論說報告

土木學會誌 第五卷第二號 大正八年四月

河川測量ニ於ケル測地學ノ應用ニ就テ

會員 工學博士 中原貞三郎

河川測量ニ於テ最モ多額ノ經費ト長キ時日トヲ要スルモノハ平面測量ニシテ調査區域十數里乃至數十里ニモ亘リ關係幅員モ亦宏大ナル場合其調査ノ基本タルヘキ三角測量ノ遂行ハ啻ニ多大ノ勞力ヲ要スルノミナラス其精確ヲ期スル事モ亦頗ル困難ナリ然ルニ我國ニ於テハ參謀本部陸地測量部ニ於テ全國ニ亘リテ大規模ノ平面測量ヲ行ヒ其準據セシ大小三角點ノ位置ハ之ヲ同部發行ノ地圖ニ掲載セルノミナラス其詳細ナル經緯度ハ別ニ冊子トシテ之ヲ發行セリ依テ河川測量ニ於テモ此等ノ三角點ニ準據シ唯枝距基線トシテ局部的ニ多少ノ三角又ハ測線ヲ設置スレハ煩雜ナル三角網測量ヲ全然省略シ得ルヲ以テ事業ノ進捗上多大ノ利益ヲ得ヘシ

陸地測量部設置ノ三角點ハ同部發行ノ三角點成果表中ニ掲載セルヲ以テ其地點ニ於ケル地球ノ半徑(同緯度ノ地點ニ於テハ凡テ同値ナリ)ヲ知レハ依テ以テ各地點間ノ經緯距ヲ算出シ得ヘシ然ルニ斯クシテ算出セル經緯距ハ球面上(地球表ヲ大體球面ト見做シテ)ノ弧線ノ長サニシテ直ニ之ヲ河川平面圖上ニ於ケル縱横距ト見做シ得ス故ニ此等ノ三角點ヲ利用セントスレハ先ツ經緯距ヲ平面上ノ縱横距ニ換算セサルヘカラス而テ此換算法タルヤ頗ル煩雜ナルモノナレトモ普通河川調査ニ於テ取扱フ如キ小區域(地球ノ全表面ニ對シテ微少ナル區域)ニ對シテハ以下述フルカ如

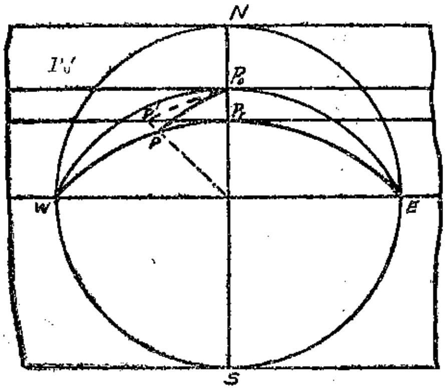
キ方法ヲ以テ充分ナル精度ニ之ヲ算出シ得ヘシ一般ニ球面又ハ橢圓體面上ニ在ル圖形ハ之ヲ其儘平面上ニ引キ寫ス事能ハス今球面上ノABCナル三角形ヲ平面上ニ畫カントスルニ三ツノ角ヲ同一ニトレハ各邊ハ凡テ實際ノ長ヨリ小トナルヘシ(第一圖ニ於テ實際ノ三角ハ$AbCaBc$ニシテ之ヲ平面上ニ畫キタルモノハ$Ab'Ca'Bc'$ナリ)依テ地球上ノ或ル圖形ヲ平面上ニ移サントスル場合ニハ適當ナル方法ヲ用キテ豫メ之ヲ平面圖形ニ變換セサルヘカラス而テ變換方法ハ應用ニ便ニ誤差ノ最小ナルモノヲ選定セサルヘカラス此點ニ於テ最モ優秀ナルハ所謂圓筒投影法(Cyindrical projection)ニシテ今日最モ廣ク行ハルヽ所ナリ即地球上ノ一點P_0(第二圖參照)ノ附近ノ諸點ノ位置ヲ平面上ニ設定セントスレハP_0ヲ通ル子午圏(即チP_0ト地球ノ軸—南北ノ極ヲ貫ク—トヲ含ム平面ト地球表面トノ截交線ニシテ一ノ大圓ヲナス—大圓トハ球ノ中心ヲ通ル平面ト球面トノ截交線ニシテ球ト同一ノ半徑ヲ有スル圓周ナリ)ニ於テ球ニ接スル圓筒ヲ考ヘ球面ニ於ケルP_0附近ノ點Pヲ該圓筒上ニ投影シテP'ヲ得圓筒ヲ展開シテ平面トナセハ平面上ニP_0及P二點ノ位置ヲ設置シ得ヘシ(第三圖參照)

第一圖

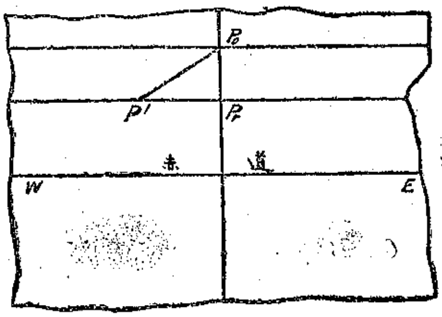
第一節　縱橫距ノ計算

次ニ原點P_0ニ對スル諸點ノ位置ヲ算出スル方法ヲ述ヘントス

第五圖ニ於テNヲ北極Sヲ南極WE線ヲ赤道Oヲ地球面ノ中心P_0ヲ原點トシPヲ原點ヨリ餘リ遠カラサル點(數里)トス

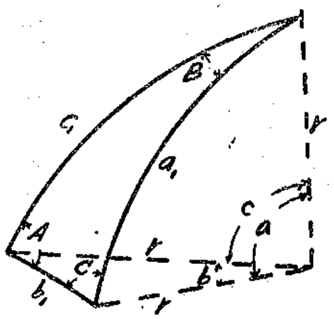


第　二　圖



第　三　圖

今P_0ニ對スルPノ位置即平面上ニ於テP_0ヲ原點トセルPノ縦横距ヲ求メン爲メ先ツPヲ過キP_0NSナル大圓ニ直角ニ交切スル大圓ヲ考ヘ之トP_0NS大圓トノ交點ヲP_rトス然ルトキハNPP_rハ球面上ニ三角形ヲナシ而モ角NP_rP (NP_0S大圓ヲ含ム平面トPP_r大圓ヲ含ム平面トノ間ノ平面角)ハ直角ナルヲ以テNPP_rハ一ノ球面直角三角形ヲナス次ニNP_0S子午圈上ニ於テPト同一緯度ナルP_lヲ定メ之トPヲ通ル大圓ヲ畫キ次ニP_0Pヲ含ム大圓ヲ畫ク然ルトキハP_0PP_rナル球面三角形ハ一ノ直角三角形(PP_rP_0ハ直角)ヲナス

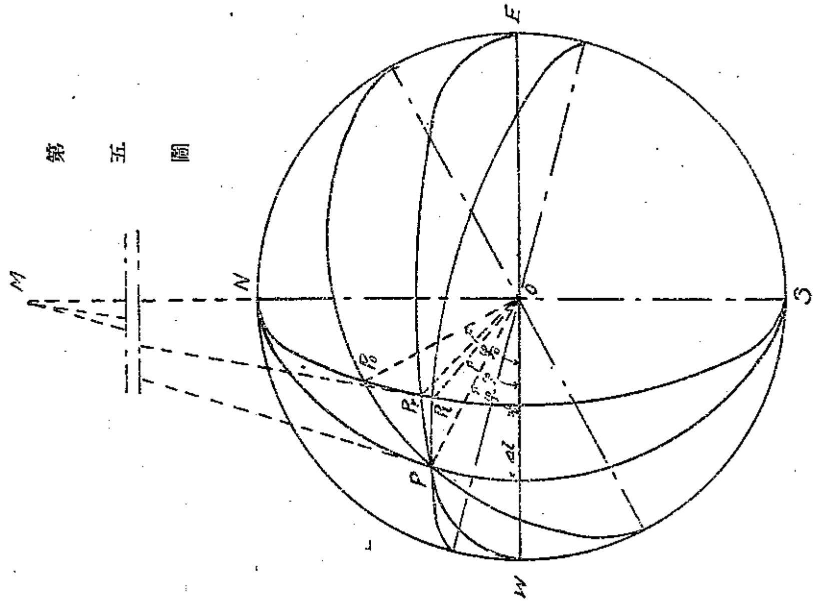


第　四　圖

今圖解ヲ明カナラシムル爲第五圖ヲNS軸ノ周リニ廻轉シテNP_0S大圓カ軸ト重リ合フ位置(第二圖ノ如ク)ニ持チ來リP_0ヲ通リWE軸ヲ含ム大圓ヲ考ヘ圓上ノ各點ヲOヨリノ投射線ニヨリ投影スルトキハ投影ハ總テ圓筒上ニ於テP_0ヲ通過シ軸ニ平行ナル$P_0P'_0$線上ニ横ルヘク同樣ニPP_rヲ通スル大圓ノ投影ハP_rP'直線上ニ存在スヘシ依テ球上ノ弧長P_rPニ等シクP_rP'ヲトレハP'點ハP點ノ圓筒上ニ於ケル射影ニシテ圓筒ヲ展開スレハ$P_0P'P_r$ハ一ノ平面直角三角形ヲ成シP_0P'ハ平面上ニ移セルP_0Pノ方向及長サヲ示ス依テ球面上ニ於ケルP_0P_r及

$\widehat{PP_r}$ ノ長サヲ知レハ直チニ平面上ニ三角形 $P_0P'P_r$ ヲ畫キ得ヘク以テ P_0 ニ對スル P' ノ位置ノ關係ヲ知ルコトヲ得ヘシ

第五圖



今 P_0 點ノ經度$=l_0$, P_0 點ノ緯度$=\varphi_0$
P 點ノ經度$=l$, P 點ノ緯度$=\varphi$ トシ

大圓 NP_0S 上ニ P ト同一緯度ノ點 P_l ヲトリ P_r ト P_l ノ緯度ノ差ヲ $d\varphi$ トス即 P_r ノ緯度 $\varphi_r=\varphi+d\varphi$ ト置ク且ツ $l-l_0=\Delta l$, $\varphi-\varphi_0=\Delta\varphi$ ト置キ球面三角形ノ邊ト角トノ間ノ關係ヨリ $d\varphi$ ヲ求ム次ニ球面三角ニ關スル一般公式ヲ揭ケテ以下ノ閱讀ニ便セントス

頂角(大圓ノ平面間ノ角)	A	B	C
中心角	a	b	c…(らでぃあん單位)
弧邊長	a_1	b_1	c_1

$$a=\frac{a_1}{r},\qquad b=\frac{b_1}{r},\qquad c=\frac{c_1}{r}$$

故ニ A B C ト a b c トノ間ノ關係ヲ知レハ A B C ト a_1 b_1 c_1 ノ關係モ明瞭トナル

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}\qquad \cdots(1)$$

(即平面三角ニ於テ A, B, C ヲ頂角 $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ ヲ三邊トスル場合ト同一ナリ)

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B\quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a\quad\cdots\cdots\cdots(2')$$

$$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b\quad\cdots\cdots\cdots(3')$$

$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c\quad\cdots\cdots\cdots(4')$$

而シテ半徑ヲ一トスレハ a_1 b_1 c_1 ハ全ク a b c ト同一トナル

今球面直角三角形 NPP_1 ニ於テ

$$c=90^\circ-\varphi,\qquad a=90^\circ-(\varphi+d\varphi),\qquad b=\widehat{PP_1}$$

式(4)ニ於テ C ハ直角ナルヲ以テ $\cos C=0$

$$\therefore\quad \cos(90^\circ-\varphi)=\cos(90^\circ-\overline{\varphi+d\varphi})\cos\widehat{PP_1}$$

$$\therefore\quad \sin\varphi=\cos\widehat{PP_1}\sin(\varphi+d\varphi)=\cos\widehat{PP_1}(\sin\varphi\cos d\varphi+\cos\varphi\sin d\varphi)$$

然ルニ $d\varphi$ ハ微小角ナルヲ以テ $\cos d\varphi\doteqdot 1$ ニシテ $\sin d\varphi\doteqdot d\varphi$ ナリ之レ $\cos x$, $\sin x$ ヲ展開スレハ

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\cdots\cdots(6)$$

$x=d\varphi$ ニシテ微小ナルヲ以テ $d\varphi^2$ ハ1ニ比シテ極メテ小ナリ故ニ之レ以下ヲ無視スレハ $\cos x=1$ トナル $\sin x$ ニ於テハ x^3 ハ x ニ比シ微小ナルヲ以テ之レ以下ヲ無視スレハ $\sin x=x$

$$\therefore\quad \sin\varphi\doteqdot\cos\widehat{PP_1}(\sin\varphi+d\varphi\cos\varphi)$$

然ルニPトP_rトノ經度ノ差ΔlハNP大圓トNP_r大圓トニ挾マル、赤道ノ一部ノ弧長ナリ今PP_lヲ通リ赤道面ニ平行ナル平面ヲ以テ球面ヲ切レハ同緯度ノ小圓ヲ得(此圓ノ半徑ハ球ノ半徑ヨリ小ナリ)此ノ同緯度圓ノPP_l間ノ弧長ヲ$\overset{\frown}{PP_l}$トスレハ$\overset{\frown}{PP_l}$ハPP_r大圓上ノ弧上$\overset{\frown}{PP_r}$ト極メテ近似セルモノナリ依ッテ$\overset{\frown}{PP_r} \doteqdot \overset{\frown}{PP_l}$然ルニ$PP_l$小圓ノ半徑ハ

$$P_l O' = r\cos\varphi$$

故ニPP_l同緯度內ノ周長ト赤道ニ於ケル圓周長トノ割合ハ$r : r\cos\varphi$ナリ故ニ

$$\overset{\frown}{PP_r} \doteqdot \overset{\frown}{PP_l} = \Delta l_l \frac{r\cos\varphi}{r} = \Delta l_l \cos\varphi$$

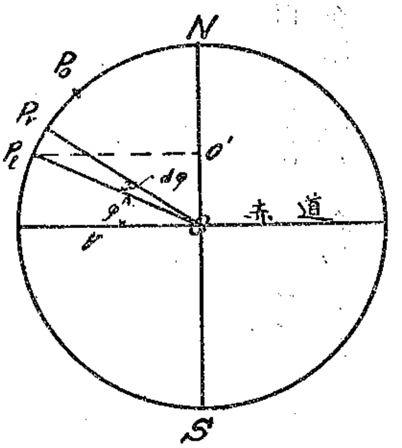
$$\therefore \quad \sin\varphi = \cos(\Delta l\cos\varphi)(\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi)$$

然ルニ$\Delta l\cos\varphi$ハP_0トPハ除リ遠カラサルヲ以テPトP_rトモ同樣ニシテPP_rノ距離ヲ地球ノ半徑ニテ除シタルΔlハ微小ナル値ナリ故ニ級數ニ於テ四次以上ヲ無視スレハ

$$\cos(\Delta l\cos\varphi) = 1 - \frac{\Delta l^2\cos^2\varphi}{2}$$

$$\therefore \quad \sin\varphi = \left(1 - \frac{\Delta l_l^2\cos^2\varphi}{2}\right)(\sin\varphi + d\varphi\cos\varphi)$$

$$\doteqdot \sin\varphi - \frac{\Delta l^2\cos^2\varphi\sin\varphi}{2} + d\varphi\cos\varphi - d\varphi\cos\varphi\frac{\Delta l^2\cos^2\varphi}{2}$$



第六圖

然ルニ $d\varphi\cos\varphi\times\frac{\Delta l^2\cos^2\varphi}{2}$ ハ他ノ項ニ比シテ一層小ナルヲ以テ之ヲ無視シ更ニ書キ換フレハ

$$\frac{\Delta l^2\cos^2\varphi\sin\varphi}{2}=d\varphi\cos\varphi$$

$$\therefore\quad d\varphi=\frac{\Delta l^2\sin\varphi\cos\varphi}{2}\quad\cdots\cdots(\mathrm{I})$$

Δl 及 φ ヲ知レルヲ以テ容易ニ $d\varphi$ ヲ算出シ得ヘシ依テ求ムル長 $\widehat{P_0P_r}$ ヲ x トセハ

$$x=(\varphi+d\varphi)-\varphi_0=(\varphi-\varphi_0)+d\varphi=\Delta\varphi+d\varphi$$

$$\therefore\quad x=\Delta\varphi+\frac{\Delta l^2\cos\varphi\sin\varphi}{2}\quad\cdots\cdots(\mathrm{II})$$

(II)式ニ於テハ Δl $\Delta\varphi$ 等ハ地球ノ半徑ヲ單位トセルらでぃあんニテ與ヘラレ従テ x ヲ同様單位ニテ與フルモノナリ

今 $\Delta\varphi$ Δl ヲ秒ニテ與ヘラレ x ヲ米ニテ求メントス先ツ $\Delta\varphi$ ナルらでぃあん單位ノ角ヲ秒單位ニテ現ハサントスルニらでぃあん單位ニテ１ナル角ヲ秒ニテ現ハストキ ρ'' ナリトスレハ

$$\rho''=\frac{180\times60\times60}{\pi}=\frac{180\times60\times60}{3.141592}$$

ナルヲ以テ

$$\Delta\varphi''=\Delta\varphi\times\rho''\qquad 同様ニ\qquad \Delta l''=\Delta l\times\rho''$$

今 r ヲ以テ米單位ノ地球ノ半徑トスレハ $\widehat{P_0P_r}$ ナル長サハ $x\times r$ ナリ之ヲ $r'_{(m)}$ ニテ示セハ

$$x_{(m)}=\left\{\frac{\Delta\varphi''}{\rho''}+\left(\frac{\Delta l''}{\rho''}\right)^2\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2}\right\}r_{(m)}\quad\cdots\cdots(\mathrm{III})$$

地球ハ眞ノ球ニアラスシテ Spheroid ナルヲ以テ r ハ緯度ニヨリテ異ナリ赤道ヨリ極ニ行クニ從ヒ小トナル

赤道ニ於ケル半徑 $r_1=6,377,397,155.^{m}$

極ニ於ケル半徑 $r_2=6,356,078,963.^{m}$

次ニ PP_r ノ長サヲ計算セントス

先ツ弧 PP_r ノ長サヲ y ト置キ球面直角三角形 NPP_r (第五圖)ヲ考フルニ

$$\widehat{PP_r}=b_1,\quad \angle N=B,\quad \widehat{NP}=c_1,\quad \angle P_r=C$$

トシテ球面三角公式(1)ヲ適用スレハ

$$\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}\quad\text{or}\quad\frac{\sin\widehat{PP_r}}{\sin N}=\frac{\sin\widehat{NP}}{\sin P_r}$$

然ルニ $P_r=\frac{\pi}{2}$ ナルヲ以テ $\sin P_r=1$

$$\sin\widehat{NP}=\sin(90^\circ-\varphi)$$

且ツ $\angle N$ ヲらでぃあんニテ表ハセハ Δl ナリ

$$\therefore\quad \sin\widehat{PP_r}=\sin(90^\circ-\varphi)\sin\Delta l=\cos\varphi\sin\Delta l$$

然ルニ Δl ハ小ナル角ナルヲ以テ級數ニテ二乘以上ヲ無視スレハ $\sin\Delta l\fallingdotseq\Delta l$

$$\therefore\quad \sin\widehat{PP_r}\fallingdotseq\Delta l\cos\varphi$$

然ルニ $\widehat{PP_r}=y$

$$\therefore\quad \sin y=y-\frac{y^3}{3!}+\frac{y^5}{5!}-\cdots\cdots\cdots\cdots$$

PP_r ノ距離ハ地球半徑ニ比スレハ小ナルヲ以テ y モ亦小ナル角ナリ故ニ $\sin y$ ヲ大體ノ値(之レヲ

y_1 ト置ク)ニテ表ハスニハ y^3 以上ヲ無視シテ

$$\sin y = y_1 = \Delta l \cos\varphi$$

同様ニ

$$\sin \Delta l \doteq \Delta l - \frac{\Delta l^3}{6}$$

今少シク精密ニ表ハセハ

$$\sin y = y - \frac{y^3}{6}$$

$$\therefore \quad y - \frac{y^3}{6} = \cos\varphi\left(\Delta l - \frac{\Delta l^3}{6}\right)$$

然ルニ $\frac{y^3}{6}$ ハ y ニ比シテ微小ナルヲ以テ此項中ノ y ニ大體値 y_1 ヲ代用シテ差支ナシ依テ

$$y = \Delta l \cos\varphi - \cos\varphi \frac{\Delta l^3}{6} + \frac{y_1^3}{6}$$

$$= \Delta l \cos\varphi + \frac{\Delta l^3 \cos^3\varphi}{6} - \frac{\Delta l^3 \cos\varphi}{6}$$

$$= \Delta l \cos\varphi - \frac{\Delta l^3 \cos\varphi}{6}(1-\cos^2\varphi)$$

$$\therefore \quad y = \Delta l \cos\varphi - \frac{\Delta l^3 \cos\varphi \sin^2\varphi}{6} \quad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

Δl φ ハ與ヘラレタルヲ以テ直チニ y ヲ算出シ得ヘシ但此式ハ y ヲらでぃあん單位ニテ表ハス

x ノ場合ト同様之ヲ米ニテ知ラントセハ

$$y_{(m)} = \left\{\frac{\Delta l''}{\rho''}\cos\varphi - \frac{1}{6}\left(\frac{\Delta l''}{\rho''}\right)^3 \cos\varphi \sin^2\varphi\right\} r \quad \cdots\cdots\cdots(\mathrm{V})$$

今(III)及(V)ヲ簡單ニセンガ爲メ

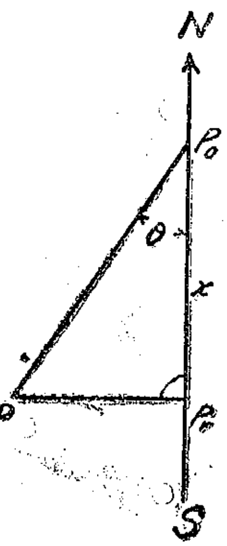
$$\frac{r}{\rho''}=A,\quad \frac{r}{2\rho''^2}=B,\quad \frac{r}{6\rho''^3}=C$$

ト置ケハ

$$x_{(m)}=\Delta\varphi'' A+\Delta l''^2\sin\varphi\cos\varphi B \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(III')}$$

$$y_{(m)}=\Delta l''\cos\varphi\,(A-\Delta l''^2\sin^2\varphi\, C) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(V')}$$

斯クシテx及yヲ算出シ得即平面上ニ於テ$\angle P_0P_1P$（第七圖）ハ直角ニシテ長P_0P_1及P_1Pヲ知レルヲ以テ之ニヨリ直チニP點ノ位置ヲ決定シ得ヘク從ッテ距離P_0P及P_0P直線ノ方向θヲモ算定シ得ヘシ



第七圖

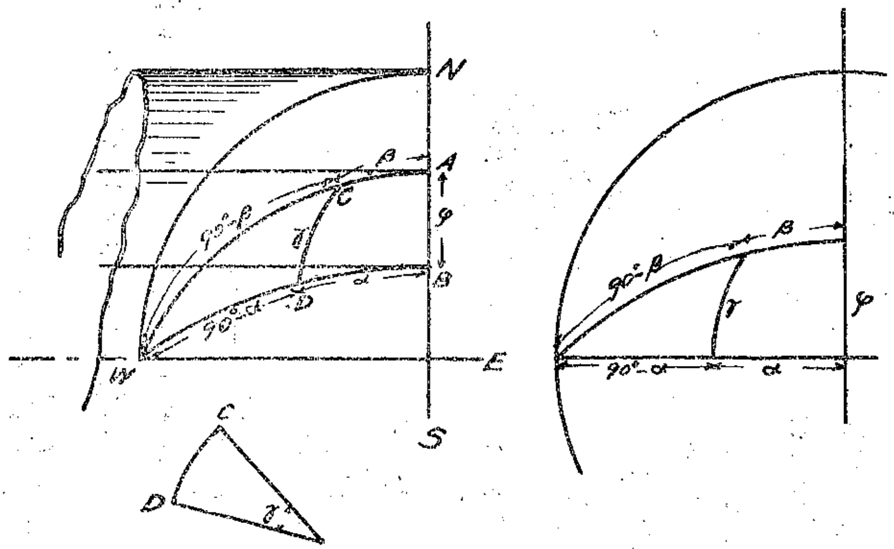
第二節　距離ノ誤差

前節ニ於テx及yヲ計算スル方法ヲ述ヘシカ是等公式ノ與フル長サト實際ノ長トノ差即公式ノ誤差ハ如何ナル程度ノモノタルヤヲ論セントス今球面上ニ任意ノ弧γヲ取リ之レヲ南北軸ヲ含ム大圓NSニ接スル圓筒面上ニ移シタルトキ其圓筒上ノ長サトγトノ差ヲ研究セントス

今NS大圓ノ平面ニ直角ナル軸WEヲ考フレハ是即圓筒ノ軸ナリ該軸ト弧γノ各端ヲ通スル二大圓ヲ考ヘ此二平面間ノ角ヲφヲ以テ表ハシBD, AC, CD等ノ弧ニ對スル中心角ヲ夫々α β γトスレハ弧WC及WDノ中心角ハ$90°-\beta$及$90°-\alpha$ナリ而シテ$\angle W$ハWCA, WDBナル二大圓平面ノナス角ニシテφニ等シ今球面三角WCDニ於テ$a=\gamma$, $b=90°-\alpha$, $c=90°-\beta$, $A=\angle W=\varphi$ト定メテ公式(2)ヲ適用スレハ

$$\cos\gamma=\cos(90°-\alpha)\cos(90°-\beta)+\sin(90°-\alpha)\sin(90°-\beta)\cos\varphi=\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\cos\varphi$$

然ルニ問題ハ地球表面上ノ狹キ範圍ニ限ルヲ以テ$\alpha\ \beta\ \varphi$ナル弧ハ地球半徑ニ比シ微小ニシテ之



第八圖

等ノ sin, cos ヲ(5)(6)ノ級數ヲ以テ表ハストキハ$\alpha\ \beta$ノ高乘ノ項ハ1又ハ一乘ノ項ニ比シテ極メテ小ナリ故ニ是等ノ內五乘以上ノモノヲ無視スルトキハ次ノ式ヲ以テ現ハスコトヲ得ヘシ即

$$\sin\alpha \doteqdot \alpha-\frac{\alpha^3}{6} \qquad \sin\beta \doteqdot \beta-\frac{\beta^3}{6}$$

$$\cos\alpha \doteqdot 1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{24} \qquad \cos\beta \doteqdot 1-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^4}{24}$$

故ニ

$$\cos\gamma=\left(\alpha-\frac{\alpha^3}{6}\right)\left(\beta-\frac{\beta^3}{6}\right)+\left(1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^4}{24}\right)\left(1-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\beta^4}{24}\right)\cos\varphi$$

$$=\left(\alpha\beta-\frac{\alpha\beta^3}{6}-\frac{\alpha^3\beta}{6}\right)+\left(1-\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\beta^2}{2}+\frac{\alpha^4}{24}+\frac{\alpha^2\beta^2}{4}+\frac{\beta^4}{24}\right)\cos\varphi$$

(∵ α及βヲ一次ノ少量ト見做シ五次以上ノ微小量ヲ無視セリ)

$$=\alpha\beta\left(1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{6}\right)+\left\{1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}+\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{24}+\frac{\alpha^2\beta^2}{6}\right\}\left(1-\frac{\varphi^2}{2}+\frac{\varphi^4}{24}\right)$$

$$=\alpha\beta\left(1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{6}\right)+\left(1-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}+\frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{24}+\frac{\alpha^2\beta^2}{6}-\frac{\varphi^2}{2}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{4}\varphi^2+\frac{\varphi^4}{24}\right\}$$

($\because$ α, β, 及 φ ヲ一次ノ微小量ト見做シ五次以上ノ微小量ヲ無視セリ)

次ニ　$\alpha^2+\beta^2=k$　ト置キ

$$\cos\gamma=\alpha\beta\left(1-\frac{k}{6}\right)+1-\frac{k}{2}+\frac{k^2}{24}+\frac{\alpha^2\beta^2}{6}-\frac{\varphi^2}{2}+\frac{k\varphi^2}{4}+\frac{\varphi^4}{24}=\cos\gamma=1-\frac{\gamma^2}{2}+\frac{\gamma^4}{24}$$

$$\therefore\ \gamma^2-\frac{\gamma^4}{12}=k+\varphi^2-2\,\alpha\beta+\frac{\alpha\beta k}{3}-\frac{k^2}{12}-\frac{\alpha^2\beta^2}{3}-\frac{k\varphi^2}{2}-\frac{\varphi^4}{12}\quad\cdots\cdots\cdots\quad(7)$$

今四次以上ノ微小量ヲ無視シテ γ ト α β 及 φ トノ關係ヲ求ムレハ

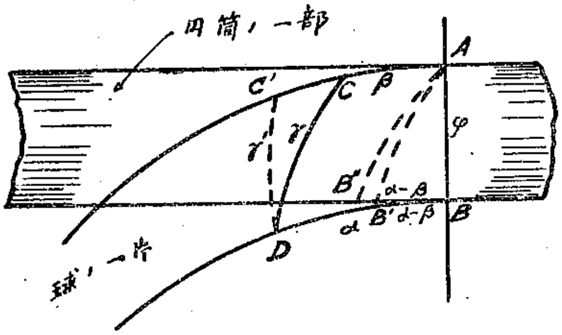
$$\gamma^2=k+\varphi^2-2\,\alpha\beta$$

之レニ(5)式左邊ノ小ナル項 $\frac{\gamma^4}{12}$ ニ代用シテ

$$\gamma^2=k+\varphi^2-2\,\alpha\beta+\frac{1}{12}(k+\varphi^2-2\,\alpha\beta)^2+\frac{\alpha\beta k}{2}-\frac{k^2}{12}-\frac{\alpha^2\beta^2}{3}-\frac{k\varphi^2}{2}-\frac{\varphi^4}{12}$$

$$=k+\varphi^2-2\,\alpha\beta-\frac{k\varphi^2}{3}-\frac{\alpha\beta\varphi^2}{3}=\varphi^2+(\alpha-\beta)^2-\frac{(\alpha^2+\beta^2)\varphi^2}{3}-\frac{\alpha\beta\varphi^2}{3}$$

$$\therefore\ \varphi^2+(\alpha-\beta)^2-\gamma^2=\frac{\varphi^2}{3}(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)\quad\cdots\cdots\cdots\quad(\mathrm{VI})$$



第九圖

球片上ニ A ヲ過リテ γ 弧ニ平行ニ弧 AB' ヲ考ヘ(第九圖)其ノ圓筒上ノ射影ヲ AB'' トスレハ其長ハ弧 CD 即 γ ノ圓筒上ノ射影ノ長サニ等シ然ルニ $\widehat{AB}''^2=\varphi^2+(\alpha-\beta)^2$ ナルヲ以テ (γ ノ射影)$^2=\varphi^2+(\alpha-\beta)^2$ ニシテ $\varphi^2+(\alpha-\beta)^2-\gamma^2$ ハ即弧 γ ヲ平面ニ引直シタルモノトノ長ノ二乘ト

弧γノ二乘ノ隔差ニシテ其ノ値ハ(VI)式ニ依テ算出スルヲ得ヘシ今隔差ノ程度ヲ知ランカ爲メニ一例トシテ$\alpha=\beta$ナル場合弧ハγ'ニシテ射影ノ長ハφニ等シ

$\alpha=\beta$ナラハ

$$\varphi^2-\gamma'^2=\alpha^2\varphi^2$$

$$\therefore\quad \gamma'^2=\varphi^2(1-\alpha^2)$$

$$\therefore\quad \gamma'\doteqdot\varphi\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

（∵ $(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\alpha^2-\frac{\alpha^4}{8}-\cdots\cdots\cdots\cdots$ αハらでぃあんニシテ1ヨリ遙カニ小ナルヲ以テα^4…………等ハ1ニ比シ極メテ小ナリ之ヲ無視ス）

$$\therefore\quad \frac{\gamma'}{\varphi}=1-\frac{\alpha^2}{2}\qquad\therefore\quad \varphi-\gamma'=\frac{\alpha^2\varphi}{2}$$ （φハγ'ノ射影長ナリ）

今φ γ α^2等ハ地球ノ半徑ヲ單位トシタル弧ヲ表ハセリ今α'' φ''ヲ秒單位ニテ與ヘラルヽトキハ

$$\varphi-\gamma'=\frac{\alpha''^2\varphi''}{2}(\sin 1'')^3$$

上式ノ左邊ハ矢張リらでぃあんヲ單位トセルヲ以テ之ヲ長サニテ表ハスニハ地球ノ半徑rヲ乘スレハ可ナリ今φノ長サヲs、γ'ノ長ヲγ'_1トセハ

$$s-\gamma'_1=\frac{\alpha''^2\varphi''}{2}(\sin 1'')^3 r$$

今 $\alpha''=1,800''\ (=30')$, $\varphi''=1,800''\ (=30')$ トスレハ

$$\log(s-\gamma'_1)=\log\overline{1,800}^3+\log(\sin 1'')^3+\log r-\log 2$$
$$=9.7658175+(14.0567247-30)+6.8031671-0.3010300=0.3246793$$

(單位ヲ米トス)

∴ $s-\gamma_1=2.11^m$

若シγナル弧カ原點ヲ通スルトキ即γ弧ノ一端ヲ原點トスル場合ニハ今平面上ニ於テ地球ノ中心角30'ヲ挾ム弧ノ長 $\frac{30'\pi}{180\times60}\times r$ ヲ二邊トスル直角三角形ノ斜邊ノ長 ヲ求ムレハ(第十圖)

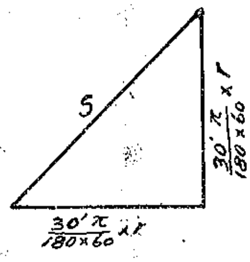
$$s=78,438.545^m$$

次ニ球面上ニ於テ $\varphi=30'$ $\alpha=30'$ ナル弧ヲ二邊トスル直角球面三角ノ斜邊弧γヲ求ムルニ

$$\gamma=42'\,25''.565=2,545''.565$$

γノ弧ノ長 $(\gamma_1)=78,438.055^m$

∴ $s-\gamma_1=0.490^m$



第十圖

$\alpha=1^\circ,\ \varphi=1^\circ$ ナルトキ

$s=156,877.068^m$ $\gamma_1=156,873.177^m$

∴ $s-\gamma=3.899^m$

故ニ $\alpha=30'$ 即十五里四方位ノ範圍ニ於テハ誤差ハ一尺五六寸ニシテ方三十里位ノ範圍ニ於テハ十三四尺ナリ是等ハ普通ノ三角測量ニ於テ生スル誤差ニ比シテ重要ナル程度ノモノニアラス誤差ノ程度ハ測量ノ範圍大ナルニ從ヒ著シク大トナリ今 $\varphi=\alpha$ トスレハ $s-\gamma=\frac{\alpha^3}{2}$ 即誤差ハ α ノ三乘ニ比例シテ增大ス

今γ弧カ原點Aヲ過キル場合ノ誤差ヲ(VI)式ヨリ求ムレハ

$$\varphi^2+(\alpha-\beta)^2-\gamma^2=\frac{\varphi^2}{3}(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta)$$ ニ於テ $\beta=0$

ナリ依テ

$$\varphi^2+\alpha^2-\gamma^2=\frac{\varphi^2}{3}\alpha^2$$

$$\therefore\quad(s+\gamma)(s-\gamma)=\frac{\varphi^2}{3}\alpha^2$$

$$s-\gamma=\frac{\varphi^2\alpha^2}{3(s+\gamma)}$$

然ルニsノ誤差ヲ見出ス目的ナルヲ以テ其略値ヲ知レハ足ルヘク依テ$s+\gamma\fallingdotseq 2s$ト置キ

$$s-\gamma=\frac{\alpha^2\varphi^2}{6s}$$

若シ$\beta=0,\ \varphi=\alpha$ナルトキハ

$$\varphi^2+\alpha^2=2\alpha^2=s^2$$

$$\therefore\quad 2\alpha^2-\gamma^2=\frac{\alpha^4}{3}$$

即 $$s^2-\gamma^2=\frac{\alpha^4}{3}$$

$$\therefore\quad \gamma^2=2\alpha^2-\frac{\alpha^4}{3}=2\alpha^2\left(1-\frac{\alpha^2}{6}\right)$$

$$\gamma=s\left(1-\frac{\alpha^2}{12}\right)\quad\left(\because\ \sqrt{1-\frac{\alpha^2}{6}}=\left(1-\frac{\alpha^2}{6}\right)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{\alpha^2}{2\times6}-\cdots\cdots\right)$$

又ハ

$$\therefore\quad s-\gamma=s\frac{\alpha^2}{12}=\sqrt{2\alpha^2}\,\frac{\alpha^2}{12}=\frac{\alpha^3}{\sqrt{72}}$$

何レニシテモ誤差ハ大體測量區域ノ直徑ノ三乘ニ比例シテ增大シ普通河川測量ニ於テ取扱フ範圍ニテハ其誤差微小ナルモノニシテ式(III)(V)ノ結果ハ特ニ補正ヲ用ヒスシテ之ヲ適用シテ支障ナ

シ若シ測量區域數十里ニ亘リ誤差ノ大ナルニ於テハ式(VI)ニ依リテ之ヲ補正スレハ可ナリ

第三節　方向ノ誤差

前節ニ於テハ圓壔投影法ニ依レル二點間ノ距離ノ誤差ヲ論セリ然ルニ地球面ノ二點ヲ連結スル直線ヲ投影スルトキハ投影ト實直線トノ間ニハ方向ニ多少ノ誤差ヲ生スヘシ今其ノ誤差ノ程度ヲ求ムルニ先ツP及P_l(Pト同一緯度ノ點)ニ於テ各點ノ經線ニ切線PM及P_lM(第五圖第十一圖)ヲ作ルトキハ兩線ハ地球ノ南北軸ノ延長上ニ於テ交叉スヘシ此ノ點ヲMトシ挾角ヲμトスレハ

$$\sin\frac{\mu}{2}=\frac{PP_l}{2}\times\frac{1}{T}$$

$$=\frac{M}{2}\times\frac{1}{r\cot\varphi}$$

$$\frac{\mu''}{2}=\frac{M}{2}\cdot\frac{\rho''}{r\cot\varphi}$$

$$\mu''=\frac{M\rho''}{r\cot\varphi}$$

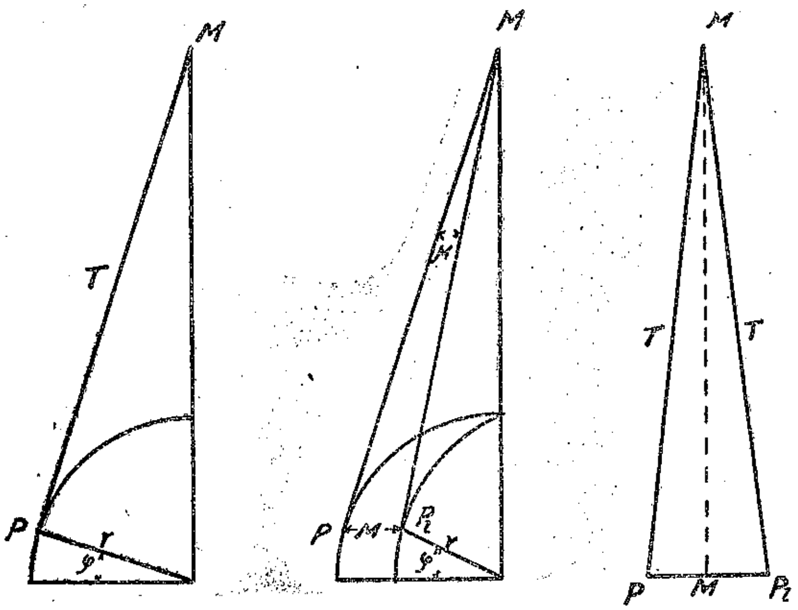
$$M=\Delta l\, r\cos\varphi$$

$$\therefore\quad \mu=\frac{\Delta l\, r\cos\varphi}{r\cot\varphi}=\Delta l\cos\varphi\tan\varphi=\Delta l\sin\varphi$$

(μヲ Meridian Convergency ト云フ)

即μノ値ハ極メテ小ナリ從ツテ球上ノ方位ト射影上ノ方位トノ差ハ微少ニシテ論スルニ足ラス

第四節　楕圓體投影法



第十一圖

上述ノ射影法ハ地球ヲ球ト見做シタルモノナリシカ其眞形ハ一ノ楕圓體ナリト雖近似的ニ南北ニ短キ回轉楕圓體 (Spheroid of revolution) ナリト見ルコトヲ得 Bessel ノ算定ニヨレハ其大サハ子午線面ニ於テ

$$a=(\text{長徑})=6,377,397{\cdot}15^{\mathrm{m}}$$

$$b=(\text{短徑})=6,356,078{\cdot}96^{\mathrm{m}}$$

$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=0{\cdot}00667437$$

從テ子午線及之ニ直角ニ交ル切口ハ赤道ヲ除クノ外凡テ楕圓形ニシテ子午線楕圓ノ或一點Pニ於ケル曲率半徑ヲR_1トスレハ

$$R_1=\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)^3}}$$

次ニ眞子午線ニ直角ナル楕圓斷面ニ於ケルP點ノ曲率半徑ヲR_2トスレハ

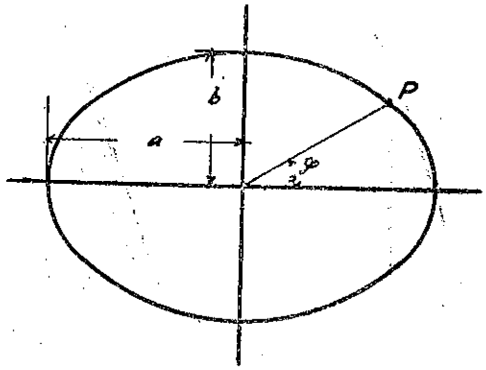
$$R_2=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

球面トシテ得タル投影ノ公式ヲ廻轉楕圓體ニ變スルニハ球半徑ノ代リニ曲率半徑ヲ用ウレハ可ナリ上述(II)及(IV)式即

$$\left.\begin{aligned} x &= \Delta\varphi + \frac{\Delta l^2 \sin\varphi\cos\varphi}{2} \\ y &= \Delta l\cos\varphi - \frac{\Delta l^3 \sin^2\varphi\cos\varphi}{6} \end{aligned}\right\}$$

ニ於テ$\Delta\varphi$ハ子午線上ノ弧Δlハ之ニ直角ヲナス切口ノ弧ナルヲ以テ夫々R_1 R_2ヲ乘シテx yヲ米ニテ表ハストキハ

$$\left.\begin{aligned} x\,(\text{in m.}) &= \Delta\varphi''\frac{R_1}{\rho''} + \Delta l''^2 \sin\varphi\cos\varphi\frac{R_2}{2\rho''^2} \\ &= \frac{R_1}{\rho''}\left\{\Delta\varphi'' + \frac{\Delta l''^2\sin\varphi\cos\varphi R_2}{2\rho'' R_1}\right\} \\ y\,(\text{in m.}) &= \Delta l''\cos\varphi\frac{R_2}{\rho''} + \frac{\Delta l''^3\cos\varphi\sin^2\varphi R_2}{6\rho''^3} \\ &= \Delta l''\cos\varphi\frac{R_2}{\rho''}\left\{1 + \frac{\Delta l''^2\sin^2\varphi}{6\rho''^2}\right\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\text{VII}$$



第二十圖

子午線斷面

次ニ上式ヲ簡單ニスル爲 $A = \frac{R_1}{\rho''}$, $B = \frac{R_2}{2\rho'' R_1}$, $C = \frac{R_2}{\rho''}$ ト置ケハ

$$\left.\begin{aligned} x\,(\text{in m.}) &= A\left\{\Delta\varphi'' + B\,\Delta l''^2\sin\varphi\cos\varphi\right\} \\ y\,(\text{in m.}) &= C\cos\varphi\,\Delta l''\left\{1 + \frac{\Delta l''^2\sin^2\varphi}{6\rho''^2}\right\} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\text{VIII}$$

ノ形トナリA B及Cハφヲ與フレハ算出シ得ルヲ以テ豫メ種々ノφニ對シテ其値ヲ算出シ之レ

ヲ表示シテ計算ニ便ス、

第一表

φ	$\mathrm{Log}\frac{R_2}{R_1}$	d	$\mathrm{Log}\frac{R_1}{\rho''}$	d	$\mathrm{Log}\frac{R_2}{\rho''}$	d
30°	0.002 1831	—	1.488 3978	—	1.490 5810	—
31°	1388	443	4644	666	6031	221
32°	0936	452	5321	677	6257	226
33°	0477	459	6010	689	6487	230
34	0010	467	6710	700	6720	233
35°	0.001 9536	474	7420	710	6957	237
36°	9057	479	8139	719	7196	239
37°	8573	484	8866	727	7439	243
38°	8083	490	9601	735	7684	245
39°	7589	494	1.489 0342	741	7931	247
40°	7091	498	1089	747	8180	249
41°	6590	501	1841	752	8430	250
42°	6086	504	2597	756	8682	252
43°	5581	505	3354	757	8935	253
44°	5074	507	4114	760	9188	253
45°	4566	508	4876	762	9442	254

第五節　計算ノ實例

上記ノ射影計算法ハ多位ノ數字ヲ取扱ヒ煩雜ナル計算ヲ要スルヲ以テ動モスレハ誤差ヲ生シ易

キヲ以テ普通次ノ如キ表式ノ算法ヲ用フ

經緯度ヨリ縱橫距ノ計算例

				演算式
	求點 $P\ (l, \varphi)$	香　所　下	平　原	
	原點 $P_0\ (l_0, \varphi_0)$	岡　山	岡　山	
Δl ノ計算	l	131° 27′ 21.″5088	131° 25′ 15.″118	$\Delta l = l - l_0$
	l_0	131 24 37.9294	131 24 37.9294	
	Δl	+ 2 43.5794	+ 37.1824	
	$\Delta l''$	+ 163.5794	+ 37.1824	
x ノ計算	$\log \Delta l''^2$	4.42745722	3.14067476	$d\varphi = \dfrac{\Delta l''^2 \sin\varphi \cos\varphi\, R_2}{2\rho''\, R_1}$
	$\log \sin \varphi$	9.72280750	9.72276598	
	$\log \cos \varphi$	9.92896552	9.92898159	
	$\log \dfrac{R_2}{R_1}$	0.00209884	0.00209899	
	$\log \dfrac{1}{2\rho''}$	4.38454487	4.38454487	
	$\log d\varphi$	8.46587395	7.17906619	
	φ	31° 53′ 4.″7942	31° 52′ 52.″5296	$\varphi_r = \varphi + d\varphi$
	$d\varphi$	0.0 2	0.0015	
	φ_r	1° 4.″8231	31° 52′ 52.″5311	
	φ_0	31° 56′ 50.″4958	3 56′ 50.″4958	$x = \Delta\varphi + d\varphi$ $= \varphi - \varphi_0 + d\varphi$ $= \varphi_r - \varphi_0$
	$\varphi_r - \varphi_0$	−3 45.6724	−3 57.9647	
	$(\varphi_r - \varphi_0)''$	− 225.6724	− 237.9647	

	$\log -(\varphi_r-\varphi_0)''$	2.35347843	2.37651255	x (in m.) $=\frac{R_1}{\rho''}(\varphi_r-\varphi_0)''$
	$\log \frac{R_1}{\rho''}$	1.48852645	1.48852633	
	$\log(-x)$	3.84200488	3.86503888	
	x in m.	$-$ 6950.3203	$-$ 7328.9014	
	x in ken	$-$ 3822.6762	$-$ 4030.8958	
$\frac{\varphi_r+\varphi_0}{2}$	$\varphi_r+\varphi_0$	108′ 115.″3192	108′ 103.″0269	
	$\frac{1}{2}(\varphi_r+\varphi_0)$	31° 54′ 57.″6596	31° 54′ 51.″5135	
yノ計算	$\log \Delta l$	2.21372861	1.57033718	$a=\Delta l''\cos\varphi\,\frac{R_2}{\rho''}$
	$\log\cos\varphi$	9.92896552	9.92898159	
	$\log \frac{R_2}{\rho''}$	1.49062312	1.49062305	
	$\log a$	3.63331725	2.98994202	
	$\log a$	3.63331725	2.98994202	$b=\Delta l''\cos\frac{R_2}{\rho''}\cdot\frac{\Delta l''^2\sin^2\varphi}{6\rho''^2}$ $=a\frac{\Delta l''^2\sin^2\varphi}{6\rho''^2}$
	$\log \Delta l''^2$	4.42745722	3.14067476	
	$\log\sin^2\varphi$	9.44561500	9.44553186	
	$\log\frac{1}{6\rho''^2}$	8.59299843	8.59299843	
	$\log(-b)$	6.09938790	4.16914717	
	a	+ 4298.5035	+ 977.1067	y (in m.) $=a+b$
	b	$-$ 0.0001	$-$ 0.0000	
	y in m.	+ 4298.5034	+ 977.1067	
	y in ken	+ 2364.1769	+ 537.4087	

縦横距ヨリ方位及距離ノ計算例

			算式
	P_2 求點	番所下	
	P_1 與點	岡山	
ΔX ΔY ノ計算	Y_2	+ 4298.5035	$\Delta Y = Y_2 - Y_1$
	Y_1	+ 977.1067	
	ΔY	+ 3321.3968	
	X_2	− 6950.3203	$\Delta X = X_2 - X_1$
	X_1	− 7328.9014	
	ΔX	+ 378.5811	
方位 θ	$\log \Delta Y$	3.52132078	$\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\Delta Y}{\Delta X}$
	$\log \Delta X$	2.57815897	$T = \theta + 180^\circ$
	$\log \operatorname{tg}\theta$	0.94316181	
	θ	83° 29′ 50.″4495	
	T	263° 29′ 50.″4495	
距離	$\log \Delta Y$	3.52132078	$s = \dfrac{\Delta Y}{\sin\theta}$
	$\log \sin\theta$	9.99719701	
	$\log s$	3.52412377	
	$\log \Delta x$	2.57815897	$s = \dfrac{\Delta X}{\cos\theta}$
	$\log \cos\theta$	9.05403520	
	$\log s$	3.52412377	

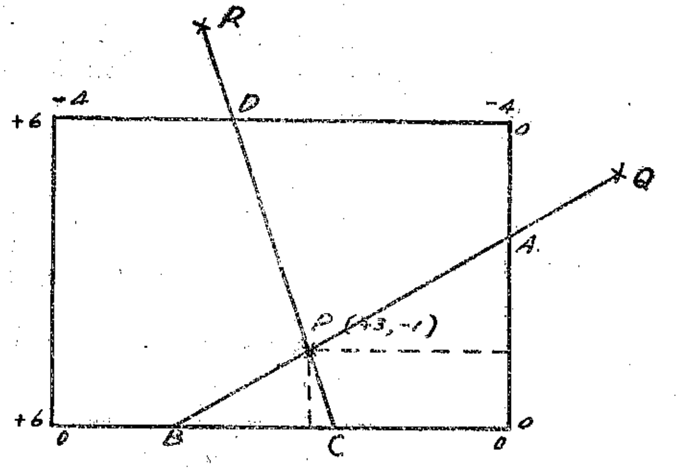
$$\left.\begin{array}{lr} \log s \text{ (in m.)} & 3.52412377 \\ \log 0.55 \cdots\cdots & 9.74036270 \\ \log s \text{ (in ken)} & 3.26448674 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} s \text{ (in ken)} \\ = s \text{ (in m.)} \times 0.55 \cdots \end{array}$$

s ……

第六節　實地應用ニ就テ

原點ヲ撰フニハ必スシモ地上ノ實在點タルヲ要セス想像上ノ一點ニテモ可ナリ例ヘハ東經百四十度北緯三十八度ノ假想點ヲ用ウルモ可ナリ而シテ原點ハ成ルヘク測量スル範圍ニ於テ其中央ニ取リタル方便利ナリ

凡テノ點ハ此ノ原點ヨリ追フテ定ムルヲ以テ平面測量ハ切圖法ヲ用ウルヲ便ナリトス即其原點ヨリ東西南北ノ方向ニ一定ノ長サヲトリテ各切圖ノ範圍ヲ定ム一千二百分一位ノ圖ニ於テハ東西六町南北四町位カ最モ適當ナリ而シテ是等ニ其四隅ノ座標ヲ記入シ置キナルヘク其切圖ノ中ニ入ルヘキ實際上ノ點PヲQP,RPノ如キ二箇以上ノ視線ノ交リニ依リテ其座標$(+3,-1)$ヲ求メ之ヲ圖中ニ記入シ併セテA B C Dノ座標ヲ計算シテ是亦輪廓上ニ記入シ置クモノトス但Pハ全然切圖ノ外ニアリテモA B C D等ヲ記入シ置クトキハ夫ニテ足ルヘシト雖何レカ一點ヲ圖中ニ有スル方種々ノ便宜アリ萬一三角點不足ニテ一切圖中ニ一點Pヲ置ク能ハスシテ新シキ點ヲ



第十三圖

假ニ設置スル要アルトキハ其設置セル點ト三角點トノ間ニ三角ヲ組ミテ新シキ點ノ座標ヲ定ムレハ可ナリ此際其誤差ノ分配ニハ最小自乘法ヲ用フルノ必要ナク極メテ簡單ニ誤差ヲ等分シテ割振レハ可ナリ其他ノ計算ニモ算術平均値位ヲ用ウレハ充分ナリ斯クノ如キ切圖ノ測量ハ陸地測量部ノ極メテ精密ニ誤差ヲ部分化(Localige)シアル三角點ニヨルヲ以テ廣大ナル面積ニ對シテモ誤差ノ累加スルコトナク極メテ便利ナリ又已ニ設置シアル三角點ニ準據スルヲ以テ河川ノ上下流ニ對シテ各部別々ニ同時ニ測量ニ從事シ短時日間ニ完成スルコトヲ得ヘシ又小ナル圖版一枚ヲ現場ニ持チ行キ外業ノ片手間ニ製圖スルトキハ現場ヨリ持チ歸ル際ニハ已ニ一通リノ鉛筆製圖ヲモ完成セシメ得ヘシ斯ノ如クシテ得タル切圖ヲ繼キ合ストキハ隣接圖ハ良ク聯絡スルモノナリ而シテ此ノ千二百分一圖ヨリ適宜ニ縮圖シテ任意ノ地圖ヲ作ルコトヲ得但注意スヘキハ輪廓ヲ精確ニ記入シ必ス縮尺ヲ添ヘ置クヘキコトナリ之レ他日圖紙ニ伸縮アル際ニ備フル爲ナリ（完）