論說報告

土木學會誌　第六卷第三號　大正九年六月

屈曲水路ニ於ケル水面ノ横斷形狀ニ就テ

會員　工學士　久永勇吉

水路ノ屈曲部ニ於テハ遠心力ノ爲メ其ノ屈曲ノ外側ニ水位ノ上昇ヲ來タシ其ノ部分ニ於ケル横斷勾配 (La pente transversale) ハ或ル種ノ曲線ヲ成スヘキコトヲ想像シ得ヘシ

本件ニ關シくらしょっふ (Grashof) ハ (Maschinenlehre I. Hydraulik) 次ノ如ク論シタリ (Handbuch der Ingenieur-Wissenschaften III Wasserbau VI Band 4 Auflage S. 58 ニ依ル)

一般ニ液體ハ斜壓ニ堪ヘス換言スレハ液面ハ其ノ受クル壓力ノ方向ト直角ヲ成スヘキ原理ニ由リ(第一圖參照)遠心力Fト水ノ靜壓力Pトノ合成力ナルRハ屈曲水路ニ於ケル水面ニ鉛直ナルヘシ

今直角坐標ノ原點Oヲ水路ノ平分線ト其ノ點ニ於ケル水面トノ交叉點ニ置キ屈曲前ノ水面ヲX軸ニ水路ノ平分線ヲY軸ニ取リ原點ヨリxナル距離ニ於ケル水分子ニ就テ考フルニ

m＝質量

v＝懸案點ニ於ケル流速

g＝重力加速度

θ＝Rノ鉛直線ト成ス角又ハ屈曲水面ノ接線カ水平線ト成ス角

ρ＝水路ノ中心ニ至ル屈曲半徑

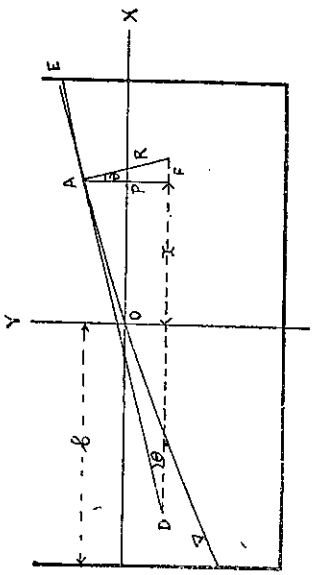
r＝懸案點ニ至ル屈曲半徑＝$\rho+x$, 然ルトキハ　$F=\dfrac{mv^2}{r}$

$$P=mg$$

又、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v^2}{rg}=\frac{v^2}{g(\rho+x)} \quad \cdots\cdots(1)$$

第一圖



$r=\rho+x$　ヲ前式ニ代入シテ積分スレバ

$$\int dy=\int\frac{v^2}{g}\cdot\frac{dx}{\rho+x} \quad \cdots\cdots(2)$$

v ヲ常數トスレバ

$$y=\frac{v^2}{g}\log(\rho+x)+C$$

$x=0$　ニ於テハ　$y=0$　　$\therefore\ C=-\dfrac{v^2}{g}\log\rho$

$$\therefore\ y=\frac{v^2}{g}\{\log(\rho+x)-\log\rho\}=\frac{v^2}{g}\log\left(1+\frac{x}{\rho}\right)$$

自然對數ヲ Brigg. 對數ニ直シ g ノ値ヲ入ルレバ

$$y=\frac{2.302585}{32.2}v^2\log\left(1+\frac{x}{\rho}\right)=0.0715\,v^2\log\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\text{(單位呎)} \quad \cdots\cdots(3)$$

兩岸ニ於ケル水面ノ差高ハ式(3)ノ x ニ水路幅ノ二分ノ一ナル $\frac{1}{2}b$ ヲ代入シテ得タルモノノ和ナリ

式(1)ヲ案スルニ r カ增スニ從ヒ $\tan\theta$ ハ減スルニ依リ $\tan\theta$ ノ減ずるノ誘導シタル横斷勾配曲線式ハ凸面ヲ上ニ向ケタル

對數曲線ナリ然ルニ事實ハ然ラスシテ多クハ水路中心ヲ界トシ屈曲部ノ外側ハ凸面上向キノ曲線ヲ成シ內側ハ凸面ヲ下ニ向ケタル曲線ヨリ成ル所ノS狀曲線ナリ之レ式(2)ニ於テ積分ヲ成スニ當リvハ後ニ論スル如ク二次又ハ三次或ハヨリ以上ノ高次ぱらぼらナルニ拘ラス之レヲ常數トシテ積分ノ外ニ置キタルカ爲メニ生スル差異ニ他ナラス

以下次ヲ逐フテ新橫斷勾配曲線式ニ就テ述ヘントス

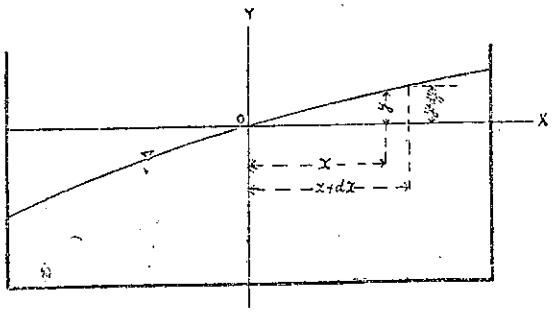
直角坐標ノ原點ノ位置及兩軸ノ定メ方ハ前揭ト同シ（第二圖參照）

原點ヨリxナル距離ニ於テ幅高厚各dxナル水ノ微容量ニ就テ考究スルニWヲ水ノ單位容積ノ重量トセハ

$$m=\frac{W\,dx^3}{g}$$

$$\therefore\quad F=\frac{W\,dx^3\,v^2}{g(\rho+x)}$$

第二圖



然ルトキハ遠心力Fハ

$$y+dy-y=dy$$

ナル水深ノ差ニ因ル水ノ靜壓力ト釣合ハサルヘカラス

$$\therefore\quad \frac{W}{g}\cdot\frac{dx^3\,v^2}{(\rho+x)}=W\,dx^2\,dy \qquad \therefore\quad dy=\frac{v^2}{g}\cdot\frac{dx}{(\rho+x)}\cdots\cdots\cdots(4)$$

即式(4)ハぐらしょっふノ誘導シタルモノト同一ナリ

或ル垂線內ノ流速ハ既ニ知ラレタル如ク其ノ縱速線（Scale of velocity）ハ或ル種ノ曲線ヨリ成リ水深ノ各點ニ於テ流速同シカラサルヲ以テ一垂線內ノ流速ト雖各水分子ノ受クル遠心力ノ程度ニ差異アリ從テ懸案點ノ水面ノ高サヲ求ムルニ式(4)ノvニ縱速線中ノ平均流速ヲ用フルハ嚴正ナル意味ニ於テハ當ラサルモノナルモヨリ的確ナル方法ヲ見出シ能ハサ

ルニヨリ茲ニハ縱速線中ノ平均流速ヲ用ヒントス縱速線內ノ平均流速ヲ縱距ニ水路幅ヲ横距ニ取リタルモノヲ空間的平均流速曲線ト稱ス（水位縱距水路ノ全平均流速横距ノ時間的平均流速曲線ヲ單ニ平均流速曲線ト稱スルヲ普通トスルヲ以テ茲ニハ之レト區別スル爲メ持ニ空間的ノ文字ヲ冠ス）

今空間的平均流速曲線ノ性質ヲ究明セントスルニ當リ先ツ縱速線ハ如何ナル性質ヲ有スルヤヲ究メムトス

縱速線ノ性質ニ就テハ學者間ニ種々ノ說アリ縱軸ノ對數曲線ナリト云ヒ（Jusmund）河底ニ頂點ヲ有スル縱軸ノぱらぼらナリト稱シ（Hagen）又ハ水平軸ヲ有スルぱらぼらナリト論シ（Darcy & Bazin）其ノ他種々ノ說アルモ要スルニ之カ爲ニ勢力（Energy）ヲ消耗スルコト大ナル渦流ヲ生セシムヘキ水路ノ底面及兩側等ノ環境條件ニ依リ支配セラルヘク同一箇所ノ縱速線ト雖水位ノ異ルニ從ヒ差異ヲ生シ正確ナル之カ現式ヲ求メムコトハ望ムヘカラサルモ水位ヲ定流（Eddy motion）ニ對スル Steady motion ノ意ニシテ Unsteady motion ニ對スル夫レニ非ス）ナリトシ水深ニ比シ水路幅カ比較的大ナルモノト假定シ即チ水ノ流下ニ對スル抵抗力ハ單ニ水ノ粘性（Viscosity）ノミナリトスレハ輓力（Tractive force）ノ關係ヨリ考究シテふぃるひはるもー（Philipp Forchheimer Hydraulik S. 114）又ハぎぶそん（Gibson Hydraulics and its Applications P. 316）等ニ證明シアルカ如ク次式ヲ以テ表ハサルヘシ

$$V_y = V_0 + \frac{B^2\mu}{2WJ} - \frac{WJ}{2\mu}\left(y - \frac{B\mu}{WJ}\right)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

茲ニ　V_y＝深サ y ナル點ノ流速，V_0＝表面流速，B＝常數，J＝水面勾配，μ＝粘率（Coefficient of viscosity）

μハぽあそらゆ（Poiseuille）ノ實驗ニヨレハ水ノ場合ニハ次ノ値ヲ取ル

$$\mu = \frac{0.00003716}{0.4712 + 0.01435\,T + 0.0000682\,T^2}$$

茲ニ　T＝華氏ノ溫度

前揭ノ μ ノ値ニ對スル扭歪力（Distortive stress）ノ單位ハ #/□′ニテ與ヘラル

式(5)ヲ審査スルニ

$$\frac{B\mu}{WJ}=y_1$$

ナル點ニ水平軸ヲ有スルぱらぼらナリ

又

$$\frac{dv_y}{dy}=\frac{WJ}{\mu}\left(y-\frac{B\mu}{WJ}\right)=0 \quad 即 \quad y=\frac{B\mu}{WJ}=J_1$$

故ニ水平軸ノ位置ハ最大流速點ノ位置ト一致ス

前式ヲ誘導スルニ當リ渦流ヲ度外視シタルヲ以テ式(5)ハ直チニ取リテ實際河川ノ縱速線ニ適用シ能ハサルハ勿論ナルモ兎モ角モ縱速線ハ水平軸ヲ有スル二次ノぱらぼらナリト假定シ得ヘシ故ニ茲ニハ縱速線ノ現式ヲ次ノ如ク假定セムトス

$$V_y=V_0+My-Ny^2\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(6)$$

但シyハ水深ヲ單位トシタル小數ニテ示セルモノトス

式(6)ヲ微分シテ零ニ等シト置ケハ最大流速點ノ深サヲ與フヘシ

即

$$\frac{dv_y}{dy}=0, \qquad M-2Ny=0 \qquad \therefore \quad y=\frac{M}{2N}=m\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(7)$$

$$\therefore \quad V_y=V_0+2mNy-Ny^2\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(8)$$

此ノ縱速線中ノ平均流速ヲ求ムルニ

$$縱速線内ノ面積=\int_0^1 V_0\,dy+2mN\int_0^1 y\,dy-N\int_0^1 y^2\,dy=V_0+mN-\frac{N}{3}$$

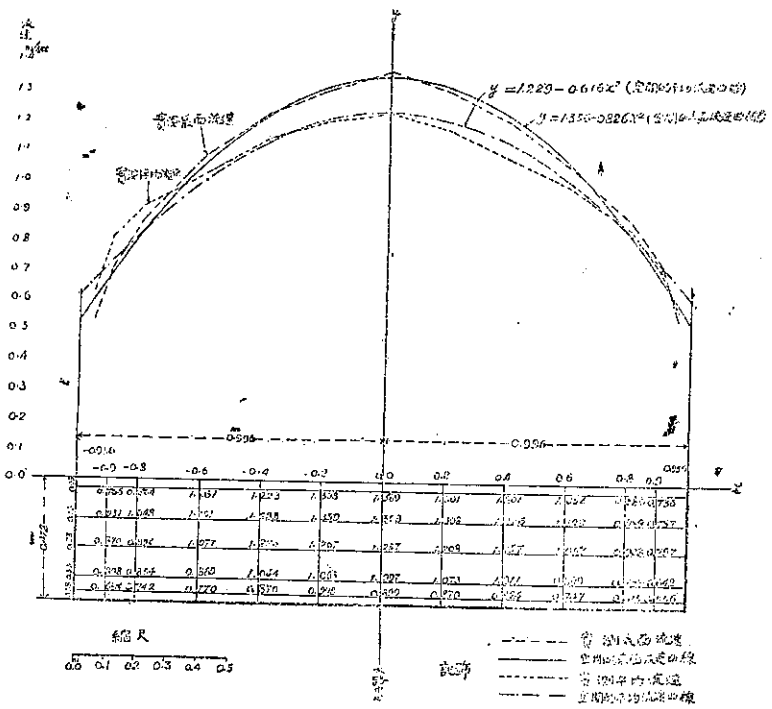
之レヲ水深即チ單位ニテ除シタルモノハ平均流速ナリ

即

$$V_{mean}=V_0+mN-\frac{N}{3}\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots(9)$$

水深ニ比シ水路幅ノ比較的大ナル場合ニシテ斷面矩形ニ近キトキハ同一横斷面内ノ他ノ縱速線ニモ同一ナルmNノ値ヲ用ヒテ大過ナカルヘク即チ同一横斷面内ノ縱速線ノ現式ニハmNヲ常數ト見ルヲ得ヘシ次ニ例ヲ揭ケテ之レカ檢證ヲ爲サムトス

第三圖



例1　材料ハ　Dervy et Bazin :—Recherches Hydrauliques Planche XX Fig. 10 Experience No. 4) ヨリ取ル　(第三圖參照)

實驗ニ用ヒタル水路ハ板張リニシテ幅一・九九二米、水深〇・四一二米ノ矩形斷面ニシテ水路中心ノ縱速線内ノ各點ニ於ケル流速ハ次ノ如シ

y (水深)	0.03^m	0.13^m	0.23^m	0.33^m	0.38^m		
V_y (流速)	1.369^m	1.353^m	1.257^m	1.097^m	0.899^m		

以上實測ノ資料ニ依リ最小自乘法ヲ適用シテ決定シタルV_0MNノ値ハ次ノ如シ

$$V_0=1.3423^m \quad M=0.8336 \quad N=5.10464$$

故ニ水路ノ中心ノ縱速線ノ現式ハ次ノ如シ

$$V_y=1.3423+0.83362\,y-5.10464\,y^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

但シyハ實際ノ水深ニシテ全水深單位ノモノニ非ス

表面流速ノ實測ナキヲ以テ直チニ前式ヲ他ノ縱速線ノ現式ニ適用スルヲ得ス故ニ水深〇・〇三米ノ實測ヲ用ヒ得ル樣式

(10)ノ原點ヲ水深〇•〇三米ノ位置ニ移セバ

$$y=Y+0.03$$

ナル値ヲyノ代リニ代入スルコトニヨリテ得ラルヽシ

故ニ

$$V_Y=1.363+0.52734\,Y-5.10464\,Y^2 \quad \cdots\cdots(11)$$

次ニ中心ヨリ右ヘ〇•一一米ノ垂線ノ縦速線ノ現式ハ式(11)ノV_0ニ代フルニ〇•一一米垂線内ノ相當水深即〇•〇三米ノ流速ナル一•二一〇一米ヲ用ヒテ得ラルヽシ（但シM Nハ式(11)ノモノト同一ナリ）

故ニ

$$V_Y=1.301+0.52734\,Y-5.10464\,Y^2 \quad \cdots\cdots(12)$$

同様ニ中心ヨリ左ヘ〇•一一米ノ垂線ノ縦速線ノ現式ハ次ノ如シ

$$V_Y=1.308+0.52734\,Y-5.10464\,Y^2 \quad \cdots\cdots(13)$$

同様ニ中心ヨリ右ヘ〇•四米ノ夫レハ

$$V_Y=1.201+0.52734\,Y-5.10464\,Y^2 \quad \cdots\cdots(14)$$

同様ニ中心ヨリ左ヘ〇•四米ノ夫レハ

$$V_Y=1.223-0.52734\,Y-5.10464\,Y^2 \quad \cdots\cdots(15)$$

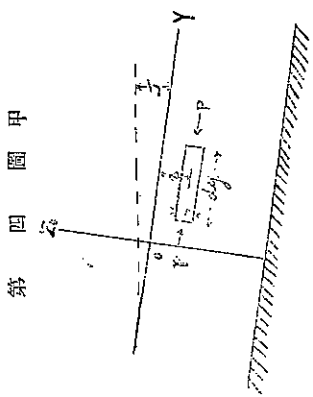
式(12)ヨリ(15)ニ至ルモノニテ計算シタル流速ト實測ノモノトヲ表示スレハ次ノ如シ

Y	y	中心垂線ノ V_y		中心ヨリ右ヘ 0.2m ノ V_y		同シク左ヘ 0.2m ノ V_y		同シク右ヘ 0.4m ノ V_y		同シク左ヘ 0.4m ノ V_y	
		計算	實測	計算	實測	計算	實測	計算	實測	計算	實測
0.03m	0.00m	1.3423m		1.280m		1.287m		1.180m		1.202m	
0.00	0.03	1.363	1.369	1.301	1.301	1.303	1.308	1.201	1.201	1.223	1.223
0.10	0.13	1.364	1.353	1.302	1.308	1.309	1.359	1.202	1.226	1.224	1.288
0.20	0.23	1.364	1.257	1.202	1.208	1.209	1.267	1.102	1.157	1.124	1.226

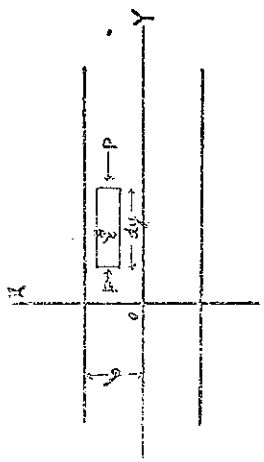
Y	y	中心垂線ノ V_y		中心ヨリ右ヘ 0.2 ノ V_y		同シク左ヘ 0.2 ノ V_y		同シク右ヘ 0.4 ノ V_y		同シク左ヘ 0.4 ノ V_y	
		計算	實測	計算	實測	計算	實測	計算	實測	計算	實測
0.30 m	0.33 m	1.062 m	1.097	1.000 m	1.073	1.097 m	1.065	0.909 m	1.011	0.922 m	1.044
0.35	0.38	0.992	0.899	0.860	0.870	0.867	0.908	0.760	0.824	0.782	0.870
0.382	0.412	0.819		0.757		0.764		0.657		0.678	

前表ニ依レハ式(6)ノ M N ヲ常數トシテ他ノ縱速線ニ及ホシ單ニ表面流速ノミ新縱速線內ノモノヲ用ヒテ得タルモノハ可ナリ良ク實際ニ一致スルヲ見ル

本論ニ立歸リ式(9)ヲ案スルニ縱速線內ノ平均流速ハ前述ノ如ク N M ヲ常數トシテ他ノ縱速線ニ及ホシテ大過ナキヲ以テ一橫斷面中ノ各垂線ノ平均流速ハ單ニ表面流速 V_0 ノミノ函數ナリト見做シ得ヘシ故ニ空間的表面流速曲線カぱらぼらナルコトヲ證明シ得レハ空間的平均流速曲線モ亦ぱらぼらナリト稱シ得



第四圖甲



第四圖乙

次ニ空間的表面流速曲線カぱらぼらナルコトヲ證明セムトス（第四圖甲乙參照）

立體坐標ノ原點ヲ水路幅ノ中心ノ水面ニ定メ水流ハ Y 軸ニ平行シ水路ノ兩岸ハ X 軸ニ直角ニ且ツ水面ニ鉛直ナル線ヲ Z 軸ニ取リ水深 y ナル位置ニ於ケル同深ノ橫ノ流速ノ變化（$Z=0$ ニ取レハ空間的平均流速曲線トナル）ニ就テ考究セムトス

先ツ記號ヲ次ノ如ク定ム

J＝水面勾配，　W＝水ノ單位容積ノ重量

$u=Y$ 軸方向ヘノ流水ノ分速度，　B＝粗密率

$p=XZ$ 面ニ對スル水ノ法線壓强度 (Intensity of

normal pressure)

ε=Turbulenz,　b=水路幅ノ二分一

長dy幅dx深單位長ヲ有スル水ノ微容量ニ就テ考フルニ其ノ水流ノ方向ヘノ分力ハ

$$W\,dy\,dx\,J\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

此ノ微容量ノ受クル壓力ハ流レノ上下流ニ於テ $\pm p\,dx$ 又其ノ中央ニ於ケル Turbulenz ハ矩形斷面ノ場合ニハぶしねすくニ從ヘハ

$$\varepsilon=\frac{W}{K}\sqrt{B}\,u_s\,b.$$

茲ニ　u_s=岸ニ接スル點ノ流速,　K=或ル常數

今同水深ノ或ル薄層ニ就テ考慮シツヽアルモノナルヲ以テ水路ノ幅カ水深ニ比シ非常ニ大ナル場合ハ底面ヨリノ Turbulenz ハ同一ノ影響ヲ與ヘ從ツテ同水深ノ流速ハ同一ナルヘク又 $\frac{\partial u}{\partial Z}$=const. ト見做シテ支障ナシ即微容量ノ上下二面ニ於ケル抵抗ハ同一ナリト見做スモ大過ナシ之ニ反シ兩側面ニ於ケル夫レハ

$$\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}\pm\frac{\partial\left(\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}\cdot\frac{dx}{2}=\varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x}\pm\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cdot\frac{dx}{2}\right)$$

兩側面ニ於ケル剪力ノ差ハ

$$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\,dy\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

(16)ト(17)トハ(水流ハ加速度ヲ生セサルヲ以テ)釣合ハサルヘカラス即チ

$$0=W\,dy\,dx\,J+\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\,dy$$

εニぶしねすくノ値ヲ代入スレハ

$$0=J+\frac{\sqrt{B}}{K}bu_s\frac{\partial^2\mu}{\partial x^2}$$

$$\therefore\ u=\frac{-JK}{\sqrt{B}bu_s}\iint dx^2=C+Dx-\frac{JK}{\sqrt{B}bu_s}x^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18)$$

茲ニ　$C,\ D$　ハ積分係數

座標ノ原點ハ水路幅ノ中心ニ定メ且ツ抵抗ヲ生スヘキ原因ハ左右同一ナルヲ以テ運動ハX軸ニ對シ左右齊等ナラサルヘカラス即チ式(18)ハxノ正負ニ不拘等シキuノ値ヲ與ヘサルヘカラス即チ　$D=0$　又　$x=\pm b$　ニ於テ　$u=u_s$　之等ノ値ヲ式(18)ニ代入スレハ

$$u_s=C-\frac{JK}{2\sqrt{B}bu_s}b^2\qquad\therefore\ C=u_s\left(1+\frac{JKb}{2\sqrt{B}}\right)$$

即チ式(18)ハ結局

$$u=u_s\left(1+\frac{JKb}{2\sqrt{B}}\right)-\frac{JK}{2\sqrt{B}u_sb}x^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(18_1)$$

或ハ

$$u=a-bx^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

即チ式(19)ハ水路幅ノ中心ニ頂點ヲ有スル二次ノぱらぼらナリ即チ同水深ノ横ノ流速ノ變化ヲ示ス曲線ハ二次ノぱらぼらヲ以テ示サル從テ其ノ特別ノ場合ナル($Z=0$　ナル場合)空間的平均流速曲線モ亦二次ノぱらぼらヲ以テ表現シ得ルモノト稱シテ可ナルヘシ

次ニ例ヲ擧ケ前式ヲ實際水路ニ適用シ其ノ適否ヲ檢セムトス

例二　實測ノ材料ハ先ニ例一ニ掲ケタルモノト同シク(Recherches Hydrauliques Planche XX Fig. 10 Expérience No. 4)ヨリ取ル

表面流速ノ測定ナキヲ以テ水面ヨリ〇・〇三米ノモノヲ用ヒ表面流速ニ替フ（第三圖參照）

空間的表面流速曲線ノ現式ヲ式(19)ニ依リ次ノ如キ二次ノぱらぼらト假定シ

$$y=a-bx^2$$

實測ノ資料ヨリ最小自乘法ニヨリ a b ヲ決定シタルモノハ次式ナリ

$$y=1.356-0.826\,x^2 \quad \cdots\cdots(20)$$

式(20)ニヨリ算出シタルモノト實測トヲ比較スレハ次表ノ如シ

x	y 實測ノ左右平均	y 計算	計算ノ實測ニ對スル差
m 0.0	m 1.369	m 1.356	m −0.013
0.2	1.3045	1.320	+0.0155
0.4	1.212	1.224	+0.012
0.6	1.0665	1.059	−0.0075
0.8	0.872	0.827	−0.045
0.9	0.721	0.687	−0.034
0.996		0.537	

前表及第三圖ヨリ見レハ計算ト實測トノ差異ハ極メテ僅少ナリ即チ空間的表面流速曲線ヲ二次ノぱらぼらト假定スルハ適當ナルヲ知ル

次ニ式(9)ノ V_0 ノ代リニ式(19)ヲ入ルレハ

$$V_{mean}=a-bx^2+mN-\frac{N}{3} \quad \cdots\cdots(21)$$

之レヲ書キ替フレハ

$$V_{mean}=A-BX^2 \quad \cdots\cdots(22)$$

即空間的平均流速曲線モ亦二次ノぱらぼらナルコトヲ立證シ得タリ

例三　材料ハ例二ト同シク (Recherches Hydrauliques) ヨリ取ル　(第二圖參照)

空間的平均流速曲線ノ現式ヲ式(22)ノ形ニ定メ實測ノ資料ヨリA Bヲ決定スレハ次式ヲ得

$$V_{mean}=1.229-0.616\,X^2$$

前式ニ依リ計算シタルモノヲ實測ノモノト對比シタル表ハ次ノ如シ

X	V_{mean} 實測 左	右	左右平均	計算	實測ニ比シ計算ノ差
0.0	1.242		1.242	1.229	−0.0130
0.2	1.209	1.176	1.1925	1.2044	+0.0119
0.4	1.146	1.080	1.1130	1.1304	+0.0174
0.6	1.025	0.991	1.0080	1.0072	−0.0008
0.8	0.917	0.849	0.8830	0.8348	−0.0482
0.9	0.812	0.717	0.7645	0.7300	−0.0345
0.956	0.632	0.578	0.605	0.6660	+0.0610
0.996				0.6180	

前表及第二圖ニ依レハ空間的平均流速曲線ヲ二次ノぱらぼらトシタルモノハ良ク實際ニ一致スルヲ知ル

今迄述ベ來リタル所ハ水路ノ直線部ニ於ケル空間的平均流速曲線ノミナリキ之レヨリ進ムテ水路ノ屈曲部ニ於ケル夫レニ就テ考究セムトス

水路ノ直線部ニ於テ直線運動ヲ爲シ來リタル水分子ハ運動ノ法則ニ隨ヒ尙直線運動ヲ繼續セムトスルモ水路ノ屈曲部ニ

於テハ運動ノ自由ヲ拘束セラル屈曲部ノ外側（即チ凹岸）ニ近ク流下シ來リタル水分子ハ此ノ拘束ヲ受クル程度内側ノ夫レニ比シテ僅少ナルヘク想像セラル玆ニ此ノ拘束ノ程度カ屈曲ノ外側ヨリ内側ニ近ツクニ從ヒ増大スル割合即チ換言スレハ外側ヨリ順次内側ニ至ル減速ノ割合カ或ル直線式ヲ以テ表ハサレ得ルモノト假定セム然ルトキ屈曲部ニ於ケル空間的平均流速曲線ノ現式ハ水路ノ直線部ニ於ケル其ノ現式ナル二次ノぱらぼらニ前記減速ノ割合ヲ示ス直線式トヲ加味シテ表ハサルヘシ

今水路ノ直線部ニ於ケル空間的平均流速曲線ノ現式ヲ式(22)ト同一形式ナル式(23)ニ假定ス（第五圖參照）

$$y=l-ax^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

（ぱらぼら A ノ式）

此ノぱらぼらノ面積即チ水路直線部ノ流量ハ

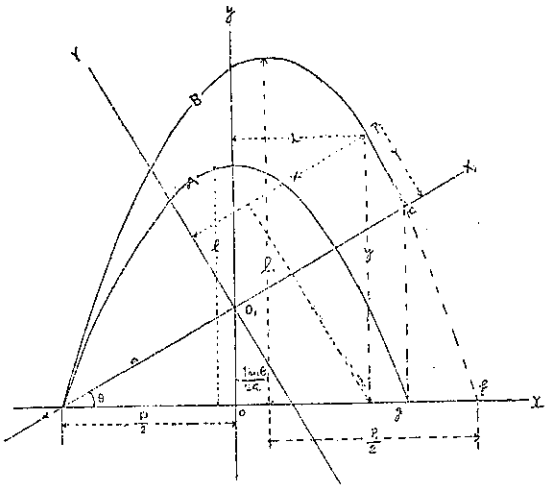
$$2\int_0^{\frac{p}{2}}(l-ax^2)\,dx=pl-\frac{ap^3}{12}$$

$$\left(a=\frac{4l}{p^2}\ \text{ヲ代入スレハ}\right)\qquad =\frac{2}{3}pl \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

今第五圖ニ於テ d X線ヲ以テ凹岸ヨリ凸岸ニ順次減速セラルヽ程度ヲ示ス直線トスレハ其ノ現式ハ

$$y_1=\tan\theta\left(x+\frac{p}{2}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

第五圖



此ノ y_1 ノ値ヲ式(23)ノぱらぼらAノ y ノ値ニ加算シテ作圖シタルモノハぱらぼらBナリ

ぱらぼらBノ現式ハ

$$y=l-ax^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)\tan\theta \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

水路ノ直線部ト屈曲部トハ流量等シカラサルノカラス且ツ凸岸ニモ負ノ流速ヲ生スルコト能ハス故ニ屈曲後ノ空間的平均流速曲線ハぱらぼらAト面積(即チ流量)等シキぱらぼらBヲ以テ表ハサルヽヨリ他ニ方法ナシ今此ノ兩ぱらぼらノ面積ノ等シキコトヲ證セムトス

ぱらぼらBノ縱距ノ最大ナル點ヲ求ムルニ式(26)ヨリ

$$\frac{dy}{dx}=0 \qquad 即チ \qquad -2ax+\tan\theta=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{\tan\theta}{2a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

式(27)ノxノ値ヲ式(26)ニ代入スレハぱらぼらBノ縱距ノ最大値即チ式(23)ノlニ相當ス

$$max.\ y=l_1=l-a\left(\frac{\tan\theta}{2a}\right)^2+\left(\frac{\tan\theta}{2a}+\frac{p}{2}\right)\tan\theta=l+\frac{\tan^2\theta}{4a}+\frac{p\tan\theta}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

ぱらぼらBノx軸ニ於ケル幅ハ

$$p_1=p+\frac{\tan\theta}{a}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

ぱらぼらdBfノ面積ハ

$$=\frac{2}{3}p_1l_1=\frac{2}{3}\left(l+\frac{\tan^2\theta}{4a}+\frac{p\tan\theta}{2}\right)\left(p+\frac{\tan\theta}{a}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

ぱらぼらAノ面積カぱらぼらdBfノ夫レヨリ面積defヲ減シタルモノニ等シケレハぱらぼらAトBトハ面積等シク即チ直線部及屈曲部ノ流量相等シキコトヽナル

$$面積\ def=面積\ deg+面積\ efg, \qquad 面積\ deg=\frac{p^2\tan\theta}{2}$$

$$\text{面積 } efg=\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}+\frac{\tan\theta}{a}}\left\{l-ax^2+\left(x+\frac{p}{2}\right)\tan\theta\right\}dx=\left|\ lx-\frac{a}{3}x^3+\frac{\tan\theta}{2}x^2+\frac{p\tan\theta}{2}x\ \right|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}+\frac{\tan\theta}{a}}$$

$$=\frac{l\tan\theta}{a}-\frac{p^2\tan\theta}{4}+\frac{\tan^3\theta}{6a^2}+\frac{p\tan^2\theta}{2a}$$

ぱらぼら dBf ノ面積ヨリ面積 deg ト efg トヲ減ズレバ

$$\frac{2}{3}\left(l+\frac{\tan^2\theta}{4a}+\frac{p\tan\theta}{a}\right)\left(p+\frac{\tan\theta}{a}\right)-\left(\frac{p^2\tan\theta}{2}+\frac{l\tan\theta}{a}-\frac{p^2}{4}\tan\theta+\frac{\tan^3\theta}{6a^2}+\frac{p\tan^2\theta}{2a}\right)$$

$$=\frac{2}{3}lp+\frac{p^2\tan\theta}{3}+\frac{2l\tan\theta}{3a}-\left(\frac{p^2\tan\theta}{4}+\frac{l\tan\theta}{a}\right)$$

$\left(a=\frac{4l}{p^2}\right.$ ヲ前式ニ代入スレバ$\left.\right)$ $\quad=\frac{2}{3}lp+\frac{p^2}{2}\tan\theta-\frac{p^2}{2}\tan\theta=\frac{2}{3}lp$

即チぱらぼら A ノ面積ニ等シ

今屈曲部ノ空間的平均流速曲線ナルぱらぼらヲ原點ヲ新河幅ノ中心ナル O_1 ニ移セバ

$$Y=y\cos\theta-\left(\frac{p}{2}+x\right)\sin\theta$$

$$X=x\sec\theta+Y\tan\theta=x\sec\theta+\left\{y\cos\theta-\left(\frac{p}{2}+x\right)\sin\theta\right\}\tan\theta=x(\sec\theta-\sin\theta\tan\theta)+y\sin\theta-\frac{p}{2}\sin\theta\tan\theta$$

之等ノ値ヲ式(26)ニ代入スレバ

$$y\cos\theta-x\sin\theta-\frac{p}{2}\sin\theta=l-a\left\{x(\sec\theta-\sin\theta\tan\theta)+y\sin\theta-\frac{p}{2}\sin\theta\tan\theta\right\}^2$$

$$+\left\{x(\sec\theta-\sin\theta\tan\theta)+y\sin\theta-\frac{p}{2}\sin\theta\tan\theta+\frac{p}{2}\right\}\tan\theta$$

又ハ

$$\left\{(\sec\theta-\sin\theta\tan\theta)x+\sin\theta y-\frac{-\cot\theta+ap\sin\theta\tan\theta+\tan\theta}{2a}\right\}^2$$

$$=\frac{\sin\theta+\cot\theta(\sec\theta-\sin\theta\tan\theta)}{a}x-\left\{\left(\frac{\cot\theta-ap\sin\theta\tan\theta-\tan\theta}{2a}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{-2p\sin\theta-4l+ap^2\sin^2\theta\tan^2\theta+2p\sin\theta\tan\theta-2p\tan\theta}{4a}\right\}$$

結局前式ハ

$$(Ax+By-c)^2=Dx-E \qquad \therefore\ y=-\frac{A}{B}x\mp\frac{1}{B}\sqrt{E-Dx}+\frac{c}{B}$$

又ハ

$$y=ax\mp b\sqrt{1-cx}+d \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

茲ニ

$$a=\frac{-A}{B},\qquad b=-\frac{E^{\frac{1}{2}}}{B},\qquad c=\frac{D}{E},\qquad d=\frac{c}{B}$$

$(1-cx)$ カ負號ヲ取レハ曲線ハ存在セス故ニ曲線ノ存在スル範圍ニ於テハ $(1-cx)$ ハ正ナラサルヘカラス

今 x ノ單位ヲ $y=0$ ノトキノばらばらノ幅ノ半即チ實際問題ニ於テハ水路幅員ノ半ニ定ムレハ本問題ノ解決上必要ナル x ノ値ハ常ニ一以下トナルヘク $b(1-cx)^{\frac{1}{2}}$ ニばいのみるせれむヲ適用シ得ヘシ

即チ

$$b(1-cx)^{\frac{1}{2}}=b\left\{1-\frac{1}{2}cx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}c^2x^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{6}c^3x^3\ \cdots\cdots\cdots\cdots\right\}$$

實際問題トシテハ x ノ二乘又ハ三乘ノ項迄取レハ充分ナル結果ヲ得ラルヘカ如キヲ以テ三乘ノ項迄取リ高次ノ項ヲ捨ツレハ式(31)ハ

$$y=ax\mp b\left(1-\frac{c}{2}x-\frac{c^2}{8}x^2-\frac{c^3}{16}x^3\right)+\frac{c}{B}$$

又ハ

$$y=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

即チ屈曲部ノ空間的平均流速曲線ハ二次又ハ三次或ハヨリ以上ノ高次ぱらぼらヲ以テ表現シ得ヘシ

茲ニハ計算ノ簡單ノ爲メxノ二次ノ項迄ヲ取リ空間的平均流速曲線ノ現式ヲ次ノ如ク假定シ

$$y=a_1x^2+b_1x+c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

之ヲ式(4)ノvノ代リニ入ルレハ

$$dy=\frac{(a_1x^2+b_1x+c_1)^2}{g}\cdot\frac{dx}{(\rho+x)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

$$\int dy=\frac{1}{g}\int(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)\frac{dx}{(\rho+x)} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

茲ニ

$$A=a_1^2,\quad B=2a_1b_1,\quad C=2a_1c_1+b_1^2,\quad D=2b_1c_1,\quad E=c_1^2$$

又ハ

$$\int dy=\frac{1}{g}\int(Ax^3+B_1x^2+C_1x+D_1)\,dx+\frac{1}{g}\int\frac{K\,dx}{\rho+x} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

茲ニ

$$B_1=B-\rho A,\quad C_1=C-\rho B,\quad D_1=D-\rho C_1,\quad K=E-\rho D_1$$

式(36)ヲ積分シタル後 $x=0$ ト置ケハ積分係數 $K_1=-K\log\rho$ ヲ得故ニ式(36)ハ

$$\therefore\ y=\frac{1}{g}\left\{(ax^4+bx^3+cx^2+dx)+2.302585\,K\log\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

茲ニ

$$a=\frac{A}{4},\quad b=\frac{B_1}{3},\quad c=\frac{C_1}{2},\quad d=D_1$$

即チ屈曲部ニ於ケル横斷水面勾配ハ四次又ハヨリ以上ノ高次ぱらぼらト對數曲線トノ合成曲線ナリ又式(35)ヲ審議スルニxノ係數$A\,B\,C\,D\,E$等ノ正負大小等ノ關係ヨリ横斷勾配曲線ノ接線カ水平線ト成ス角ハxノ增減ニ從ヒ種々ニ變化シ一般ニ論シ能ハサルモ後ニ掲クル例四、五、六等ヨリ見ルニxノ正號方面ニハ凸面上向キニシテxノ負號方面ニハ凸面下向

キノ曲線ヲ成シ全曲線ハ座標ノ原點即チ水路幅ノ中心ヲ界トシ屈曲方向相反スルS狀曲線ナリ（第七圖ノ一參照）

兩岸堤防ヲ有スル幅員大ナル河川ノ屈曲部ニ於テハ式(37)ヲ以テ計算シタル兩岸水位ノ差高ハ可ナリ大ナルモノニ達スヘク（實際問題トシテモ約一尺五寸ノ差高ヲ實測セシモノアリ）之レカ爲メニ滿堤ノ場合ハ屈曲ノ凹岸堤ニ越水ヲ來タシ從テ堤後ヲ洗掘セラレ破堤ノ一因ヲ爲スコトナキヲ保シ難シ又水力電氣ノ水路ノ如ク斷面矩形ヲ成シ水路幅ニ比シ屈曲半徑小ニ且ツ流速比較的大ナル場合モ亦屈曲ノ外側ニ越水ヲ生シ所定ノ水量ヲ通過セシメ能ハサルニ至ルヘシ

以上ノ研究ハ何レモ斷面ヲ矩形ニ近キモノト假定シタルモ實際河川ノ場合ニハ或ル垂線ノ流速ハ縱速線カぱらぼらニシテ遠心力カv^2ニ比例スル關係上比較的水面附近ノ流速大ナル所ニ於テハ流速ノ小ナル底面附近ヨリモ大ナル遠心力ヲ受ケ懸案ノ垂線ハ最早ヤ垂線ナル能ハス水流ハ表面近クニ於テハ屈曲ノ外側ニ傾キ底部附近ニ於テハ內側ニ傾クヘク且ツ一方ニ於テハ屈曲半徑ニ平行ナル分速度アリテ之等ノ合成速度ハ一種ノ螺旋運動ヲ成スヘク從テ凹岸ハ洗掘セラレ凸岸ハ流速小ナル爲メ沈澱ヲ生シ凹岸ハ水深深ク凸岸ハ淺ク屈曲部ノ河底横斷形狀ハ一種ノ不齊等ぱらぼら又ハ不等邊三角形ニ近キ形ヲ取ルヘシ

從テ斷面矩形ナリトノ假定ニ基キ誘導シタル空間的平均流速曲線モ亦二次又ハヨリ高次ぱらぼら以外ノ複雜ナル形式ヲ取ルヘシ

次ノ例ニ明ナル如ク屈曲部ノ河底ノ横斷ハ何レモ不齊等ぱらぼら又ハ不等邊三角形ニ類似ノ形狀ヲ成スヲ見ル

次ニ一垂線內ノ平均流速ヲ測ルニ流速計ヲ用フル場合ハ屈曲半徑ニ平行ナル分速度ト遠心力ニ起因スル横分速トノ合成速度ヲ知ルコトヽナルヲ以テ實測ニ依リテ得タル流速ヲ基トシテ求メタル空間的平均流速曲線ヲ用ヒテ水位ノ上昇ヲ算出スルトキハyノ値ハ實測ノモノヨリ稍大ナル結果ヲ生スヘキハ免レ難キコトニ屬ス尙浮子ヲ用ヒタル場合ハ屈曲部ノ刻々變化シツヽアル流速ノ平均ヲ知ルコトヽナルヲ以テ之亦正確ナル結果ヲ望ミ得ス

次ニ二三ノ例ヲ擧ケ式(37)ノ正否ヲ檢セムトス

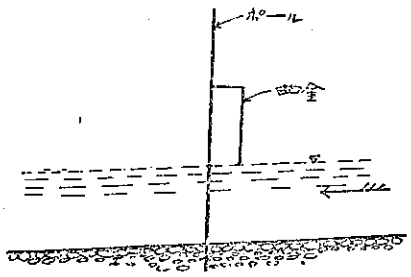
例四　阿武隈川筋宮城縣伊具郡枝野村北原屈曲部

實測者工學得業士長谷川勝伍氏

實測ノ方法　流速ハ竹棹浮子ノ流下ニ依ル

水位ノ高低ハ初メ河中ノ適當ノ位置ニぽーるヲ建テ之レニ大工ノ使用スル曲金樣ノモノヲ取リ付ケ其ノ一端カ河中ニ於テぽーるヲ建テタル者ノ上陸後ノ水面カ正確ニ水面ト接スル樣度々試ミタル後正確ヲ期シ之レヲ陸上ヨリれべるニテ測定セシモノトス（第六圖參照）

第六圖



河幅　三百三尺

河幅ノ中心ニ至ル屈曲半徑 ρ 六百五十二尺五寸

流速屈曲半徑及重力加速度共河幅ノ半ヲ單位トシテ計算ス

實測ノ資料ハ次ノ如シ（第七圖ノ一參照）

x	51.8	102.0	119.7	139.5	−7.5	−110.1	−120.9
v（秒尺）	4.07	4.39	4.21	3.46	3.83	3.12	2.64

空間的平均流速曲線ノ現式ヲ式(33)ニ依リ

$$y=(ax^2+bx+c$$

ナル二次ノぱらぼらニ假定シ前掲ノ資料ヨリ最小自乘法ニヨリ $a\ b\ c$ ヲ決定スレハ

$$a=-0.00744,\qquad b=0.00498,\qquad c=0.0269$$

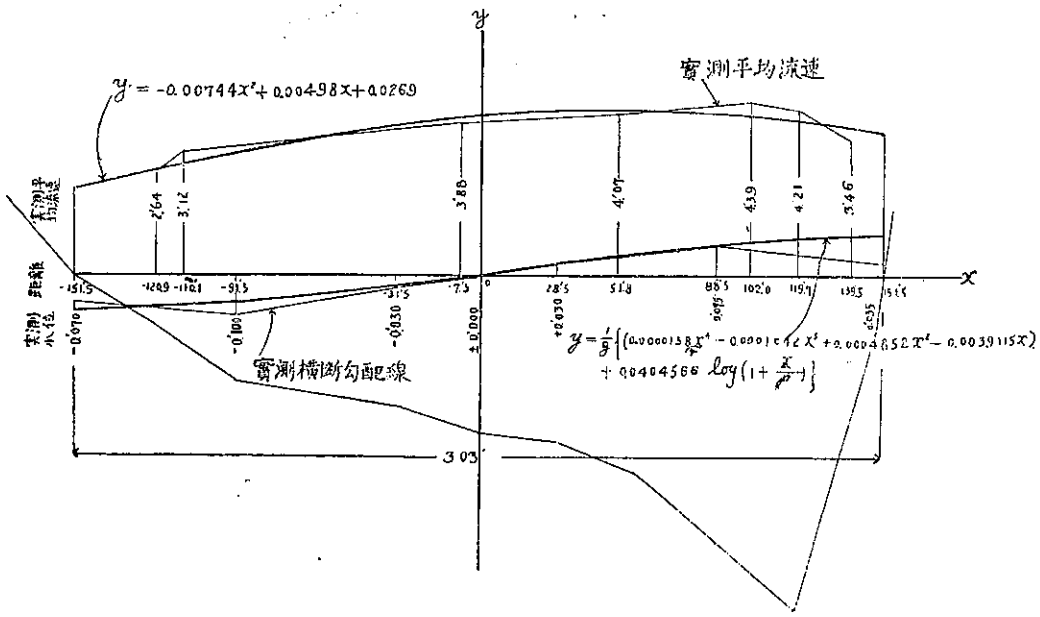
即チ

$$y=-0.00744\,x^2+0.00498\,x+0.0269\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

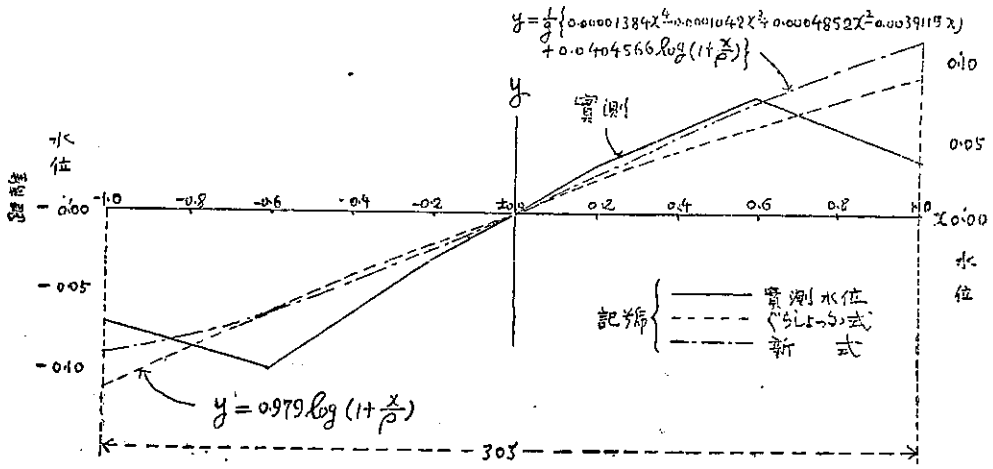
茲ニ注意スヘキハ前掲ノ $a\ b\ c$ ヲ決定スルニ當リ最小自乘法ヲ用フル場合ハ常數 c ハ $x=0$ ノトキノ y ノ値ナルニ依リ實測ノ x ノ零ナル點ノ流速ヲ用フレハ可ナル理ナルニヨリ計算ヲ非常ニ簡略ニスルノ利アルモ實際河川ノ場合ニハ斷面

第七圖ノ一

阿武隈川筋北原屈曲部横斷勾配圖



第七圖ノ二



不規則等ノ爲メ實測ノ空間的平均流速曲線ハ正シキ曲線ヲ成サヽルヲ普通トスルニ依リ計算ノ複雜ナル不利ヲ忍ヒ a b c ノ三ヲ未知數トシテ最小自乘法ヲ適用スルヲ可トス

前式ヲ式(37)ノ屈曲部橫斷勾配式ニ適用スレハ

$$y=\frac{1}{g}\left\{(0.00001384\,x^4-0.0001042\,x^3+0.0004852\,x^2-0.0039115\,x)\right.$$

$$\left.+2.302585\times0.0175701\log\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

式(38)ヲ -1 ヨリ $+1$ 迄積分シ之レヲ二分スレハ x ハ河幅ノ半ヲ單位トシタルヲ以テ全水路ノ平均流速ヲ得ヘシ斯クシテ得タル毎秒三尺七寸ノ流速ヲ式(3)ノぐらしゝゝゝ式ニ入レテ得タル y ノ値ト式(39)ニヨリテ得タル夫レト實測水位トヲ對照スレハ次表ノ如シ（第七圖ノ二參照）

x		1.0	−1.0	0.9	−0.9	0.8	−0.8	0.7	−0.7	0.6	−0.6
y	式 (39) ニヨル	0′.108	−0.091	0.099	−0.086	0.091	−0.080	0.081	−0.072	0.070	−0.064
	式 (3) ニヨル	0′.089	−0.112	0.081	−0.100	0.072	−0.087	0.064	−0.075	0.055	−0.064
實測		0′.035	−0.070							0.075	−0.100
x		0.5	−0.5	0.4	−0.4	0.3	−0.3	0.2	−0.2	0.1	−0.1
y	式 (39) ニヨル	0.059	−0.055	0.048	−0.045	0.036	−0.034	0.024	−0.021	0.012	−0.012
	式 (3) ニヨル	0.017	−0.052	0.038	−0.041	0.028	−0.031	0.019	−0.020	0.010	−0.010
實測								0.030	−0.030		

例五　前例ト同一場所ニシテ前例ノ場合ヨリ水位一尺一寸五分九厘降下シタルトキノ實測ナリ

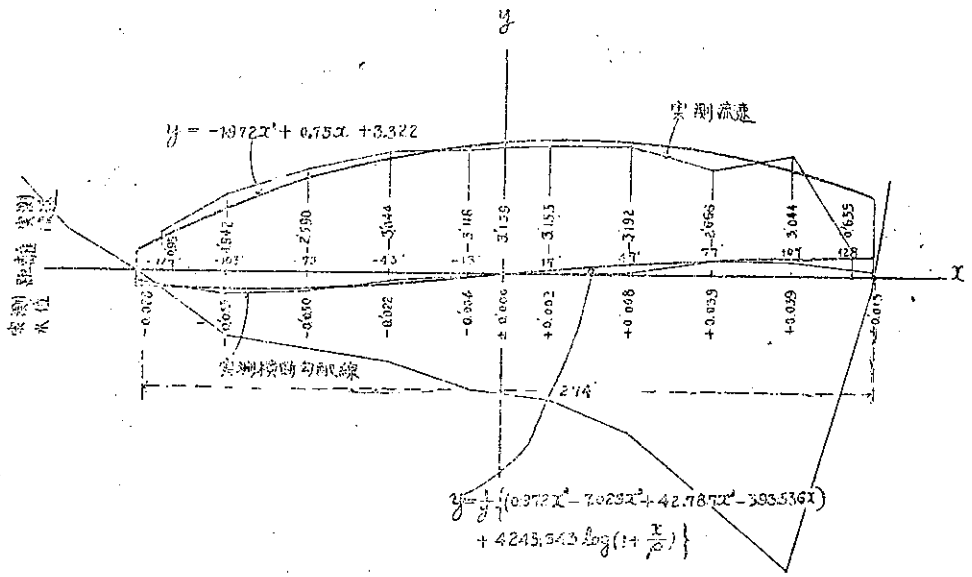
實測者及水位ノ測定方法ハ前例ト同樣ナレトモ流速ハぷらいす式流速計ヲ用ヒ積分法 (Integration method) ニ依レルモノトス（第八圖參照）

河幅二百七十四尺

第八圖

阿武隈川筋北原屈曲部横斷勾配圖

（第七圖、H ニ水位1.159降下シタル場合）



屈曲半徑（河幅ノ中心ニ至ル）六百三十八尺

實測流速ハ次ノ如シ

x	17′	47	77	107	128	−13
v（秒尺）	3.155	3.192	2.666	3.044	0.659	3.118
x	−43	−73	−103	−127	±0.0
v（秒尺）	3.044	2.590	1.942	0.950	3.139

以上ノ資料ヨリ定メタル空間的平均流速曲線ノ式ハ次ノ如シ但シ x ρ ハ河幅ノ半即チ一三七尺ヲ單位トシ y ハ實尺ヲ得

$$y = -1.972x^2 + 0.75x + 3.322$$

横斷勾配線式ハ次ノ如シ

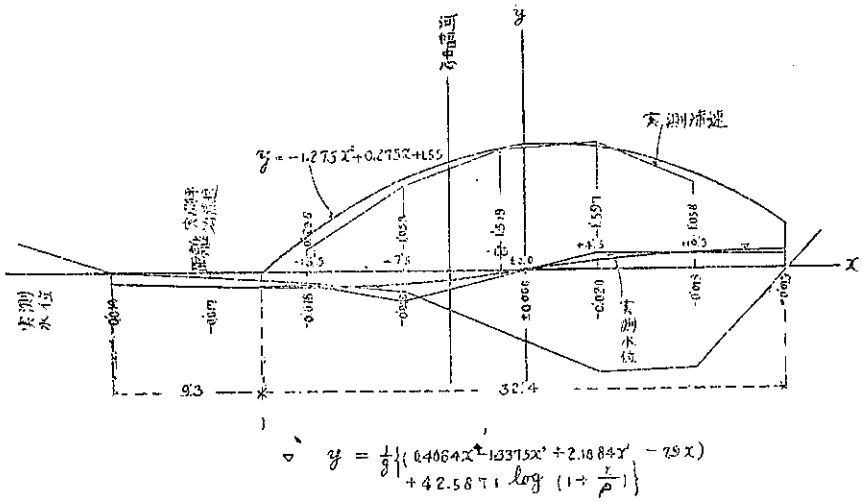
$$y = \frac{1}{g}\left\{(0.972x^4 - 7.023x^3 + 42.787x^2 - 393.536x) + 4{,}245.343 \log\left(1 + \frac{x}{\rho}\right)\right\}$$

之ニヨリ計算シタル y ノ値ト實測トヲ對照スレハ次ノ如シ

x		1.0	−1.0	0.8	−0.8	0.56
y	計算	0.060	−0.042	0.052	−0.042	0.039
	實測	0.015	−0.028	0.039	−0.055	0.039

第九圖

内川筋南在屈曲部横斷勾配圖



x	−0.53	0.34	−0.32	0.13	−0.10
y 計算	−0.034	0.024	−0.021	0.010	−0.006
y 實測	−0.050	0.008	−0.022	0.002	−0.004

例六　阿武隈川右支内川筋宮城縣伊具郡丸森町字南在屈曲部

實測者並水位流速等ノ測定方法ハ例五ニ同シ

河幅四十一尺七寸ノ内屈曲ノ内側幅九尺三寸ハ地形上視覺シ得ヘキ流速ナシ故ニ横斷勾配ノ計算ニ用ヒタル河幅ハ流速アル部分ナル三十二尺四寸ヲ取レリ從テ坐標ノ原點ハ屈曲ノ外側岸ヨリ十六尺二寸ノ位置ニ定ム

（第九圖參照）　x 及 ρ ノ單位ハ計算ニ用ヒタル河幅ノ半即チ十六尺二寸トス ρ ハ三十三尺

實測流速ハ次ノ如シ

x	4.5	10.5	−1.5	−7.5	−13.5
v(秒尺)	1.597	1.058	1.519	1.058	0.238

前掲ノ資料ニ依リ計算シタル空間的平均流速

曲線ノ現式ハ次ノ如シ

$$y=-1.275\,x^2+0.275\,x+1.550$$

横斷勾配曲線式ハ次ノ如シ

$$y=\frac{1}{g}\left\{(0.4064\,x^4-1.3375\,x^3+2.1884\,x^2-7.9\,x)+42.5871\log\left(1+\frac{x}{\rho}\right)\right\}$$

之レニヨリテ算出シタル y ノ値ト實測トヲ對比スレハ次表ノ如シ

x		1.0	−1.0	0.65	−0.83	0.28	−0.46	−1.20	−1.57
y	計算	0.023	−0.020	0.019	−0.020	0.010	−0.015	−0.020	−0.020
	實測	0.013	−0.0165	0.019	−0.016	0.020	−0.040	−0.017	−0.014

屈曲ノ內側水面幅九尺三寸ハ流速零ナルヲ以テ遠心力ヲ受ケス從テ水位ノ上昇ナキヲ以テ其ノ間ノ水面ハ $x=-1$ ノ點ト水位同高ナルヘシ（完）