\dfrac{32}{9\pi^{2}A_{\frac{1}{4}}}$
$-\infty$	$-\dfrac{1}{A_0}$	0	0

以上ハ凡テ呑口ノ場合ナレドモ吐口ノ場合ニハ單ニ$\frac{dH}{dx}$ノ符號ヲ反體ニスレバ直チニ求メラレル即(49)(58)ノ代リニ

$$A\,dH = \frac{dw}{\left|-\frac{dx}{dw}\right|} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (63)$$

$$A\frac{dH}{dx} = \frac{1}{\left|-\frac{dx}{dw}\right|^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (64)$$

ヲ用ヒレバヨイ從テ絶對値ニハ何等ノ差異ヲ生ジナイ事ハ明カデアル

以上ハ水路何レノ部分ニ於テモ水深ガ一定不變デアルテフ假定ノ場合ニ於ケル水位デアルガ萬一水深ガ各部デ異ツテヰルトキハ上述ノ場合ヨリ一層大膽ナル假定ヲシナケレバナラナイ即チ實際ノ場合ニ於テハ此水深ノ差ハ水深自身ニ對シテ小サイ場合ガ多イ樣デアルガカヽル際ニハ流線ハ殆ンド此場合ト同ジ舊形ヲ維持スルモノト假定シテ挿入法ヲ行ヘバ水位ノ問題ハ上述ノ方法カラ演繹スルコトヲ得例ヘバ平行隔壁ニヨリテ廣イ場ニ流出スル場合ノ如キハ次ノ如クニ考ヘレバ宜イ

假リニ海ト河川トノ場合ト考ヘレバ海ニ滿干ノ差ガアルトカ川ニ洪水低水ノ差ガ起ルトカニヨッテ生ズベキ河海ノ水位ノ違ヒ方ニ凡ソ二通リアル即河水ノ方ガ海ヨリモ水深ノ深イ場合ト淺イ場合トデアル前者ノ場合ニハ先ヅ以テ淺イ海ト同一ノ水深ヲモツ河ヲ想像シテソレニ相當スル水面勾配ヲ流量カラ算出スル夫レカラ深イ河ト同一ノ水深ヲモツ海ヲ想像シテソレニ相當スル水面勾配ヲ前ト同一流量トイフ條件ノ下ニ算出スル此二ツノ算出ニハ前述ノ等水深ノ場合ヲ其儘用ヒル而シテ此二ツノ場合ヲ並立セシムル樣河ノ部分デハ深イ方海ノ部分デハ淺イ方ニ漸近スル中間曲線ヲ流量不變ノ條件カラ決定スル此中間曲線ハ嚴密ニ言ヘバ(46)式ヲ用フベキデアルガ此レハ元々一ツノ補正曲線位ニ考ヘレバしぇじー式ヲ用ヒテ近似値ヲ得レバ充分デアラウ河水ノ方ガ海ヨリモ淺イ時モ同樣ノ考ヘガ用ヒラレル

$$U = c\sqrt{RI} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (46')$$

斷面 $A = Bh$ 但 $B =$ 川幅, $h =$ 水深

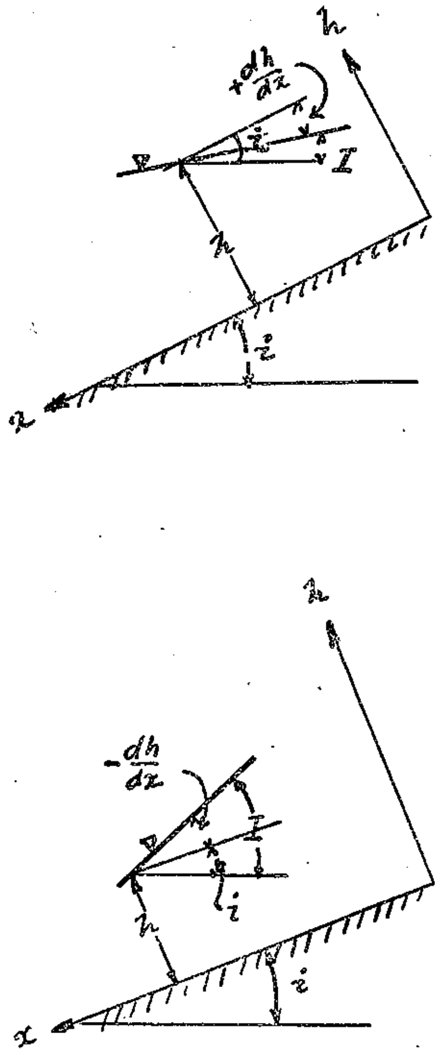
川幅充分ニ大ナルトキハ $R \approx h$

故ニ流量Qハ次ノ如クナル

$$Q = Ac\sqrt{RI} = cBh^{\frac{3}{2}}I^{\frac{1}{2}}$$

今川底ヲホボ平面ト考ヘ其ノ傾斜角ヲiトシ底面ニ沿ヒ下流ニ向ッテ一軸xヲトリコレニ直角ニ坐標軸hヲ取ルトキ圖ニヨリ水面勾配Iノ値ハ次ノ如クナル事ヲ知ル

第二十四圖



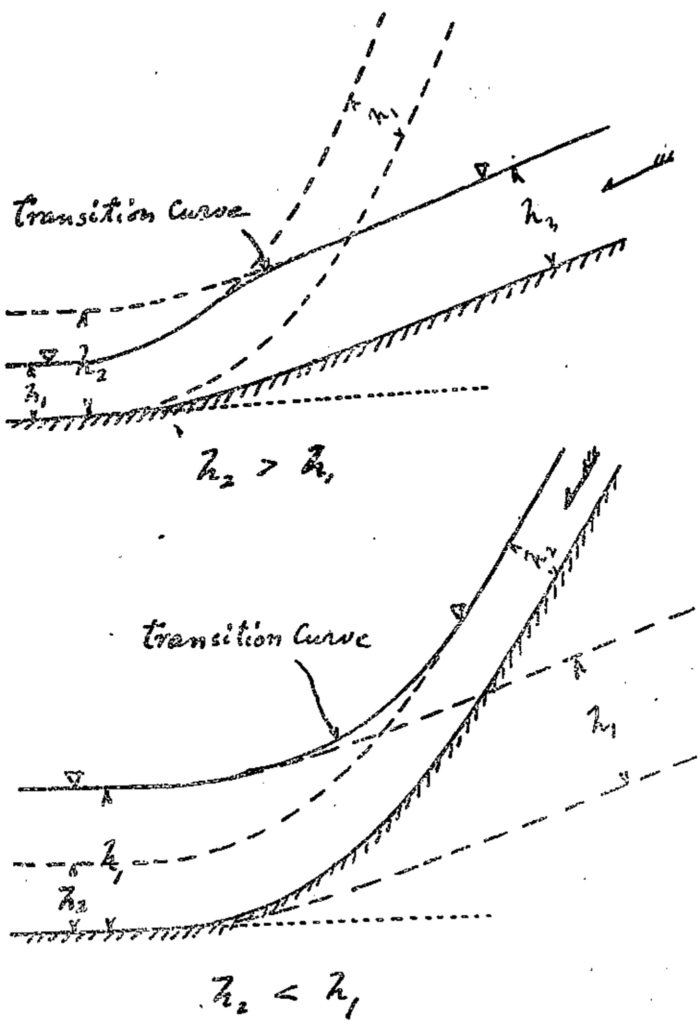
$$I = i - \frac{dh}{dx}$$

$$\therefore \quad Q^2 = c^2B^2h^3\left(i - \frac{dh}{dx}\right)$$

$$\frac{dh}{dx} = i - \frac{Q^2}{c^2 B^2 h^3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (65)$$

此レ推移曲線 (Transition curve) ヲ與フベキ微分方程式ナレドモ此式ヲ積分スル事ハ困難デアル 從テ吾々ハ此式ニ先ヅ常數モシクハ常數ニ近キ $Q \cdot i \cdot c \cdot B$ ノ値ヲ插入シ次ニ上流推移點ヨリシテ逐次 h ノ値ヲ插入シテ一ツノ直線族ヨリナル包絡線 (Envelope) ヲ描クトキ此レ求ムル推移曲線ニシテ其大體ノ模樣ハ第二十五圖ノ如クナル

第二十五圖



七　河口水流ノ實例

實際ニ起ル呑口吐口ノ水流ニ就イテ上述ノ各式ヲ應用スル場合ニ考フベキコトハ上述ノ公式ヲ直接應用シ得ベキ理想的ノ場合ガ實際ニ其儘現ハルヽ事ノ甚ダ稀デアルトイフ事デアル即水路ノ各部ニ於テ水深一定不變ナル事水流ガ平靜ニシテアマリ大ナル流速ヲ有セザル事流量並ビニ水位一定不動ナル事等ノ事項ガ理想通リニ行ハルヽコト少ナク加フルニ風波海流ノ影響其他種々地方的影響ヲ受ケテ實際ニハ恐ラク極メテ複雜ナル現象ヲ呈スルコトデアラウ從テ斯カル場合ニ公式ヲ適用スル際ニハ色々ノ補正ヲ要スル事ハ一般ノ自然現象ヲ證明スベキ場合ニ常ニ起ル事デアル吾人ノ場合モ恐ラク簡單ニ公式ヲ適用スル事丈デハ到底完全ニ當ハマラナイト思ハレル從ツテ實例ニ就イテ詳細ニ亘ツタ應用法ノ示ス事ハ甚ダ必要ナ事ト信ズル次第デアルガ不幸ニシテ斯クノ如キ實例ヲ有サナイ爲メ著者ハ先賢ノ記錄ヲ借リテ不完全乍ラモ今マデ述べ來ツタ公式ノ應用ノ一端ヲ試ミヤウト思フ

寡聞ナル著者ガ先賢ノ書ヲ渉ツテ得タ實例ノ中デ比較的詳細ニ亘ル調査報告ハ Professional Memoires IX (1917) ニ E. H. Schulz ガ記載シタ The Passes of the Mississippi River 及ビ同誌 XI (1919) ニ Lipsey ガ報告シタ Currents at and near mouth, Southwest Pass, Mississippi River デアル兩者何レモ世界有數ノ大河デアルみししっぴー河口殊ニ主トシテ其ノ南西口ノ記述デアツテ後者ノ如キ可成ニ詳細ナ測量調査ノ結果ヲ擧ゲテ居ルガ尙充分トハ言ハレナイ例ヘバ河口上下ノ水面勾配ニ就イテハ何等觀測ノ結果ヲ擧ゲテナイ又測定時ノ流量ニ就イテモ何等記載スル所無ク河口ノ斷面海底ノ模樣等河口ト海トノ水深ノ關係ヲ見出スベキ基件モ無イ從ツテ著者ハ此處ニハ簡單ニ流線ノ方向及中心流線ニ沿フ流速ヲ比較スル位ニ止メナケレバナラナイ

此實例ニ於テハ流線ノ方向ト流速トハ比較的ヨク調査サレテキル風向等ノ事モ考ヘラレテキルシ又洪水時ニ泥水ヲ吐出シ其ノ海水トノ境界線ヲモ測定シテアル此等ニヨツテ流線ニ就イテハ可成ニ確實ナル要件ヲ與ヘル次第デアル且其レ等ノ測定ニ用ヒタル浮子等ニツイテモ相當研究ノ結果風等ノ爲メニ起ル誤差ヲ極メテ少サキモノニシテキル等可成ニ信賴

スルニ足ル結果デアラウト思ハレル
みししっぴー河ハ一、二四〇、〇〇〇方哩即全合衆國ノ凡四一%ニ當ル廣大ナル流域ヲ有シテ最大流量（此時にゅーおるれあんすト南西口突堤先トノ水位差二〇・八三尺此距離一一四哩）凡一、三〇九、八〇〇呎秒ニ達ス　其低水流量ト雖モ一〇〇、〇〇〇呎秒ヲ有スル稀世ノ大河デアル其河口ニ近キ部分ハ廣大ナル三角洲ヲナシテヰテ數個ノ派川ニヨツテ海ニ注イデヰル南西口ハ其ノ中ノ主要ナルモノデ古クカラ航行用トシテ南口ト共ニ問題トセラレテヰタ所ノモノデアル其概況ハ別紙附圖第六ニ示ス如ク河口ニ達スル迄ニハ可成長イ（凡一九・五哩）均一幅員（凡二、〇〇〇呎）ノ河流ヲナシテ其尖端ニハ附根デ六、〇〇〇呎尖端デ三、〇〇〇呎ノ幅員ヲ有スル多少收斂的ノ突堤ニヨツテ海ニ導カレテヰル然シ乍ラ此收斂突堤ノ內側ニハ適當ナル距離ニ水制ヲ設置シテアツテ內部ハ凡三、〇〇〇呎ノ均一幅員ノ流路ヲ作ツテヰル故吾々ハ此レヲ平行突堤トシテ取扱フ方ガ寧ロ適切デアル　此突堤ノ間ヲ流下スル平均洪水流量ハ全みししっぴー河ノ約四〇・九%ヲ占メ凡三五五、〇〇〇呎秒デアルトイフ事デアル其際ニ於ケル南西派川ノ分岐點ト河口トノ水位差凡五呎トセラレテヰル水路ノ斷面ハ詳細ナル報告ナキモ兩側深サ二〇呎中心三五呎位ノ可ナリ角形ニ近キモノヽ樣デアル
此ノ西南口河口附近ニ於テ測定セラレタ水流ノ觀測ハ一九一五年四、五月ニ於テ表面水流五水中流二一又一九一六年四月ニ於テ表面水流一水中流三、又一九一六年十月ヨリ一九一七年九月ニ至ル間ニ表面水流二、水中流五アリ多クハ河ノ洪水時ニ於テ行ツテヰル此レ此ノ觀測ノ主タル目的ガ洪水時ニ流下スル泥土ノ問題ニアルガ爲メデアル尙水中流ハ表面下九〇呎ノ深サニ至ルマデ觀測シテヰル
此等ノ觀測ノ結果ヲ綜合スレバ低水時ニ於テハ潮汐ノ影響（此附近めきしこ灣ノ潮汐ノ差平均一六吋）ニヨツテ河口ノ水流ハ順逆ヲ生ジ複雜ナル狀況ヲ呈スルモ洪水時ニ際シテハ殆ンド常ニ規則正シク流出シテ突堤尖端ヨリ凡三、〇〇〇呎ノ海中迄殆ンド河水ヲ以テ海水ヲ置換スル而シテ其レヨリ先ハ漸次河水ハ海面ノ上層ニ浮ビ出テ其厚サ（即流出河水ノ水深）ハ漸次薄クナツテ約一〇哩ニ近キ海上ニ流レ出ヅルトイフ事デアル其形狀ハ扇狀ヲナシテ流線モ可ナリニ規則正

シイ且突堤尖端ヲ遠ザカルニ從ツテ漸次流速ヲ遞減スル事及河ノ水位ノ高低ニヨリテ其等ノ流速ニ大小ヲ生ズル事モ知レテヰル又風ノ方向及大サガ此等流線ノ方向及流速ニ影響スル事ハ勿論デアルガ其等ハヤハリ洪水時ニ於テハ極メテ少ナイ事ガ解ッタ斯クノ如キ河水ノ下ニ横ハル海水（即灣水ト稱スルモノ）ハ其上ヲ流レル河水ノ影響ヲ受クル部分モ多少アル筈デアルケレドモ此レハ他ノ影響ヲ被リ必ズシモ河水ト行動ヲ共ニシテヰナイ又河水ト灣水トノ境界面附近ニ於テハ河水ト灣水トノ衝突ニヨリ多數ノ渦ヲ生ズル爲メ一層複雜ナル運動ヲナシテヰルトイフ事デアルぺんく（A. Penck: Morphologie der Erdoberfläche 1894 II. teil s. 497）くりゅんめる（O. Krümmel: Ozeanographie II. 1887 s. 359）ノ如キ地理學者ハ河水ガ重イ海水中ニ注入スル場合ニハ河水ハ水面ニ浮流シ海水ハ此ニヨリテ下部ヲ逆流シテ河口ニ向ヒ之ガ門洲ヲ作ル主因タル如ク說クケレドモ此處ニアゲタ實測デハ甚ダシク底面ニ近イ部分ハ解ラナイケレドモ相當ノ深サ迄ハ少クトモ逆流ヲ生ジタ例ハ無イ樣デアル此レハ洪水時ニ限ルカモ知レナイガ注目ニ値スル事デアル

扨實測ニヨッテ得タル水面流線ノ方向及其等ヨリ挿入法ニヨッテ凡テノ方向ノ水面流線ヲ示スベキ附圖（Prof. Memoires XI. p. 81）ニ吾々ノ平行壁ヨリ流出スル流線ヲ應用スルニ當リ吾々ハ色々ノ縮尺ヲ用ヒテ其流線ヲ描イテ見テ曲率ノ比較的ヨク合フモノヲ重ネ合セテ見ルト別紙附圖第七ノ如クナル即平行壁ノ壁面ニ近キ部分ノ流線ハ全ク現レナイデ僅カニ中央部ノミガ現レテヰル此レハ先ニ水流ノ性質ノ所デ述ベタ如ク水ノ水中ヘノ噴射ノ問題デアッテ諸大家ガ說ヲ異ニスル處デアル此ノ場合モシ流線外ノ部分ガ空氣ナラバ眞ノ噴射トナルノデアルカラ水力學ノ敎ヘル所ニヨレバ突堤ヲ出タ水流ハ少クトモ暫クノ間ハ突堤端ノ幅ト等シイ幅ヲ以テ全ク等速流ヲ續ケルベキ筈デアル又其部分ガ個體デシカモ摩擦ノ影響ヲ無視シ得ルナラバ水流ハ流線ノ何レナリトモ（即ϕノ勝手ナ値）個體ノ形ニ合ッタ曲率ヲモツ流線ヲ境界トシテ其レヨリ中央部ノ流線ニヨリテ成立スルコトヽナル然ルニ吾々ノ場合ハ此ノ兩者ノ何レニモ屬セズシテ其外側ノ部分ヲ充タスニヤハリ水ヲ以テスル爲メ問題ハ複雜ニナル然シ如上ノ實例ニ就イテ考ヘルニ實際ニハ後者即外側ノ水ヲ個體ノ如ク動カナイモノトシテ考ヘテモ大ナル不便ガナイ樣デアル即附圖第七ニヨレバ突堤端ノ幅一・八（還元値即ϕノ値

ヲ0カラπマデトシテ其値ニテ計リタル値）即 $\phi=2.24$ ガ最モ外側ノ流線即限界流線ヲナシテキル突堤先端ノ眞ノ幅ハ三、〇〇〇呎デアルカラ還元値ノ一ハ一、六六五呎程ニナル流線ノ先端ハ一般ニ右側ニ曲ツテキルガ此レハ灣流ノ影響デアッテ此處ニハ考ヘル必要ガ無イ尚試ミニ中心流線ニ沿フ流速ニ就イテ實例ト理論ノ結果トヲ比較スル即最モ整然ト觀測サレテアル一九一七年一月及二月ノ水面流速ノ實測（Prof. Memo. XI p. 77）ヲトリ此レヲ $V-S$ 圖表（附圖第三）ヨリ得タル結果ト比較スレバ次ノ如シ

突堤端ヨリノ距離（呎）	3,500	11,000	18,000	25,000
同（絶對値）	2.1	6.6	10.8	15.0
實測流速（呎）	6.58	3.43	1.94	1.76
同（絶對値）	0.48	0.25	0.142	0.128
理論流速（絶對値）	0.48	0.28	0.18	0.13

但絶對流速ハ三、五〇〇呎ノ所ノモノガ實際ト理論ト一致スル様ニトル

此レヲ見レバ流速漸減ノ割合ハ實際ト理論ト良ク合ッテキルコトヲ知ル突堤附近ノ水深ハ正確ナルコトハ不明デアルガ凡三〇呎位ノ様デアル而シテ海中ニ進ムニ從ッテ元ヨリ水深ハ漸次ニ増大スルケレドモ此ノ海底ニ近キ或高サ迄ハ灣水ガ存在シ其爲ニ河水ノ水流ノ深サニ關シテハ極メテ複雜ナル現象ヲ呈シ此レガ何程トナレルヤヲ想像スルコトハ困難デアルガ如上ノ結果ニヨレバ少クトモ水面流速ニ就イテハ吾々ノ理論ノ要求スル條件ガ可ナリニ良ク滿足サレテキル觀ガアル何レニシテモ極メテ複雜ナルベキ河口流ニ於テ斯クノ如キ一致ヲ見ルノハ寧ロ不思議デアル

即吾々ハ河口ニ於テ今二三ノ代表的水面流線ノ形狀ヲ觀測スルコトガ出來ルナラバソノ水面流線ニツイテハ如上ノ方法ニヨリ凡テノ方向ニ對シテ流線ノ方向及流速ノ大サヲ計算スルコトガ出來ルシカモ其等ノ場合海底ノ勾配等ハアマリ關係ヲ有シナイ尚進ンデ平均流速ノ關係如何ニ至ッテハ尚複雜ナル考察ヲ要スル事デモアリ今日デハ檢證ノ材料タル實測ノ結果ヲ持タ無イカラ後日ノ研究ニ讓ルコトヽスル

八　河口ニ於ケル土砂堆積

前述ノみししっぴー南西口ニ於ケル如ク又ろーん中央口 (Guérard: On the mouth of the River Rhone, Inst. C. E. LXXXII 1885.) だにゅーぶ・すりな口 (Hartley: On the changes that have recently taken place along the sea coast of the delta of the Danube and on the consolidation of the provisional works at the Sulina mouth, Inst. C. E. XXXVI, 1873) 信濃河口 (安藝博士土木學會誌第一巻第三號) ニ於ケル如ク土砂ヲ排出スル河川ガ潮汐作用ノ少ナイ海中ニ注入スル場合ニハ必ズ其處ニ洲ヲ生ズル斯クノ如キ洲ノ成因ハ極メテ多種多様デアルケレドモ主トシテ河川ノ排出土砂ニヨル事ハ諸大家ノ說ヲ一ニスル所デアル而シテ河川ガ土砂ヲ多量ニ排出スルノハ洪水ノ際デアルカラ洪水時ノ河口流ノ問題ヲ研究スレバ門洲ノ生成ガホボ解ル事トナル洪水時ノ河口流ハ平水時ヨリモ却ッテ吾々ノ理論ト一致シ得ベキニヨリ此レハ甚ダ都合ノヨイ事デアル

河川ガ流下スル土砂ノ中輕ク少ナルモノハ水流中ニ支ヘラレテ浮流 (Suspension) ヲナシツヽ流出スル重キ大ナルモノハ水底ヲ轉々シ所謂轉動 (Rolling) ヲナシツヽ流出スル浮流ニヨルモノハ遠ク海中ニ出デ廣キ面積ニ漸次沈澱シテ海洲 (Bank) ヲナシ轉動ニヨルモノハ近ク河口附近ニ堆積シテ門洲 (Bar) ヲナスモノト考ヘラル此ノ二者ハ全ク異ッタ性質ニヨッテ成生サレルモノデ海洲ノ方ハ航行上差シタル大問題トナル事ハ少ナイガ門洲ニ至ッテハ河口港ニ於ケル最モ重大ナル問題デアル著者ハ即コノ二者ニ就イテ論ズルコトヽスル

先ヅ門洲ノ成生ニ就イテ考フルニ河底ヲ轉動スル土砂 (Geschiebe) ノ運動ニ關シテろある河ノ研究者トシテ有名ナるしやら (Lechalas) ニ從ヘバ河底ノ土砂ガ移動シ始ムル爲メニハ或限界流速アリ此レヲ超過スル時ハ土砂ハ漸次移動ヲ始メ流速再ビ漸減シテ或値ニ達スレバ再ビ轉動ヲ止ム而シテ此二ツノ限界流速ハ多少大サヲ異ニスルケレドモ底面ヲナス土砂及水深水面勾配等ニ變化ナケレバ何レモ一定不變ノ値ヲナシテヰル (Flamant: p. 309) 斯クノ如キ限界流速ガ土砂ノ大小形狀及比重ニヨリテ變化スル事ハ勿論ニシテ此レニ關シテハ通常ノ水力書ニ詳論アリ (Flamant: p. 292; Handb. d.

Ing. Wiss. Wasserbau s. 343) 即轉回ニ必要ナル限界流速Uハ

$$U=\sqrt{\frac{2g\theta}{k}\cdot\frac{V}{A}\left(\frac{\Pi_1}{\Pi}-1\right)} \qquad \cdots\cdots \qquad (66)$$

又滑動ニ必要ナル限界流速Uハ

$$U=\sqrt{\frac{2gf}{k}\cdot\frac{V}{A}\left(\frac{\Pi_1}{\Pi}-1\right)} \qquad \cdots\cdots \qquad (67)$$

トナルコノ二者ニ於テ

V = 砂粒ノ容積，　A = 砂粒ノ水流ニ向ツテノ斷面積，　Π_1 = 砂粒ノ比重

Π = 水ノ比重，　θ = 砂粒ニ働ク重力ト水流力ノ挺率ノ比，

f = 砂粒ト河底トノ限界摩擦係數，　k = 砂粒ノ形狀ニヨル水流力ノ係數

k ノ價 球　: 0.7886 (Eytelwein)
　　　楕圓 : 0.8　(Sternberg)

何レニシテモ土砂ノ形狀大サ比重ヲ知レバUノ値ハ求メラレル而シテ此(66)(67)ノUノ値ハ大差ナシぱーかー (Parker) すらっぷ (Thrupp) ハ河底ヲホヾ同一形狀大サ比重ノ砂粒ヲモツテ充タシテ水流ノ勾配水深等ヲ變ヘテ色々ノ場合ノ限界流速ヲ實驗ニヨツテ求メタ其等ノ結果ニヨレバ砂粒ノ流レ始ムルトキノ水路ノ斷面ノ平均流速ハ水流ノ勾配其他ニハ無關係デ只水深ノ或冪ニ比例スル即式ヲ以テ表ハセバ

$$v=kH^n \qquad \cdots\cdots \qquad (68)$$

但　v = 砂粒ノ流レ始ムルトキノ斷面平均流速，　H = 水深

k, n = 係數呎秒ヲ單位トスレバ

細砂粒	(平均徑 0.″01)	$n = 0.5$	$k = 0.5$–1.5
粗砂粒	(平均徑 0.″04)	$= 0.3$–0.33	$= 1.5$–2.2
礫		$= 0.25$	$= 2.2$–5.0

流速ガ漸減シテ行ッテ今マデ轉動シテヰタ砂粒ガ停止スルニ至ル限界時ノ斷面平均流速モ亦如上ノ式ト同一ノモノヲ以テ表ハシ得單ニ係數 k n ノ値ニ少シヅヽノ差アルノミデアル (Parker: Control of Water p. 492)

扨門洲ノ生成ヲ論ズルニ當リ河底ヲ充タスニホヾ均一ノ形狀大サ比重ヲモツ砂粒ヲ以テスルモノト考ヘ此レガ流下シ河口ニ達シテ流速ノ減少ニアヒ堆積スルモノトスルトキハ元來河口附近ニ於テハ水深ハホヾ等シキカ又ハ急激ナル變化ナシトイフ假定ニヨッテ今迄モ論ジテ來テヰルノデ吾々ハ此ノ場合土砂ノ堆積ヲ始ムル場所ハ單ニ平均流速ノ或一定ノ値ヲ有スル軌跡ヲ求レムバ足リル既ニ求メタ流線式ハ表面流速ニ對シテハ可成ニヨク當ハマルコトハ前節ニ述ベタ通リデアルガ今暫ク平均流速ニ對シテモ尚適用シ得ルモノト考ヘテ其等ノ式カラ水路ノ種々ナル點ノ平均流速ヲ研究スルコトトスル

流速ノ絶對値ヲ與フル一般ノ式ハ(38)ナリ

夫レ故ニ等流速ノ軌跡ハ(38)式ニ於テ

$$|V| = \text{Const.} \qquad \cdots\cdots \quad (69)$$

即

$$e^{2k'\varphi} + e^{-2k\varphi} - 2e^{k'\varphi - k\varphi}\cos\psi = \text{Const.}\ \eta^2 \text{ say} \qquad \cdots\cdots \quad (70)$$

ニヨリテ與ヘラレル

此式ニヨリ三ツノ代表的ノ場合ニ就イテ等流速軌跡ヲ求ムル時ハ次ノ如シ

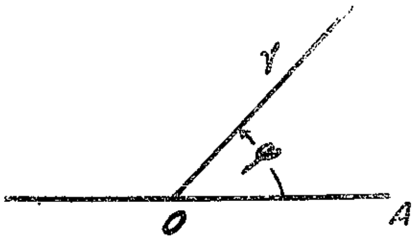
$$k = 0,\quad k' = 1\ ;\qquad e^{2\varphi} + 1 - 2e^{\varphi}\cos\psi = \eta_0^2 \qquad \cdots\cdots \quad (71)$$

此等ノ式ハφψニヨリテ與ヘラレテキル爲メニ直チニ空間的（x y的）ニ描出スルニハ更ニ此等ノ式ト三ツノ流線式(40′)(41′)(42′)トノ間ニφψノ消去ヲ行ハザルベカラザル理合ナレドモ別紙附圖第一、第二、第三ニ於テ既ニ空間ニφψ値ヲ入レ込ミアルヲ以テ此ノ圖ニ直チニ等流速軌跡ヲ(71)(72)(73)ヲ用ヒテ記入スルコトヲ得此等ノ曲線ハ

$$k=k'=\frac{1}{2}\ ;\qquad e^{\varphi}+e^{-\varphi}-2\cos\psi=\eta_{\frac{1}{2}}\quad\cdots\cdots\cdots(72)$$

$$k=\frac{1}{4},\ k'=\frac{3}{4}\ ;\qquad e^{-\frac{3}{2}\varphi}+e^{-\frac{1}{2}\varphi}-2e^{\frac{1}{2}\varphi}\cos\psi=\eta_{\frac{1}{4}}^{2}\quad\cdots\cdots\cdots(73)$$

今φノ代リニ$\frac{\varphi}{2}$ヲψノ代リニ2ψヲ入レ$e^{\frac{\varphi}{2}}$ヲ動徑γニトリψヲ動徑ト原線OAトナス角トスレバ（第二十六圖參照）



第二十六圖

$$e^{\frac{\varphi}{2}}=\gamma$$

$$\therefore\quad r^4-2r^2\cos2\psi+1^2-\eta_0^2=0\quad\cdots\cdots\cdots(71')$$

$$r^4-2r^2\cos2\psi+1^2-r^2\eta_{\frac{1}{2}}^2=0\quad\cdots\cdots\cdots(72')$$

$$r^4-2r^2\cos2\psi+1^2-r\eta_{\frac{1}{4}}^2=0\quad\cdots\cdots\cdots(73')$$

即此等ノ式ハかしに一ノ卵形線又ハ此レニ類似ノ曲線ヲ表ハス別紙附圖第一、第二、第三ニ於ケルφψノ取リ方ハ此處ニ吾々ノ考ヘタノト少シク異ッテキルケレドモ要スルニ此處ニ考ヘタ取リ方ヲ少シク變形ニスルコトニヨッテ得タルモノデアル（四參照）即チ此處テイフ放射狀動徑直線ハ附圖第一、第二、第三デハ放射狀曲線トナッテキルψノ取リ方モ同様變形シテキル從ッテ別紙附圖第一、第二、第三ノ場合ニ於ケル(71)(72)(73)ノ曲線ハかしに一卵形ノ變形デアルコトガ想像サレル今此レヲ描出シテ見ルトホゞ別紙附圖第八ノ如クニナル圖中ノ數字ハ還元單位デ表ハシタ流速ノ大サヲ示ス

此ノ圖ヲ一目シテ氣ノ付クコトハ出口ノ中央正面ガ流速ガ比較的小サク從ッテ此處ニ門洲ヲ生ズルトイフコトデアル

尚流速ノ分布ヲ檢ベルノニ等速位線ニ沿フテ其ノ絶對値ヲ求メル方法ハ數學的ニハ極メテ容易デアル(38)ニ於テ

$$\varphi = \text{Const.}$$

$$\therefore \quad e^{k'\varphi} = c_1, \qquad e^{-k\varphi} = c_2, \qquad c_1,\ c_2 \ \text{常數}$$

$$|V| = \frac{2\sin k\pi}{k'kc}\cdot\frac{1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2-2c_1c_2\cos\psi}} \qquad \cdots\cdots (74)$$

此式ニ於テ變數ハψノミデアル且c_1 c_2ハ常ニ正ナルヲ以テ$|V|$ノ最小値ハ

$$\cos\psi = -1 \quad \text{or} \quad \psi = \pi$$

ニヨッテ與ヘラレル又最大値ハ

$$\cos\psi = +1 \quad \text{or} \quad \psi = 0$$

即チ中心線ニソウ水流ニテ流速最小ニシテ壁ニ沿フ水流ニテ流速最大デアル而シテ其レ等ノ値ハ

$$|V_{\min}| = \frac{2\sin k\pi}{kk'c\,(c_1+c_2)} \qquad \cdots\cdots (75)$$

$$|V_{\max}| = \frac{2\sin k\pi}{kk'c\,(c_1-c_2)}, \qquad \cdots\cdots (76)$$

(74)ヲ先キノ三代表流線ノ場合ニ應用スルトキハ

其一　$c = 2\pi,\quad k = 0,\quad k' = 1;\quad c_1 = e^{\varphi},\quad c_2 = 1$

$$|V| = \frac{0}{0}$$

故ニ此レヲ評價スル爲メニkニ就イテ分母子ヲ微分シテk k' cニ上記ノ値ヲ挿入スレバ

$$|V| = \frac{1}{\sqrt{c_1^2-2c_1\cos\psi+1}} \qquad \cdots\cdots (77)$$

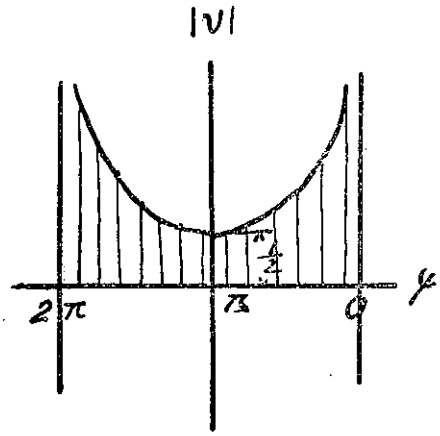
試ミニ $\varphi = 0$ ニ沿フテ $|V|$ ノ値ヲ求ムレバ

$c_1 = 1$.

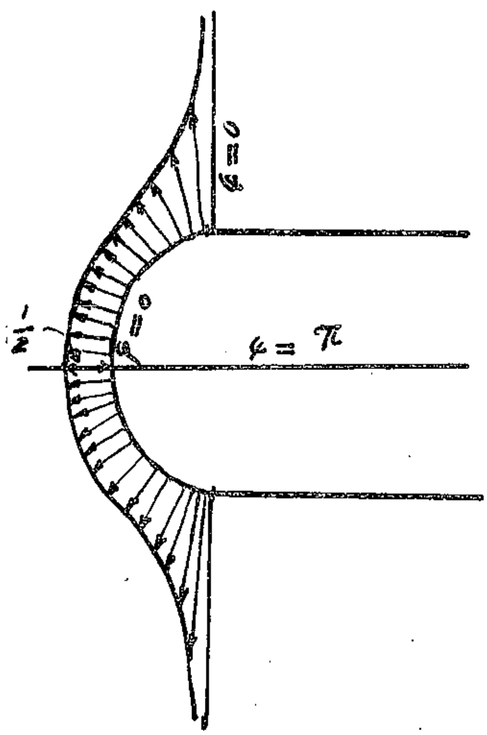
$$|V| = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\psi}} = \frac{1}{2\sin\frac{\psi}{2}} = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (78)$$

故ニ吾々ハ ψ ヲ横軸ニトリ $|V|$ ヲ縦軸ニトレバ第二十七圖ノ如クナルコトヲ知ル ψ ヲ取ルベキ横距ハ實ハ $\varphi = 0$ ノ等速位曲線デアル其レ故ニ此レニ $|V|$ ヲ配當シテ見ルト第二十八圖ノ如クナル

第二十七圖



第二十八圖



其二

$$k = k' = \frac{1}{2}, \quad c = 2\pi; \quad c_1 = e^{\frac{\varphi}{2}}, \quad c_2 = e^{-\frac{\varphi}{2}}$$

$$|V| = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 - 2\cos\psi}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (79)$$

if $\varphi=0,\quad c_1=c_2=1$

$$|V|=\frac{4}{\pi\sqrt{2}}\operatorname{cosec}\frac{\varphi}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(80)$$

其三

$$k=\frac{1}{4},\quad k'=\frac{3}{4},\quad c=2\pi,\quad c_1=e^{\frac{3\varphi}{4}},\quad c_2=e^{-\frac{\varphi}{4}}$$

$$|V|=\frac{4.4}{3\sqrt{2}\,\pi}\cdot\sqrt{\frac{1}{c_1^2+c_2^2-2e^{\frac{\varphi}{2}}\cos\varphi}}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(81)$$

if $\varphi=0,\quad c_1=c_2=1$

$$|V|=\frac{8}{3\pi}\operatorname{cosec}\frac{\varphi}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(82)$$

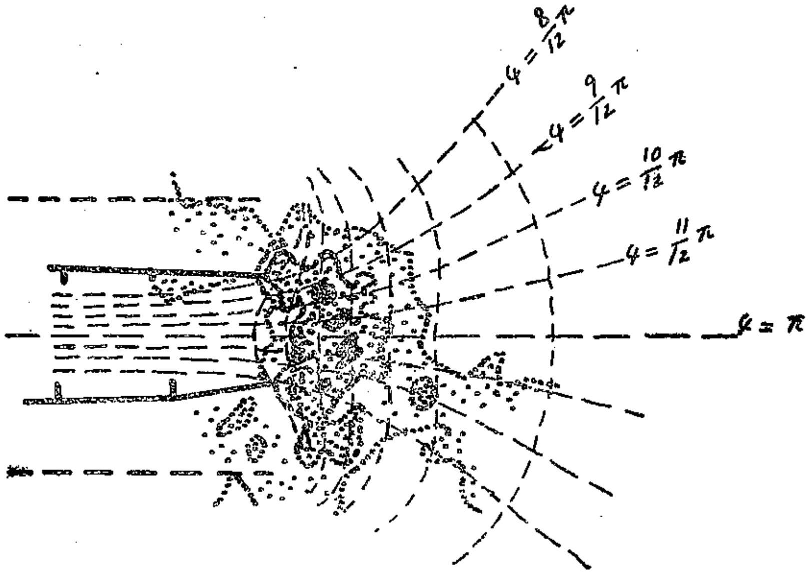
(80)(82)ハ(78)ト全ク同性質ニシテ單ニ係數ノ差アルノミデアル

吐口ニ土砂ノ堆積スル模様ハ理想的ニ行ケバ附圖第八ノ等速線ニ從フ筈デアッテ中央正面ニ一番堆積ガ多イ筈デアル門洲ガ此處ニ多ク存在スル理由ハ此レニヨッテ明白トナル尙門洲ガ漸次發達スルニ從ッテ遂ニ河口ガ左右ニ別レテ三角洲ヲナスニ至ルコトモ此レニヨッテ知ルコトヲ得

吐口ニ土砂ノ堆積スル模様ノ實例ヲヤハリ前述ノみしししっぴー西南口ニトッテ此レニ等速線ヲ入レテ見ル附圖第七ニ於テ吾々ハ吐口ノ幅ヲ一・八即最モ外側ノ流線ヲ $\varphi=2.24$ ニ取ッタ故此處デモヤハリ其レヲ使ッテ此ノ間ノ等速線ヲ描出シテ見ルト第二十九圖ノ如ク堆土ノ有樣ガ等速線ニ沿フ傾向ガ見エル圖中斑點ノ最モ薄キ所ハ一九〇九年ヨリ一九一五年ニ至ル間ニ一〇呎乃至二〇呎堆土ノ起リシ所更ニ斑點ノ多キ所ハ同期間ニ二〇呎乃至三〇呎ノ堆土黑色ノ部分ハ同期間ニ於テ三〇呎以上ノ堆土ノ起リシ所ヲ示ス河水ハ泥土ヲ含有シテキテモ通常海水ニ比スレバ其比重ハ小サイ其ノ爲メニ河水ハ海中或距離ニ達スレバ全ク水底ヲ離レテ海水ノ上面ニ浮ビ出ル其ノ爲メニ土砂ノ轉動ハ此點ヨリ進ムコトガ出

來ナイ夫レ故ニ此點ヨリ先キデハ上記ノ等速線ニ沿フテ門洲ガ出來ルトイフ事ハ無イ河水ト海水トノ比重ノ差ガ甚ダシク流速ガ比較的緩デ海底ノ勾配ガ急デアル時ニハ此ノ限界點ガ河口ニ可ナリ近ヅイテ來ル

門洲ノ成因ハ上述ノ原因ノミデハ無イ砂濱デ沿岸漂沙ノアル所デハ此ノ運動ガ大イニ原因ヲナス上流カラアマリ土砂ヲ流下セズシテ沿岸ノ漂沙ノ多イ場合ニ起ル門洲ハみししっぴーナドト多少ノ趣ガ異ツテヰテ多クハ半圓形ニ出來ル此レハ等速線ノ可ナリ外側ノ部分ヲトルモノト考ヘルコトガ出來ル此ノ著シイ例ハべにす港ノきをっぢあ港口 (Port of Chioggia) デアルべにす港口ハべにすらぐーんニヨッテ土砂ヲ全ク沈澱セシムル爲メ港口ノ門洲ハ全ク沿岸漂沙ニヨルモノト考ヘラレル而シテ其ノ形狀ハ Luigi Luigi; Works for the Improvement of navigable estuaries, (Transactions International Engineering Congress, 1915, Waterways and irrigations p. 279) ニヨレバ第三十圖ノ如クデアル

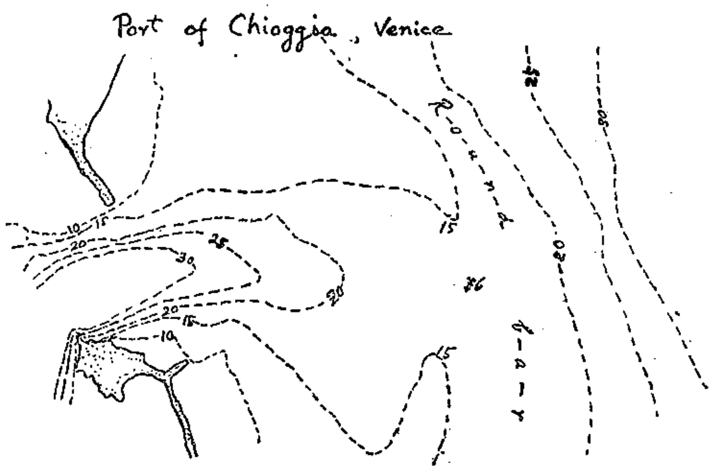


第二十九圖

尚又砂濱デハ海波モ門洲ヲ作ル有力ナル原因ヲナスモノデ此レニ關スル理論的ノ研究ハ丁抹ノふぇでる (Vedel) トイフ人ノ詳細ナ論文ガ Transaction of American Society of Civil Engineers, International Congress 1904 ニ出テヰルカラ此處ニ述べル迄モナイコトデアル

以上ハ最初ニ斷ツテアル通リ總テ潮汐ノ小サイ河口ノ場合デアツテ潮汐ノ大キイ河口ニ關シテハ餘論ニ於テ一言スル積リデアル

次ニ浮流ニヨツテ河水ニ運バレ海中ニ入リタル土砂ハ轉動ニヨルモノニ比シテ遠距離ニ流出シテ漸次沈澱スル勿論比較的重キモノハ早ク沈澱シテ轉動ニヨル堆土ノ上ニモ沈積スル今假リニ浮流土砂ハ一様ニ均質ノモノト考ヘ河口ヲ出デヽヨリ常ニ一定ノ速度デ沈下スルモノト考ヘルトキハ沈下スル深サハ河口ヲ出デヽヨリノ時間ニ比例スル其レ故ニ海底ノ深サニ大差ナキトキハ等時線ヲ描クトキハソノ曲線ハ海洲ノ形狀ヲ與フル理デアル



第三十圖

速度ニ關シテハ絶對値ヲトレバ足リル

$$|V| = \frac{\delta s}{\delta t}$$

但 s, t ハ空間及時間，

δ ハ其ノ微量ヲ絶對値ニテ表ハシタルモノ

$$\therefore \quad \delta t = \frac{\delta s}{|V|}$$

又

$$\frac{1}{|V|} = \frac{\delta s}{\delta \varphi}$$

但 φ ハ速位，δ ハ其ノ絶對値的微量ヲ示ス

$$\therefore \quad \delta t = \frac{\delta s}{|V|} \cdot \frac{\delta \varphi}{\delta \varphi} = \frac{d\varphi}{|V|^2} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (83)$$

$|V|$ノ値ハ(38)ニヨリ

$$|V|=\frac{2\sin k\pi}{k'kc}\cdot\frac{1}{\sqrt{e^{2k'\varphi}+e^{-2k\varphi}-2e^{(k'-k)\varphi}\cos\psi}}$$

$$\frac{1}{|V|^2}=\frac{k'^2k^2c^2}{4\sin^2 k\pi}\left(e^{2k'\varphi}+e^{-2k\varphi}-2e^{(k'-k)\varphi}\cos\psi\right)$$

此レヲ(83)式ニ挿入スレバ

$$\delta t=\frac{k'^2k^2c^2}{4\sin^2 k\pi}\left(e^{2k'\varphi}+e^{-2k\varphi}-2e^{(k'-k)\varphi}\cos\psi\right)d\varphi \quad \cdots\cdots\cdots \quad (84)$$

此式ヲψヲ定數ト考ヘテφニ就イテ河口ヨリ海中ノ任意ノ點マデ積スレバ一定ノ流線ニ沿フ河口カラ流出シテ海中ノ任意ノ點マデ達スルニ要スル時間ヲ求メラレル今河口ノφノ値ヲφ_1トシ海中ノ任意ノ點ノφヲφ_2トスレバ

$$t=\frac{k'^2k^2c^2}{4\sin^2 k\pi}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(e^{2k'\varphi}+e^{-2k\varphi}-2e^{(k'-k)\varphi}\cos\psi\right)d\varphi$$

$$=\frac{k'^2k^2c^2}{4\sin^2 k\pi}\left\{\frac{e^{2k'(\varphi_2-\varphi_1)}}{2k'}-\frac{e^{-2k(\varphi_2-\varphi_1)}}{2k}-\frac{2e^{(k'-k)(\varphi_2-\varphi_1)}}{k'-k}\cos\psi\right\} \quad \cdots\cdots\cdots \quad (85)$$

此式ニ於テk k'ニ適當ナル値ヲ入ルレバ色々ノ角度ヲ有スル隔壁ノ場合ニ於ケル値ヲ得今特別ノ場合トシテ平行壁ノ場合ニ就イテ考ヘレバ

$$k=0,\quad k'=1,\quad c=2\pi$$

$$|V_0|=\frac{1}{\sqrt{e^{2\varphi}+1-2e^{\varphi}\cos\psi}}$$

$$t=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\left(e^{2\varphi}+1-2e^{\varphi}\cos\psi\right)d\varphi \quad \cdots\cdots\cdots \quad (86)$$

中心線ニ沿フモノハ

$$\psi = \pi$$

$$t = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 + 2e^{\varphi} + e^{2\varphi})\, d\varphi$$

河口ニ於ケルφノ値ハ　$\varphi = -1.3$

$$\therefore \quad t = \varphi + 2e^{\varphi} + \frac{e^{2\varphi}}{2} - \left\{ -1.3 + 2 \times e^{-1.3} + \frac{e^{-2\times1.3}}{2} \right\} = \varphi + 2e^{\varphi} + \frac{e^{2\varphi}}{2} + 0.72 \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \quad (87)$$

壁面ニ沿フモノハ

$$\varphi = 0$$

$$t = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 + 2e^{\varphi} - e^{2\varphi})\, d\varphi$$

河口ニ於ケルφノ値ハ　$\varphi = 0.0$

$$\therefore \quad t = \varphi - 2e^{\varphi} + \frac{e^{2\varphi}}{2} - \left\{ 0 - 2 + \frac{1}{2} \right\} = \varphi - 2e^{\varphi} + \frac{e^{2\varphi}}{2} + 1.5 \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \quad (88)$$

中心線ト壁面トノ中間 $\psi = \dfrac{\pi}{2}$ ニ沿フモノハ

$$t = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} (1 + e^{2\varphi})\, d\varphi$$

河口ニ於テハ　$\varphi = -1.0$

$$t = \varphi + \frac{e^{2\varphi}}{2} - \left\{ -1.0 + \frac{e^{-2}}{2} \right\} = \varphi + \frac{e^{2\varphi}}{2} + 0.93 \quad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \quad (89)$$

(87)(88)(89)三式ニヨリテtヲ計算シテ表示スレバ次ノ如シ

φ	$\psi=\pi$ s	$\psi=\pi$ t	$\psi=0$ s	$\psi=0$ t	$\psi=\frac{\pi}{2}$ s	$\psi=\frac{\pi}{2}$ t
0	2	3.22	0	0	1.27	1.43
1	4.72	10.85	0.72	0.758	3.20	5.62
2	10.39	44.80	4.40	16.02	7.98	30.23
3	24.09	245.40	16.09	165.82	20.71	205.43

勿論此ノ表ニ於ケルs tハ何レモ還原單位ヲ以ツテ表ハセルモノデアル

今此ノ結果ヲ用ヒテt―s表ヲ作ルトキハ別紙附圖第九ノ如クナル

此ノ應用例トシテ先ニ引用シタルみししっぴー西南口ノ場合ヲトレバ理論上等時線ト限界流線トヲ以ツテ圍マレタル海洲推積面ハ一個ノ銀杏型ヲナスベキデアルガLipseyガ報告スル所ニヨレバ泥土ヲ含ム河水ト海水トノ境界線ヲ測定セル結果一ツノ團扇狀ヲナストイフ今適宜ノ等時線ヲトリテ實測ノ境界線ト比較スレバ別紙附圖第九ニ示ス如シ即中心附近ハ實際ノ場合ノ方突出シ河口附近ニ於テハ左右ニ擴大シテキル眞ノ中間ノ處ニ於テハ却ツテ實際ノ場合ノ方ガ內部ニ入ツテキル此レ等ハ理論ト實際トノ違ヒデアツテ河口ニ近接シテ兩側ニ存在スル湛水ハ河口ヨリ吐出ス水ヨリ速力少ナキ爲メ水壓高クシテ自然吐水ヲ壓迫スベク其ノ爲限界流線ハ著シク亂サレテ此處ニ河海兩水ノ混入スルヲ免レザルベク其ノ結果此ノ附近ニ於テハ實際ハ遙カニ幅廣キ範圍ニ泥水ヲ見トメルコトヽナルベク銀杏型ノ角ノ附近ハ一見到底實際上カヽル規則正シキ屈折線ヲ生ゼザルベキハ想像ニ難クナイ此ノ邊ハ勿論圓味ヲ帶ビテ削リトラレルニ至ルデアラウ其ノ他吐口ヲ出テカラ河水ハ海水ノ運動及其河水トノ比重ノ異ヒノ影響ヲ受ケルトカ又海水ノ影響ヲ考ヘナイニシテモ河水自身ノ上下層ノ流速ノ相異ニヨツテ又ハ混流ニヨル上向分速度ニヨツテ水ヨリ比重多キ物體モ優ニ浮遊スルコトヲ得ベク此ノ事ハ物體ノ大サ小ナレバ益々大トナル爲メ泥土ノ如キ小ナル浮遊物ハ益々此レ等ノ影響ヲ受クルコト大トナル

(Flamant: Hydraulique p. 298)

從ツテ浮遊土ノ沈澱ガ單ニ河口ヨリノ時間ニ比例スルトイフ假定ハ嚴密ニハ到底適合セズ故ニ此處ニ導出シタ樣ナ等時線ヲ以テ河水ト海水トノ境界線又ハ海洲ノ堆積面ヲ決定スル方法ハ粗雜ナル近似値ニ止マルコトヲ免レナイ

九 餘論

上述ノ理論ノ歸結トシテ水路ノ呑口及吐口ニ於ケル水流ニ就イテ數學的理論ノ產物タル流線式ガ其ノ一二ノ例ニ於テハ實際上ニモ可ナリニヨク適合スルコトヲモ示スコトガ出來タノデアル然シ乍ラ此ノ流線式ヲ應用スル場合ニ $\varphi=0$ 附近ノ流線ハ實際ニハ現レナイデ0トπトノ間ノ或値ヲモツ流線ガ限界流線トシテ最モ外側ニ現レルコトハみしゝっぴーノ例ノ如クデアル而シテ此ノ限界流線ガ何程ノ値ニナツテヰルカトイフコトヲ識別スル爲メニハ吾々ハ河口ニ於テ實際存在スル所ノ二三ノ代表的水流線ヲ實測シテ見ナケレバナラナイトイフコトハ既ニ七ニ於テ述ベタ通リデアル此ノ事ハ既ニ突堤ヲ築造シタ後ニ於テ始メテナサルヽ事デアツテ屢々港灣工學上ノ論點トセラルヽ水深維持ノ目的ヲ以テ河口ニ設ケラルヽ導水突堤ノ方向ノ問題ニ對シテ突堤未設前ニ最モ適當ナル方向ヲ豫言スルコトハ此ノ方向デハ不可能ノコトヽナル

此ノ問題ノ解決ニハ限界流線ノ値ヲ豫知スルヲ得レバ充分デアツテ此ノ限界流線ノ値ヲ決定スルトイフコトハ根本ノ流線理論ニ何等ノ變化ヲ來タスコトガ無イ何トナサバ流線理論ニ於テハ其ノ何レノ値ノ流線ヲ以ツテ水流ノ限界線ト考ヘテモ其水流ノ平衡ニハ何等妨碍ヲ生ジナイカラデアル而シテ此ノ限界流線ヲ決定スルトイフコトハ結局突堤先端ノ幅員ヲ還元單位ニテ何程ニトルカトイフ事ニ歸シ從ツテ全ク數量的ノ問題ニ外ナラナイ總テ緒論ニ述ベタ如キ斯クノ如キ性質的デナイ數量的ノ問題ノ解決ハ實驗係數ノ導入ニヨツテ其ノ目的ヲ達スルモノト考ヘラレル從ツテ此ノ問題ヲシテ更ニ一歩ヲ進メシムル爲メニハ相當ノ實驗ノ必要ヲ生ズルコトヽナル

限界流線ノ値ハ恐ラク流速水深河海底ノ狀況突堤ノ構造等ニヨツテ定マルベク此等ニ關シテハ他日相當ノ實驗ニヨリ基件ヲ得テ再論シ得ベシト信ズル

次ニ上述ノ議論ニ於テハ直線型ノ二突堤ガ種々ナル角度ニ於テ交ル場合ヲ基トシテ論ジタノデアルガ天然ノ河川ノ河口ノ如ク喇叭型ヲナシタルモノ又ハ曲線突堤ヲ設置セル河口ノ如キ場合モ以上ノ所論ヨリ得タル流線ハ可成ニ多種類ノ形狀ノモノガアルカラ此等ノ中カラ此レニ適合スルモノヲ見出シテ上述ノ論ヲ準用スルコトヲ得ベシト思ハレル又萬一斯クノ如キ都合ヨキ流線ヲ得ラレザルトキハ先ニ共軛函數ヲ用ヒテ解キタル程正密ナル結果ヲ要セザル場合ニ於テハ目ノ子的ニ圖上ニ於テ流線ヲ推定シ描出スルコトハサマデ困難デハナイ

次ニ注目スベキハ吐口ノ水流及水面勾配急ニシテ水流ガ此處ニ於テ上述ノ如ク連續性ヲ保有スルコトガ不可能ナル場合デアツテ此ノ時ハ水流ヲ形成スル分子ガ慣性ノ爲メニ流線ニ沿フテ彎曲シテ外海ニ流出スルコト不可能ノ場合デアル此ノ場合ニハ突堤ノ先端ニ於テ水流ハ凡テ中心線ニ平行ニ流出シ恰カモ空中ニ向ツテ噴射スルトキノ如クニ斷面不變ナル一ツノ整流ヲナス此ノ整流トシテ形作ル不變斷面ノ大サハ勿論二隔壁ノナス角ニヨリテ異リ從ツテ流量ヲ同一不變ノモノトナストキハ噴出スル流速ハ自ラ二隔壁ノ角度ニヨツテ支配セラルヽコトヽナル斯クノ如キ噴射ノ理論(Theory of jet)ハへるむほるつニヨツテ既ニ解決セラレテキル (Kirchhoff: Mechanik p. 290—307)

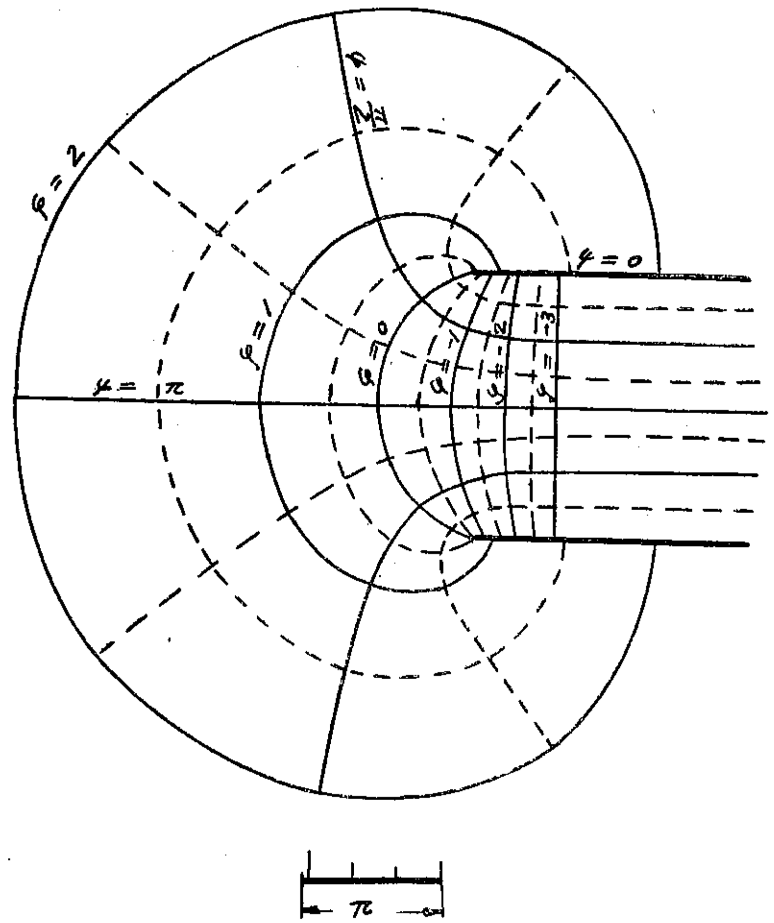
然シ乍ラ河口ノ如キ場合ニハ空中ニ噴口スル如キ簡單ナルモノデハナイ第一ニ河口ニ於テ突堤ヲ離レテ中心線ニ平行ニ流出スル場合ニ空中ニ於ケルガ如ク自由ニハ行カナイ第二ニハ例ヘ一時ハ整流ヲナスニ至ルトモ整流ヲナスニハしぇぢー式ニヨリテ決定スベキ適當ノ水面勾配ヲ要ス廣大ナル水平面ヲ有スル海中ニ於テ斯クノ如キ狀態ガ左程永ク續クモノトハ考ヘラレナイヤガテハ四方ニ離散シ放射狀ニ流出スルニ至ルハ明カナコトデアル斯クノ如クニシテ噴射ノ理論ハ河口ニハ不適當デアツテ寧ロ通常ノ流線論ヲ準用スルニシカザルモノト思ハレル斯カル場合ノ水面勾配ハ恐ラクハ一時的ニ整流ノ勾配ヲ取リテ少シク下流ニ至リ段波(Standing wave)ヲ生ジテ後放射流出ヲナスノデアラウ

次ニ重大ナル問題ハ潮汐作用ノ大ナル河口ノ問題デアル元來河口港トシテハ潮汐作用ノ大ナル河口ノ方水深維持容易ニシテ此ノ方ガ寧ロ重大ナル研究題目デアル然シ乍ラ此ノ場合ノ嚴密ナル理論的研究ハ河口ヨリ流出スル水流ニ對シテ海

水ガ慣性ヲモツ爲メニ或ハ抵抗的或ハ助勢的ノ働ヲナシ到底通常ノ流線理論ニ於ケルガ如ク海中ノ水ハ何等河水ノ注入ニ支障又ハ助勢ヲナサズトイフ見解ハ用ヒラレナイ加フルニ凡テノ函數ハ時間ノ影響ヲ受ケ新タニ一ツノ變數ヲ増加スルコトヽナリ一層問題ヲ複雜ニスル又萬一突堤内部ノ河幅ガ水位ト共ニ著シク變化スル場合ノ如キハ此ノコトモ考入スルヲ要シ到底容易ニ解決ヲ得ベクモ見エナイ斯クノ如キ水流ガ河口ノ門洲ノ成因ト如何ナル關係ヲ有スルカニ就イテハれーのるづノ模型實驗 (Osb. Reynolds: Scientific papers. Vol. II. p. 380–p. 518) ハ著名デアルガ斯クノ如キ場合ノ水流其ノ者ノ研究ニツイテモ尚斯カル實驗ガ有效ナリヤ否ヤハ甚ダ疑ハシイコトデアル (完)

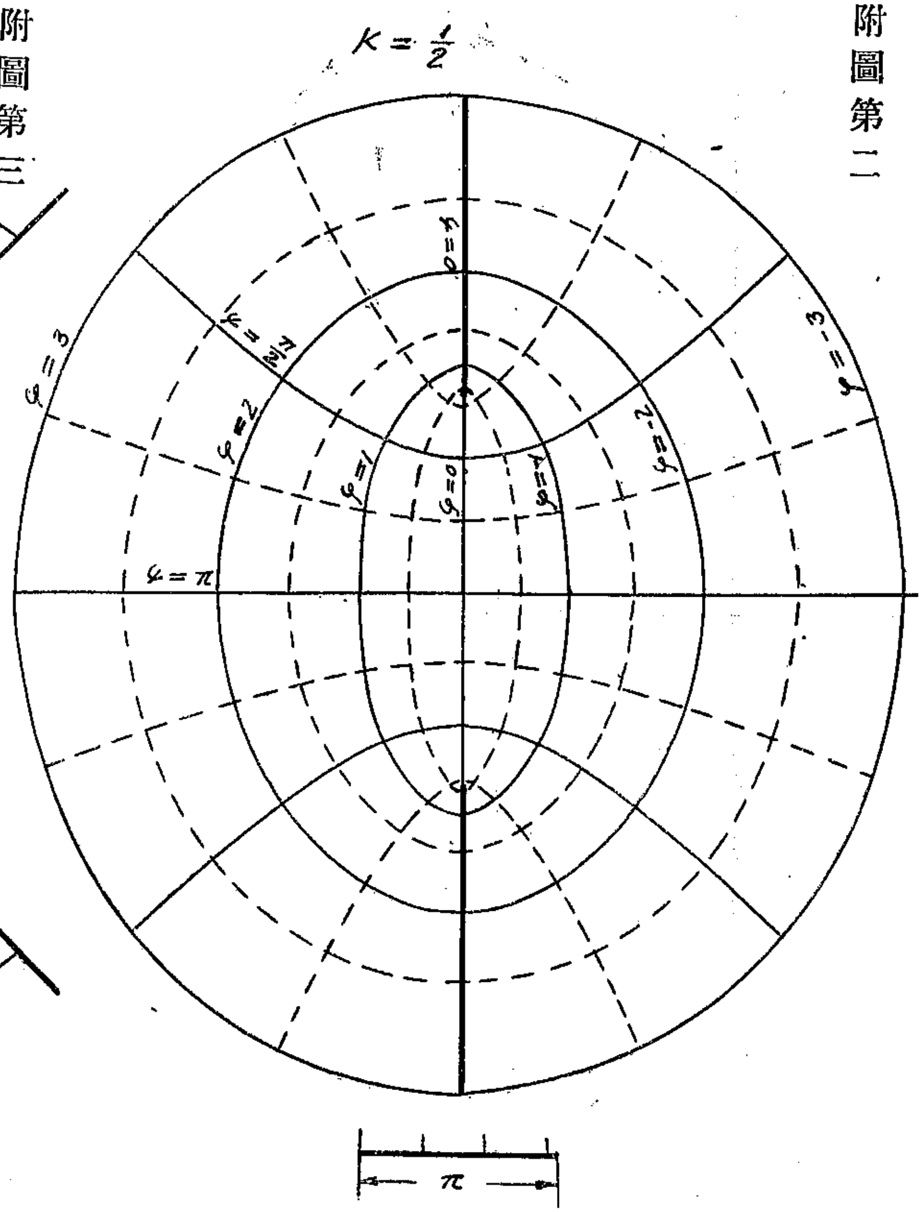
附圖第一

平行隔壁ノ流線圖



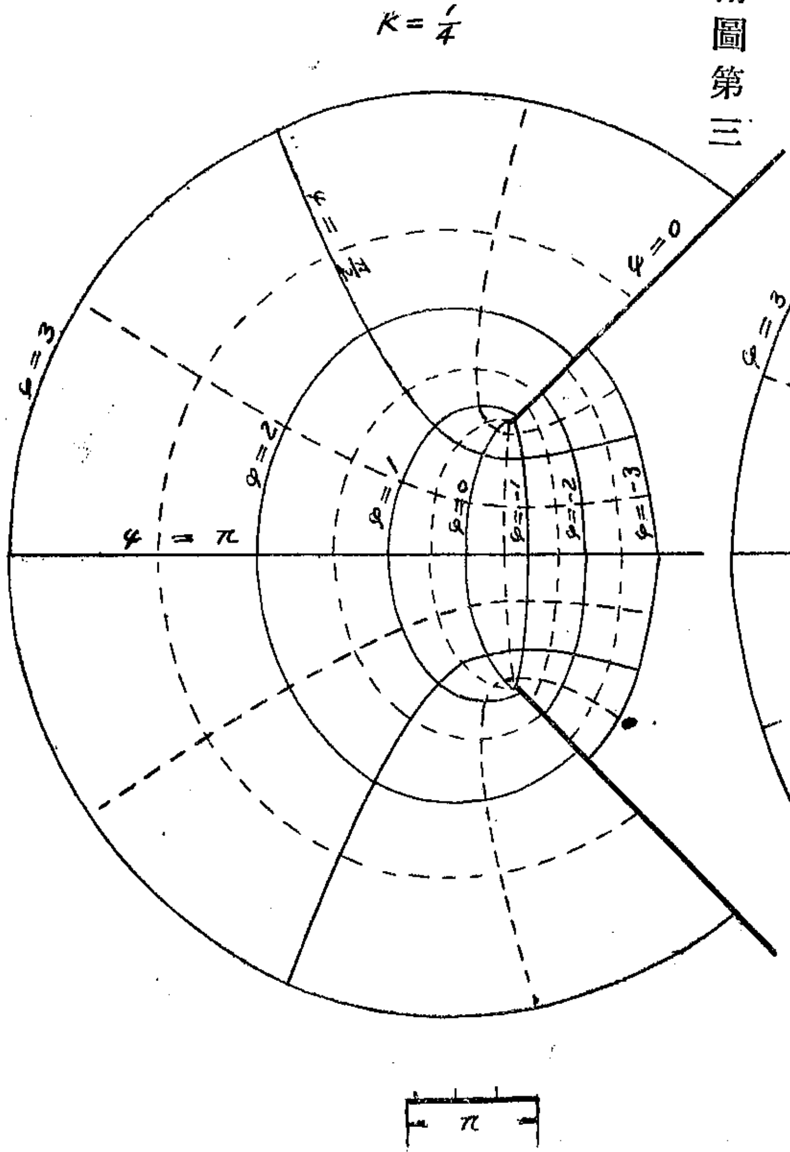
附圖第二

一直線隔壁ノ流線圖



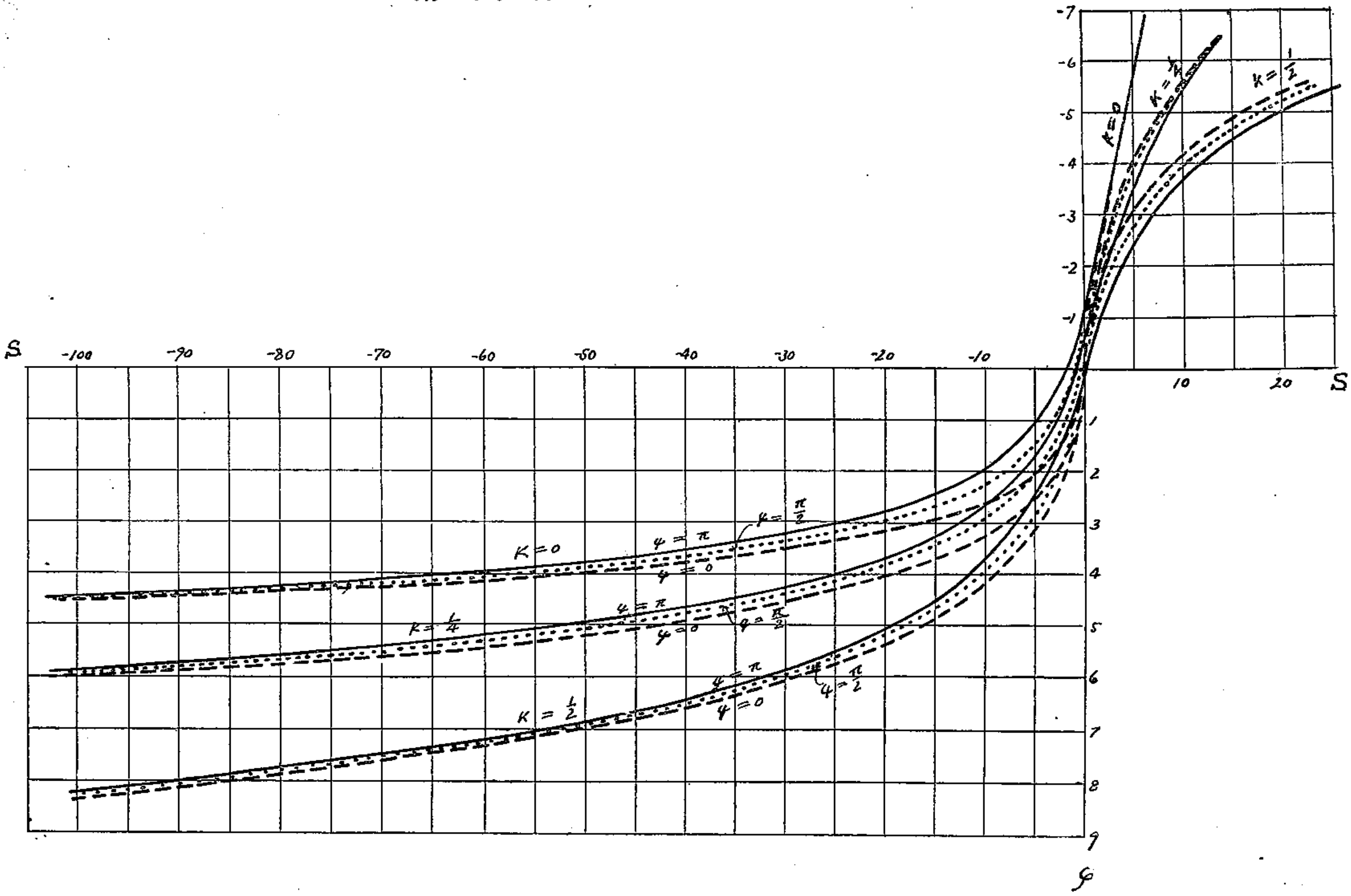
附圖第三

直角隔壁ノ流線圖



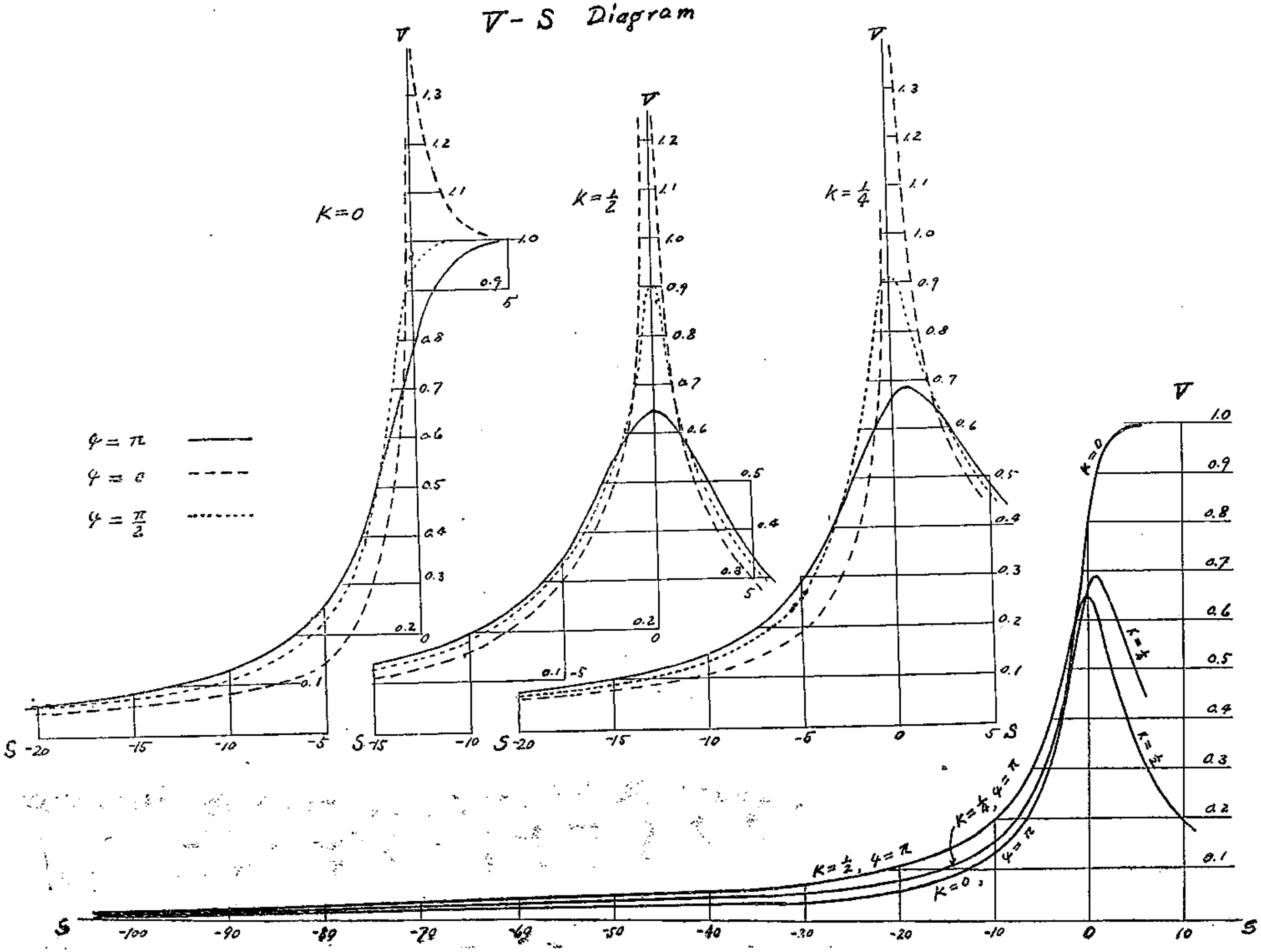
（土木學會誌第七卷第五號附圖）

附圖第四　φ—S 圖表

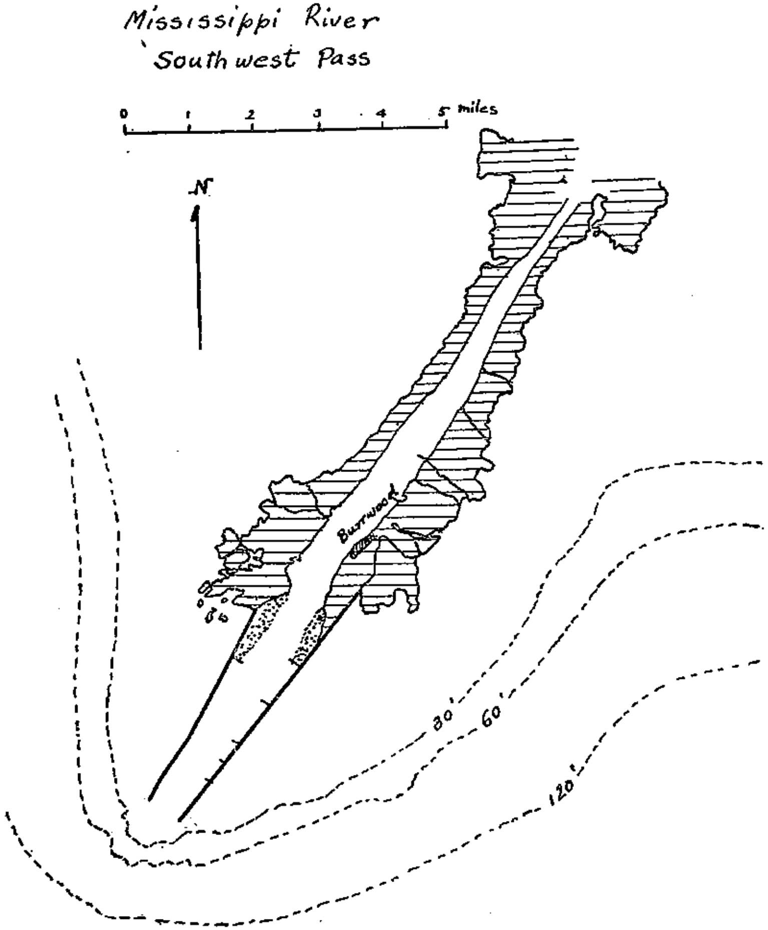


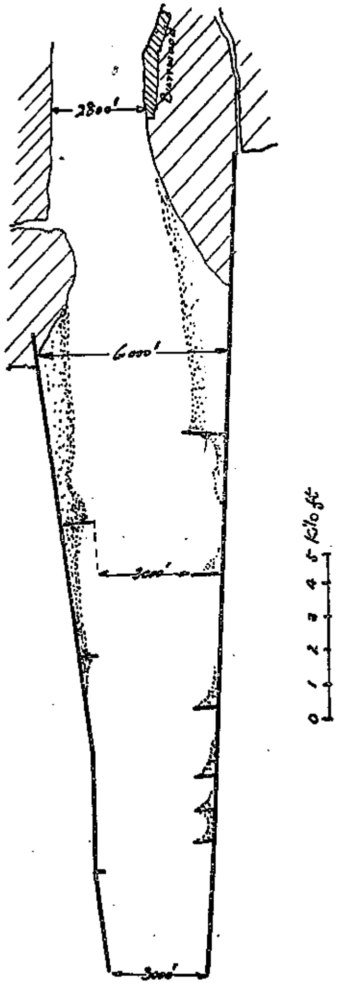
(土木學會誌第七卷第五號附圖

附圖第五　V—S 圖表



附圖第六
みししっぴー南西口圖

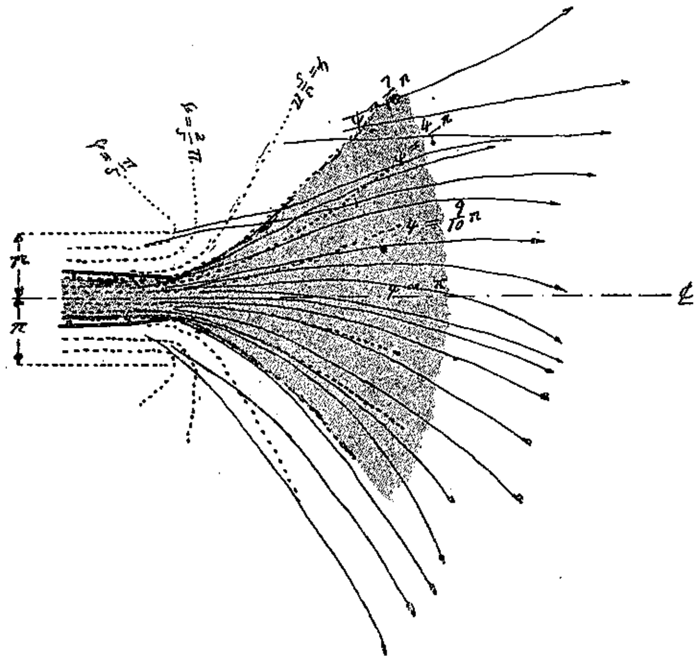




984.5

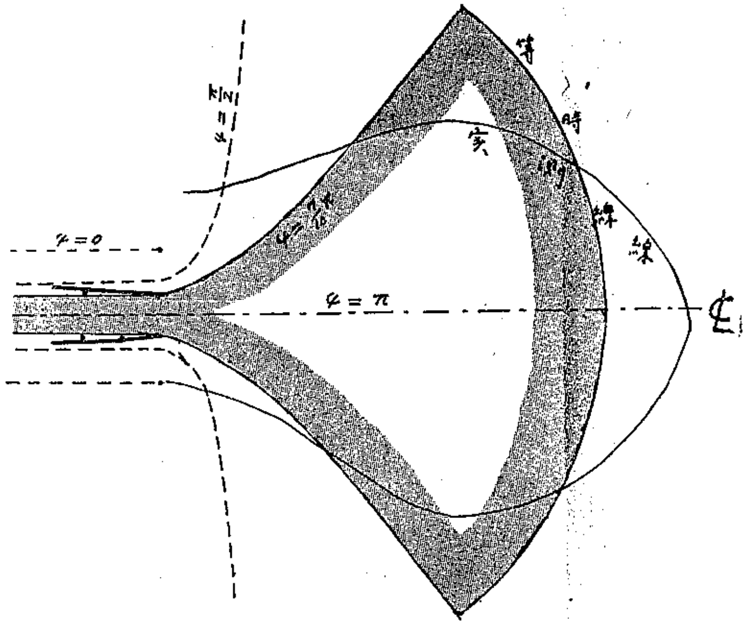
附圖第七

みししっぴー南西口流線圖

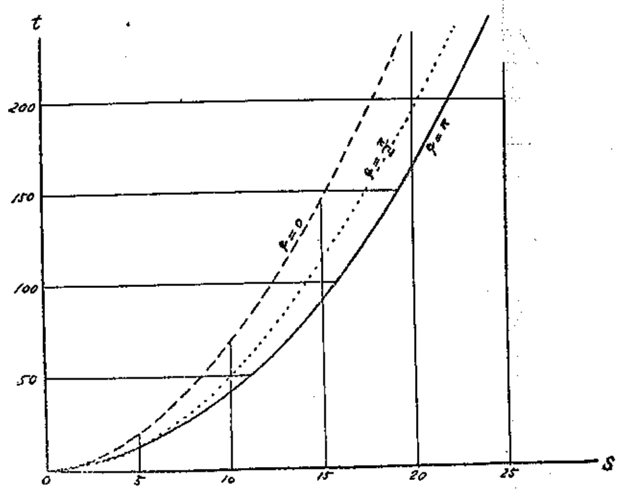


附圖第九

みししっぴー南西口等時線圖



T—S 附圖

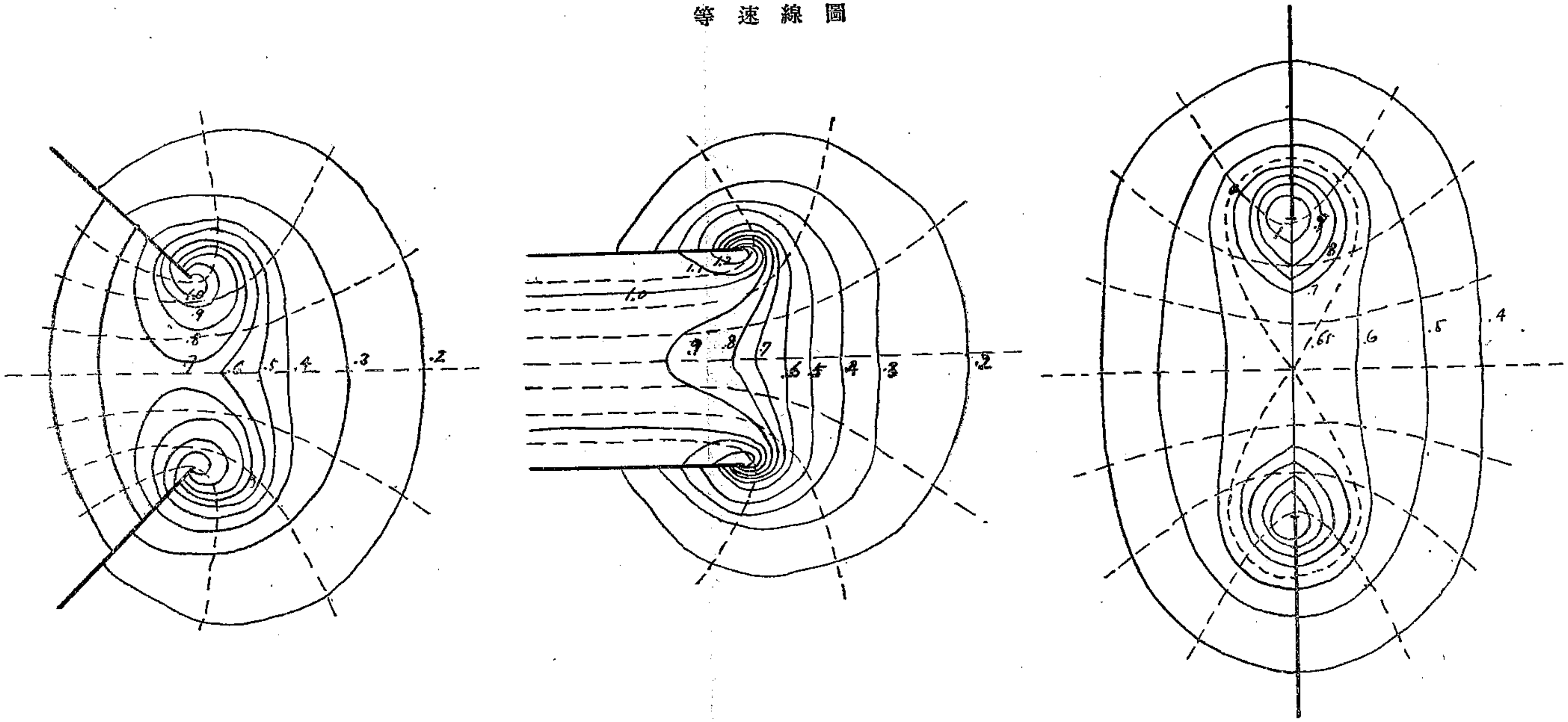


（土木學會誌第七卷第五號附圖）

484-6

附圖第八

等速線圖



（土木學會誌第七卷第五號附圖）