拔萃　土木學會誌　第一卷第一號　大正四年二月

或ル不靜定應力 (Statically indeterminate stress) ノ簡易解法

(By G. A. Maney. Engineering News. Vol. 72. No. 17—Oct. 22, 1914.)

彈性體ニ關シ次ノ二ツノ重要ナル性質ヲ利用スル時ハ從來最小働ノ原理 (Principle of least work) 及彈曲線 (Elastic curve) ニ關スル微分方程式等ニ依リ微積分ヲ用ヒテ證明セル諸問題ハ極メテ簡單ニ解ク事ヲ得可シ而シテ後ニ述フル不靜定應力ノ問題ノ如キハ最小働ノ原理ニ依ル解法ノ僅々十分ノ一ノ勞力ヲ以テ解キ得可シ

今桁ノ或ル斷面ニ於ケル彎曲率 (Bending moment) ヲ M. 彈率 (Modulus of elasticity) ヲ E. 惰率 (Moment of inertia) ヲ I トシ $\frac{M}{EI}$ 曲線ヲ作ル時ハ次ノ二ツノ性質ヲ有ス

第一　此曲線下ノ或ル二點間ニ於ケル面積ハ此二點ニ於ケル彈曲線ノ傾斜ノ變化ヲ示ス

第二　此面積ノ前記二點ノ内ノ一點ノ廻ハリノ靜力率 (Statical monent) ハ他ノ點ニ於ケル彈曲線ヘノ切線ヨリ始メノ點ノ垂度 (Deflection) ヲ示ス

此性質ノ證明

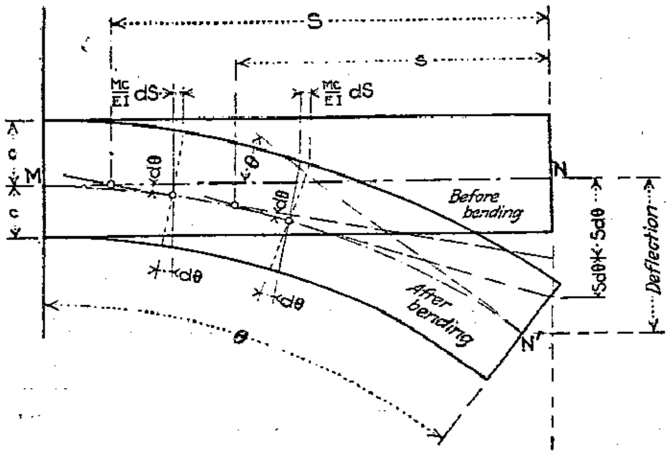
(一)　c　桁ノ中立軸 (Neutral axis) ヨリ緣維 (Extreme fibre) 迄テノ距離

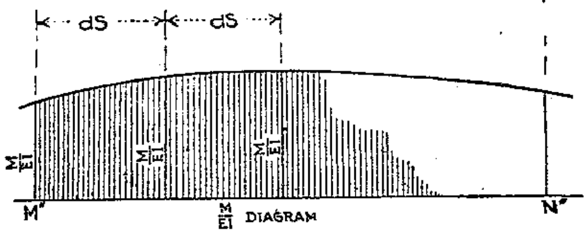
dS　中立軸ニ沿フテノ微距 (Element of length)

$d\theta$　彎曲率ノ爲メニ dS 間ノ傾斜ノ增加

然レハ此桁ノ緣維應力强度 (Extreme fibre stress) ハ $\dfrac{Mc}{I}$ ニシテ dS 間ニ於ケル變形ハ $\dfrac{Mc}{EI}dS$ ナリ而シテ第一圖ヲ見ルニ dS 間ニ於ケル傾斜ノ變化 $d\theta$ ハ此變形ヲ c ニテ除セル商ナルヲ以テ

$$d\theta=\frac{M}{EI}dS$$





第一圖　彎曲前及後ノ桁ノ一部

第二圖　力率圖又ハ $\dfrac{M}{EI}$ 曲線圖

然ルニ第二圖ヲ一見スレハ $\dfrac{M}{EI}dS$ ハ $\dfrac{M}{EI}$ 曲線ノ下ノ dS 間ノ面積タルヲ以テ之等ノ小面積ノ或ル二點間ノ和ハ其ノ二點ニ於ケル彈曲線ノ傾斜ノ變化ヲ示スコト明ナリ

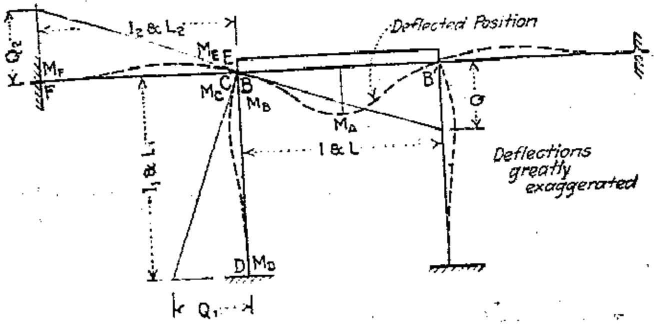
(二)次ニ第一圖ニ於テ MN ナル M 點ニ於ケル彈曲線ヘノ切線ヨリ N 點ノ垂度ヲ求メントス

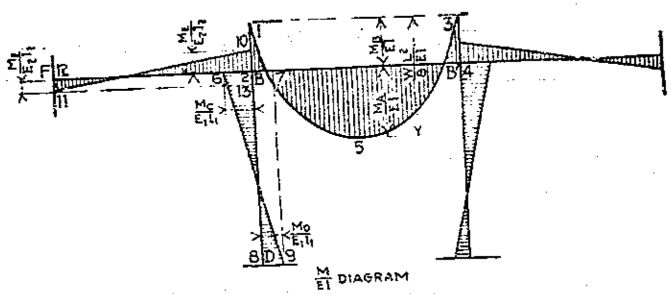
先ツ彎曲率ヨリ生スル中立軸ノ變形ハ極メテ僅ナルモノニシテ彎曲後ノ中立軸カ彎曲前ノ中立軸上ニ於ケル投射 (Projection) ハ彎曲前ノ中立軸ト同長ナルモノト假定ス此ノ假定ハ彈曲線ノ微分方程式ヲ求ムル際ニモ恒ニ用フルモノナリ

今第一圖ノ S ヲ N 點ヨリ第一微距 dS ノ中點迄テノ距離トス然レハ此 dS 間ニ於ケル彈曲線ノ傾斜ノ變化 $d\theta$ ノ爲メニ生スル N 點ノ垂度ハ $Sd\theta$ ナリ然ルニ此 $d\theta$ ハ前述ノ如ク第二

圖ノ dS 間ノ $\frac{M}{EI}$ 曲線下ノ面積ニ等シキヲ以テ $Sd\theta$ ハ N'' ノ廻ハリニ於ケル此ノ小ナル面積ノ靜力率ニ外ナラス從ツテ N 點ノ全垂度ハ $\frac{M}{EI}$ 曲線ノ $M''N''$ 間全面積ノ N'' 點ノ廻ハリニ於ケル靜力率ニ等シ

此ノ二ツノ性質ハ古來力學ニテ永ク知ラレタルモノニシテ唯今日迄テ不靜定應力ノ問題ノ解法ニ適用スルヲ等閑ニ附シタルニ過キサルナリ





第三圖　一階棧
第四圖　力率圖

一階棧ノ解法

第三圖ノ如キ鐵筋混凝土一階棧 (One story bent) ニテ中央徑間ニ滿載等布荷重 (Full uniform load) ノ場合ヲ求メントス

此際未知彎曲率ハ $M_AM_BM_CM_DM_EM_F$ ノ六個ニシテ之等ノ內靜力學ヨリハ次ノ二ツノ方程式ヲ得ルノミ

$$M_B=M_E+M_C$$

$$M_A+M_B=\frac{1}{8}wL^2$$

殘餘ノ四個ノ方程式ハ前述ノ $\frac{M}{EI}$ 曲線利用ニ依リテ容易ニ出ツ之レニハ B 點ノ剛性 (Rigidity) ノ條件即 B 點ニ於ケル二切線ハ恒ニ互ニ直角ヲナスト云フコトヨリ次ノ二方程式ヲ得

$$\frac{Q}{L}=\frac{Q_2}{L_2} \text{ 及ヒ } \frac{Q_1}{L_1}=\frac{Q_2}{L_2}$$

茲ニ Q Q_1 及ヒ Q_2 ハ夫々 B' D 及ヒ F 點ノ前記切線ヨリノ垂度トス垂度 Q ハ第四圖ニテノ B' 點ニ於ケル面 1—5—3—4—2 ノ靜力率即面 1—5—3 ノ靜力率ヨリ面 1—2—4—3 ノ靜力率ヲ減セルモノナリ故ニ

$$Q=\frac{\frac{1}{8}wL^2\times\frac{2}{3}L\times\frac{1}{2}L-M_B\times\frac{1}{2}L\times L}{EI}$$

垂度 Q_2 ハ同様ニ F 點ニ於ケル面 12—2—10—11 ノ靜力率即面 11—13—10 ノ靜力率ヨリ面 12—11—13—2 ノ靜力率ヲ減セルモノナリ故ニ

$$Q_2=\frac{(M_E+M_F)\frac{1}{2}L_2\times\frac{2}{3}L_2-M_F\times L_2\times\frac{1}{2}L_2}{E_2I_2}$$

然ルニ $\frac{Q}{L}=\frac{Q_2}{L_2}$ ナルヲ以テ

$$\frac{\frac{wL^3}{3\times 8}-\frac{M_BL}{2}}{EI}=\frac{\frac{(M_E+M_F)L_2}{3}-\frac{M_FL_2}{2}}{E_2I_2}$$

又 $\frac{Q_1}{L_1}=\frac{Q_2}{L_2}$ ナルヲ以テ

$$\frac{\frac{(M_C+M_D)L_1}{3}-\frac{M_DL_1}{2}}{E_1I_1}=\frac{\frac{(M\ +M_F)L_2}{3}-\frac{M_FL_2}{2}}{E_2I_2}$$

B 點ハ不變トセルヲ以テ D 點ニ於テ彈曲線ヘノ切線ヨリ B 點ノ垂度ハ零ナリ故ニ面 8—2—6—9 ノ B 點ニ於ケル靜力率即面 6—9—7 ノ靜力率ヨリ面 2—7—9—8 ノ靜力率ヲ減セルモノハ零ナル

可シ故ニ

$$\frac{(M_C+M_D)\left(\frac{L_1}{2}\right)\left(\frac{L_1}{3}\right)-M_D L_1\left(\frac{L_1}{2}\right)}{E_1 I_1}=0$$

或ハ

$$M_C=2M_D$$

F 點ニ於ケル切線ニ對シテモ同様ナルヲ以テ

$$M_E=2M_F$$

此ノ二式ハ彈曲線ノ式ヲ單ニ積分シテ得ラルヽモノト同一ナリ

今彈率 E ハ總テ同一ノモノト假定スル時ハ上ニ得タル式ハ

$$M_B=M_C+M_E \quad \cdots \quad (1)$$

$$M_A+M_B=\frac{wL^2}{8} \quad \cdots \quad (2)$$

$$\left(\frac{wL^2}{4}-3M_B\right)\frac{L}{I}=\left(2M_E-M_F\right)\frac{L_2}{I_2}$$

或ハ

$$\frac{wL^2}{4}-3M_B=K_1(2M_E-M_F) \quad \cdots \quad (3)$$

但シ $K_1=\frac{L_2 I}{L I_2}$ トス

$$2M_C-M_D=K_2(2M_E-M_F) \quad \cdots \quad (4)$$

但シ $K_2=\frac{L_2 I_1}{L_1 I_2}$

$$M_C=2M_D \quad \cdots \quad (5)$$

(5) ト (6) ヲ (4) ニ入レテ

$$M_E=2M_F \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6)$$

(a) ヲ (1) ニ入レテ

$$M_C=K_2M_E \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (a)$$

(b) ト (6) ヲ (3) ニ入レテ

$$M_B=(1+K_2)M_E \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (b)$$

$$\frac{wL^2}{4}-3(1+K_2)M_E=\frac{3K_1}{2}M_E$$

故ニ

$$M_E=\frac{wL^2}{12}\left(\frac{2}{K_1+2K_2+2}\right)=\frac{wL^2}{12}\left(\frac{2LL_1I_2}{L_1L_2I+2LL_2I_1+2LL_1I_2}\right)$$

故ニ

$$M_E=C\frac{wL^2}{12} \qquad 但\ C=\frac{2LL_1I_2}{L_1L_2I+2LL_2I_1+2LL_1I_2}$$

(6) ヨリ

$$M_F=\frac{C}{2}\left(\frac{wL^2}{12}\right)=\frac{wL^2}{12}\left(\frac{LL_1I_2}{L_1L_2I+2LL_2I_1+2LL_1I_2}\right)$$

(a) ヨリ

$$M_C=CK_2\left(\frac{wL^2}{12}\right)=\frac{wL^2}{12}\left(\frac{2LL_2I_1}{L_1L_2I+2LL_2I_1+2LL_1I_2}\right)$$

(5) ヨリ

$$M_D=\frac{CK_2}{2}\left(\frac{wL^2}{12}\right)=\frac{wL^2}{12}\left(\frac{LL_2I_1}{L_1L_2I+2LL_2I_1+2LL_1I_2}\right)$$

(1) ヨリ

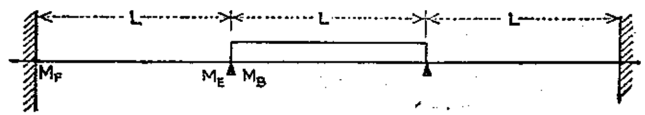
$$M_B=C(1+K_2)\frac{wL^2}{12}=\frac{wL^2}{12}\left(\frac{2LL_1I_2+2LL_2I_1}{L_1L_2I+2LL_2I_1+2LL_1I_2}\right)$$

(2) ヨリ

$$M_A=\frac{wL^2}{8}-M_B$$

之等ノ式ノ極限ノ場合ヲ檢査シ見ンニ先ツ中間徑間カ緊端 (Fixed end) タル條件ニハ四個ノ場合アリ即 I_1 若クハ I_2 カ I ニ比シテ非常ニ大ニナルカ又ハ L_1 若クハ L_2 カ L ニ比シテ非常ニ小ナルカニ有リ此場合ニ M_B ノ値ヲ檢スルニ何レモ $\frac{wL^2}{12}$ ニ接近スルヲ見ル之レ緊端桁ノ兩端力率ニ外ナラス之レニ反シ I カ他ニ比シテ極メテ大ナルカ若クハ L カ他ニ比シテ極小ニナレハ M_B ノ値ハ從テ零ニ接近ス之レ即單桁 (Simple beam) ノ場合ナリ

若シ $I_1=0$　$I=I_2$　$L=L_2$ トナレハ第五圖ニ示スカ如ク一樣ナル斷面ヲ有スル連桁カ兩端ハ緊端ヲ有シ中間ハ三等分點ニテ二個ノ支點ニ單ニ支持セラルヽ場合トナリ M_B M_E ハ共ニ $\frac{wL^2}{18}$　M_F ハ $\frac{wL^2}{36}$ トナリテ上式ノ眞ナルヲ證ス



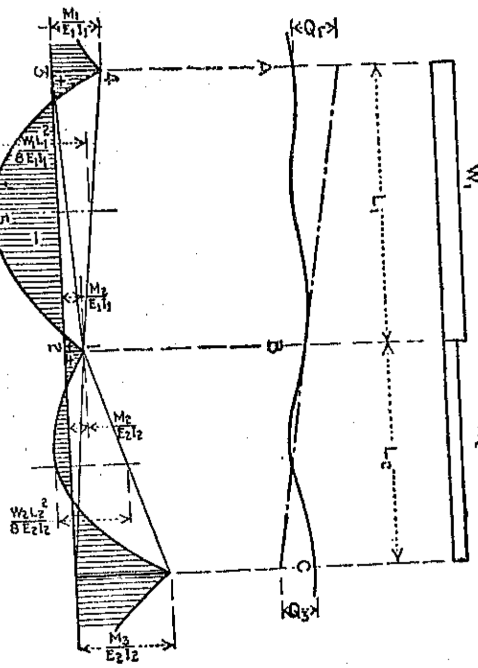
第五圖　一階梯ノ極限ノ場合 ($I_1=0$)

三力率ノ定理 (Theorem of three moments)

前述ノ力率面積ノ方法 (Moment area method) ニ依レハ三力率定理ノ證明ノ如キ實ニ易々タルモノナリ總テ連桁ハ n 個ノ支持點ヲ有スル時ハ之レ等ノ諸點ニ n 個ノ未知力率アリ此ノ內三力率定理ニ依リテ $(n-2)$ 方程式ヲ得殘餘ノ二個ハ兩端支點ノ條件ヨリ定マルモノトス

今三力率定理ヲ證センニ先ツ一般ニ二個ノ隣接セル徑間ニテ徑間モ等布荷重モ惰率モ彈率モ共ニ異ルモノトシ夫々左徑間ニテハ $L_1 w_1 I_1 E_1$ 右徑間ニテハ $L_2 w_2 I_2 E_2$ トス第六圖ニ於テ連桁ナルヲ以テ B 點ニテハ恒ニ共通切線ヲ有ス Q_1 及 Q_3 ヲ B ニ於ケル共通切線ヨリノ垂度トス然ハ Q_1 ハ A 點ニ於ケル $\frac{M}{EI}$ 面 3—4—5—1—2 ノ靜力率ヲ以テ測ラル即同點ニ於ケル面 4—5—1 ノ靜力率ヨリ三角形 1—2—3 及三角形 1—3—4 ノ靜力率ヲ減セルモノニ等シ即

$$Q_1=\frac{w_1L_1^2}{8E_1I_1}\left(\frac{2L_1}{3}\right)\left(\frac{L_1}{2}\right)-\frac{M_1}{E_1I_1}\left(\frac{L_1}{2}\right)\left(\frac{L_1}{3}\right)-\frac{M_2}{E_1I_1}\left(\frac{L_1}{2}\right)\left(\frac{2L_1}{3}\right)$$



第六圖　連桁ノ一部及力率圖

同様ニ

$$Q_3=\frac{w_2L_2^2}{8E_2I_2}\left(\frac{2L_2}{3}\right)\left(\frac{L_2}{2}\right)-\frac{M_3}{E_2I_2}\left(\frac{L_2}{2}\right)\left(\frac{L_2}{3}\right)-\frac{M_2}{E_2I_2}\left(\frac{L_2}{2}\right)\left(\frac{2L_2}{3}\right)$$

$\frac{Q_1}{L_1}=-\frac{Q_3}{L_2}$ ナルヲ以テ之レニ入レ同時ニ各支持點ニ於ケル力率ノ符號ヲ變化スル時ハ直チニ次ノ三力率ノ定理ヲ得

$$\frac{w_1L_1^3}{24E_1I_1}+\frac{w_2L_2^3}{24E_2I_2}+\frac{M_1L_1}{6E_1I_1}+\frac{M_2}{3}\left(\frac{L_1}{E_1I_1}+\frac{L_2}{E_2I_2}\right)+\frac{M_3L_2}{6E_2I_2}=0$$

若シ $E_1=E_2$　$I_1=I_2$ トナレハ次ノ普通ノ式ヲ得

$$M_1L_1+2M_2(L_1+L_2)+M_3L_2=-\left(\frac{w_1L_1^3}{4}+\frac{w_2L_2^3}{4}\right)$$

（完）

かいざーうゐるへるむ運河ノ擴張工事

(Z. d. Bauverwaltung, 16. Mai 1914)

該運河ハ其ノ東端きーる軍港ニ終ルヲ以テ俗ニきーる運河ト稱セラル十九世紀末商船通航ノ利