論説及報告

自記檢潮機の井戸内に於ける水面の運動

工學士　金森鍬太郎君

緒論

普通の自記撿潮機に在りては其撿潮機の記錄する所のものは其井戸内に於ける水面の運動なることは言を俟たず、井戸は導管に依りて外海と連絡するを以て外海々面の運動に伴ない井戸内の水面も亦運動することを明かにして即ち井戸内の水面の運動は一種の强迫運動なり、從て導管内に於ける水流に對する抵抗其他の源因によりて海面の運動と井戸内水面の夫れとは全く同一ならず、然らば其間に如何なる差異あるやと云ふに此問題を完全に解決することは困難なりと雖も著者考究の結果を次に論述して江湖の是正を仰がんとす、

基本の方程式

先づ次の如く定む

u 海面の高さ　z 井戸内の水面の高さ　v 導管内に於ける水の速度

V 井戸内に於ける同上　d 導管の直徑　l 同上の長さ

a 同上の横斷面積　A 井戸の同上　f 導管内に於ける摩擦係數

g 重力

海面が井戸内の水面より高き時は水は海の方より井戸内に流入すべし、此時次の關係あり

$$u-z=\frac{v^2}{2g}+\frac{1}{2}\frac{v^2}{2g}+f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\cdots\cdots\cdots(1)$$

右の內 $\frac{v^2}{2g}$ は速度水頭、$\frac{1}{2}\frac{v^2}{2g}$ は導管の入口に於ける損失水頭、$f\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$ は導管內に於ける摩擦の爲めに起る損失水頭にして井戸內に於ける損失水頭を省略す

(1)を變化すれば次の如くなる

$$u-z=\frac{v^2}{2g}\left(1.5+f\frac{l}{d}\right)$$

然るに　$av=\mathrm{AV}$

なるを以て

$$n-z=\frac{\mathrm{V}^2}{2g}\cdot\frac{\mathrm{A}^2}{a^2}\left(1.5+f\frac{l}{d}\right)\cdots\cdots\cdots(2)$$

故に

$$\mathrm{V}=\sqrt{\frac{2g}{\frac{\mathrm{A}^2}{a^2}1.5+f\frac{l}{d}}}\sqrt{n-z}\cdots\cdots\cdots(3)$$

今

$$\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{\mathrm{A}}{a}\right)^2\left(1.5+f\frac{l}{d}\right)}}=2m\cdots\cdots\cdots(4)$$

と置けば(3)は次の如くなる

$$\mathrm{V}=\frac{dz}{dt}=2m\sqrt{n-z}\cdots\cdots\cdots(5)$$

次に井戸內の水面が海面より高き時は水は井戸內より海方に流出すべし、此場合にも關係は全く前

と同一なるを以て次の如くなる

$$-\frac{dz}{dt}=2m\sqrt{z-u} \quad \cdots\cdots(6)$$

(5)式はzの増しつゝある場合にして(6)式は其減じつゝある場合なり、

海面の運動を正弦曲線と假定する時

海面の運動には潮汐、波浪に起因するもの等種々ありて其運動も亦甚だ複雑なりと雖も今其運動を週期性の振動と假定する時はuの曲線は次の如きシニュソイドにて表はすことを得べし、

$$u=H\sin\frac{2\pi t}{T} \quad \cdots\cdots(7)$$

右の内Hは平均海面の上下に於けるuの最大値即ち振幅にしてTは其週期なり、

(7)式を(5)式に入るゝ時は次の如し、

$$\frac{dz}{dt}=2m\sqrt{H\sin\frac{2\pi t}{T}-z} \quad \cdots\cdots(8)$$

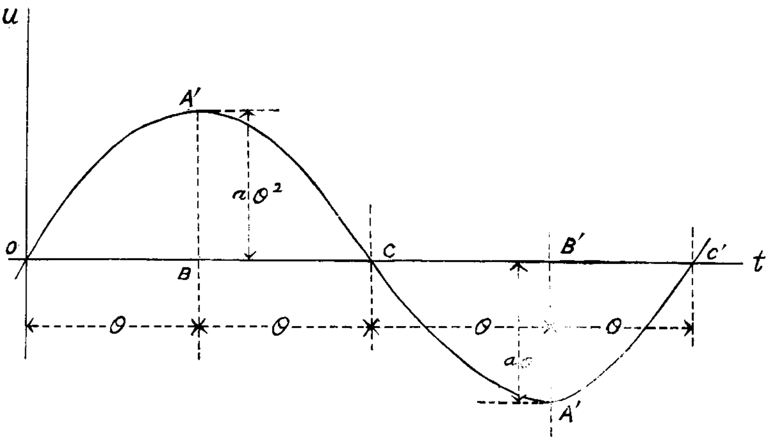
此微分方程式を解く時はzとtとの關係即ち　の曲線を得べきを以て井戸内の水面の運動は玆に明白となるべき理なり、然れども此方程式を解くことは數學上困難なり、

パラボラと假定する時

次に de Saint-Germain 氏の着想に從ひ海面の振動をパラボラと假定すべし (Flamant-Hydranlique, Paris, 1909, p.491)

第一圖に於てOBCB′C′は平均海面にして海面はOACA′C′の如くに振動するものとし之れを各同じ形狀を有し反對の方向を有するパラボラと假定し次の如き關係あるものとす、

第一圖



$$AB=A'B'=a\theta^2=H$$

$$OC=CC'=2\theta=T$$

一般にはＡＢとＡ'Ｂ'とは同じからず、從てＯＢとＢＣとは亦不同なるものと假定するも以下の理論は同一なりと雖も今簡便の爲めに以上の如く置く

ＯＶＣのパラボラに對してはＯ點を座標の基點とす、然る時は其方程式は次の如し

$$u=a\theta^2-a(\theta-t)^2 \quad \cdots\cdots(9)$$

即ち

$$t=0;\ u=0,$$
$$t=\theta;\ u=a\theta^2,$$
$$t=2\theta;\ u=0,$$

次に

$$\frac{du}{dt}=2a(\theta-t) \quad \cdots\cdots(10)$$

此式に於て

$0<t<\theta;\ \frac{du}{dt}>0$ 即ちuは昇りつゝあり

$\theta<t<2\theta;\ \frac{du}{dt}<0$ 即ちuは降りつゝあり

今(9)にて代表するuとzとを組合すに當り其關係に依り

二段に分つ

第一段　uがzより高き時　此時には水は海方より井戸内に流入す、故に(5)式を採る、(9)式を(5)式に入るれば

$$\frac{dz}{dt}=2m\sqrt{a\theta^2-a(\theta-t)^2-z} \quad\cdots\cdots(11)$$

此微分方程式は解くことを得即ち之を解けば次の形狀の方程式となる

$$\left[\sqrt{u-z}+\alpha(\theta-t)\right]^{\alpha}\left[\sqrt{u-z}-\beta(\theta-t)\right]^{\beta}=A_1 \quad\cdots\cdots(12)$$

右の内α及びβは常數にしてA_1は任意常數なり、(12)が(11)の解なることの證明は(12)を微分すれば(11)となることに依りて明かなり、(12)を微分すれば次の如し

$$\left[\sqrt{u-z}-\beta(\theta-t)\right]^{\beta}\alpha\left[\sqrt{u-z}+\alpha(\theta-t)\right]^{\alpha-1}\left[\frac{1}{2\sqrt{u-z}}d(u-z)-\alpha dt\right],$$

$$+\left[\sqrt{u-z}+\alpha(\theta-t)\right]^{\alpha}\beta\left[\sqrt{u-z}-\beta(\theta-t)\right]^{\beta-1}\left[\frac{1}{2\sqrt{u-z}}d(u-z)+\beta dt\right]=0$$

而して

$$\left[\sqrt{u-z}-\beta(\theta-t)\right]^{\beta}\left[\sqrt{u-z}+\alpha(\theta-t)\right]^{\alpha-1}=\frac{A_1}{\sqrt{u-z}+\alpha(\theta-t)}$$

$$\left[\sqrt{u-z}+\alpha(\theta-t)\right]^{\alpha}\left[\sqrt{u-z}-\beta(\theta-t)\right]^{\beta-1}=\frac{A_1}{\sqrt{u-z}-\beta(\theta-t)}$$

なるを以て之を前式に入れ簡單にすれば次の如くなる

$$2a(\theta-t)-\frac{dz}{dt}-2(\alpha-\beta)\sqrt{u-z}+2\alpha\beta(\theta-t)=0 \quad\cdots\cdots(13)$$

故に若し

$$\alpha\beta=-a;\ \beta-\alpha=m$$

ならば(13)は(11)に等しくなるを以て(12)は(11)の解なり、

從て此場合には

$$\alpha=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2-4a}-m\right);\quad \beta=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2-4a}+m\right) \quad\cdots\cdots(14)$$

となる、即ちαは負數なり

第二段　zがuより高き時此場合には水は井戸内より海方に流出す、故に(6)式を採る、(6)式の微分方程式を解く時は前と同樣に次の如くなる

$$\left[\sqrt{z-u}+\alpha'(\theta-t)\right]^{\alpha'}\left[\sqrt{z-u}-\beta'(\theta-t)\right]^{\beta'}=A_2 \quad\cdots\cdots(15)$$

此場合にはα'及びβ'は次の如し

$$\alpha'\beta'=+a;\ \beta'-\alpha'=m$$

$$\alpha'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2+4a}-m\right);\quad \beta'=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2+4a}+m\right) \quad\cdots\cdots(16)$$

次にＣＡ′Ｃ′のパラボラに對してはＣを基點とし其方程式を次の如くす

$$u=a(\theta-t)^2-a\theta^2 \quad\cdots\cdots(17)$$

即ち　$t=0;\ u=0$

$t=\theta;\ u=-a\theta^2;$

$t=2\theta;\ u=0$

又

$$\frac{du}{dt}=-2a(\theta-t) \quad\cdots\cdots(18)$$

此式より

$\theta<t<\theta_1;\ \dfrac{du}{dt}<0$　故に u は降りつゝあり

$\theta_1<t<2\theta_1;\ \dfrac{du}{dt}<0$　即ち u は昇りつゝあり

此場合に於ても u と z との關係により二段に分つ

第三段　z が u よりも高き時

(6) 式の微分方程式を解く時は前と同樣に次の如くなる

$$\left[\sqrt{z-u}+\alpha''(\theta-t)\right]^{\alpha''}\left[\sqrt{z-u}-\beta''(\theta-t)\right]^{\beta''}=A_3 \quad \cdots\cdots(19)$$

此內 α'' 及び β'' は次の如し

$$\alpha''\beta''=-a;\quad \beta''-\alpha''=m$$

$$\alpha''=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2-4a}-m\right);\quad \beta''=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2-4a}+\mathrm{m}\right) \quad \cdots\cdots(20)$$

第四段　u は z より高き時

(5) 式の方程式を解く時は次の如し

$$\left[\sqrt{u-z}+\alpha'''(\theta-t)\right]^{\alpha'''}\left[\sqrt{u-z}-\beta'''(\theta-t)\right]^{\beta'''}=A_4 \quad \cdots\cdots(21)$$

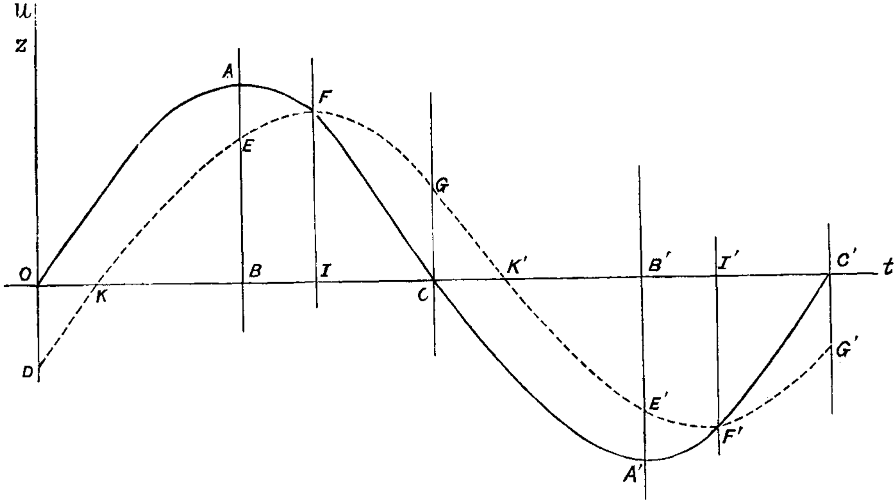
此式中の α''' 及び β''' は次の如し

$$\alpha'''\beta'''=a;\quad \beta'''-\alpha'''=m$$

$$\alpha'''=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2+4a}-m\right);\quad \beta'''=\frac{1}{2}\left(\sqrt{m^2+4a}+m\right) \quad \cdots\cdots(22)$$

以上の(12)(15)(19)及び(12)は z と t との關係を示すものにして即ち z の曲線を顯はすものなり、其內の任意常數 A_1 乃至 A_4 は $t=0$ なる時に於ける z の大さによりて決定せらるゝものとす

第二圖



第二圖に於て實線にて示したるOAFCA′F′C′をuの曲線とし點線にて示したるDKEFGK′E′F′G′をzの曲線とする時は後者の內DKEFの部分は第一段に於ける(12)の方程式の示す曲線にしてFGの部分は第二段に於ける(15)の方程式GK′E′F′の部分は第三段に於ける(19)E′G′の部分は第四段に於ける(21)の示す曲線ならざるべからず從て次の關係を生ずべし

(1) $OD=-Z_0$とすれば$t=0$の時には$u=0$なるが故に(12)より

$$(\sqrt{Z_0}+\alpha\theta)^\alpha(\sqrt{Z_0}-\beta\theta)^\beta=A_1 \qquad (23)$$

(2) $EB=Z_\theta$とすれば$t=\theta$の時には$u=\alpha\theta^2$なるを以て(12)より

$$(\alpha\theta^2-Z_\theta)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}=A_1$$

$$\therefore Z_\theta=\alpha\theta^2-A_1^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \qquad (24)$$

(3) AEは從て次の如し

$$\overline{AE}=A_1^{\frac{2}{\alpha+\beta}} \qquad (25)$$

(4) $OK=t_0$とすれば$t=o$の時$z=0$なるが故に(12)より

$$\left[\sqrt{\alpha\theta^2-\alpha(\theta-t)^2}+\alpha(\theta-t_0)\right]^\alpha\left[\sqrt{\alpha\theta^2-\alpha(\theta-t)^2}-\beta(\theta-t_0)\right]^\beta=A_1 \qquad (26)$$

（5）$OI=t_1$ とすれば $t=t_1$ の時には $u-z=0$ なるを以て(12)より

$$[\alpha(\theta-t_1)]^{\alpha}[-\beta(\theta-t_1)]^{\beta}=A_1$$

$$\therefore t_1=\theta-\left(\frac{A_1}{\alpha^{\alpha}(-\beta)^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\quad\cdots\cdots(27)$$

又(15)より

$$[\alpha'(\theta-t_1)]^{\alpha'}[-\beta'(\theta-t_1)]^{\beta'}=A_2$$

$$\therefore t_1=\theta-\left(\frac{A_2}{\alpha'^{\alpha'}(-\beta')^{\beta'}}\right)^{\frac{1}{\alpha'+\beta'}}\quad\cdots\cdots(28)$$

（6）$BI=t_1-\theta=-\left(\frac{A_1}{\alpha^{\alpha}(-\beta)^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}=-\left(\frac{A_2}{\alpha^{\alpha'}(-\beta')^{\beta'}}\right)^{\frac{1}{\alpha'+\beta'}}\quad\cdots\cdots(29)$

（7）$GC=Z_{20}$ とすれば $t=2\theta$ の時は $u=0$ なるを以て(15)より

$$[\sqrt{Z_{20}}-\alpha'\theta]^{\alpha'}[\sqrt{Z_{20}}+\beta'\theta]^{\beta'}=A_2\quad\cdots\cdots(30)$$

又(19)より$(t=0)$

$$(\sqrt{Z_{20}}+\alpha''\theta)^{\alpha''}(\sqrt{Z_{20}}-\beta''\theta)^{\beta''}=A_3\quad\cdots\cdots(31)$$

（8）$B'E'=-Z'_0$ とすれば(19)より

$$Z'_0=a\theta^2-A_3^{\frac{2}{\alpha''+\beta''}}\quad\cdots\cdots(32)$$

（9）$E'A'$ は從て次の如し

$$\overline{E'A'}=A_3^{\frac{2}{\alpha''+\beta''}}\quad\cdots\cdots(33)$$

（10）$Ok'=t'_0$ とすれば(19)より

$$[\sqrt{a(\theta-t'_0)^2-a\theta^2}+\alpha''(\theta-t'_0)]^{\alpha''}[\sqrt{a(\theta-t_0')^2-a\theta^2}-\beta''(\theta-t_0')]^{\beta''}=A_3 \quad \cdots\cdots (34)$$

(11) $CI'=t_1'$とすれば(19)より

$$t_1'=\theta-\left(\frac{A_3}{\alpha''\alpha''\ -\beta'')^{\beta''}}\right)^{\frac{1}{\alpha''+\beta''}} \quad \cdots\cdots (35)$$

又(22)より

$$t_1'=\theta-\left(\frac{A_4}{\alpha'''\alpha'''(-\beta''')^{\beta'''}}\right)^{\frac{1}{\alpha'''+\beta'''}} \quad \cdots\cdots (36)$$

(12) $$B'I'=t_1'-\theta=-\left(\frac{A_3}{\alpha''\alpha''(-\beta'')^{\beta''}}\right)^{\frac{1}{\alpha''+\beta''}}=-\left(\frac{A_4}{\alpha'''\alpha'''(-\beta''')^{\beta'''}}\right)^{\frac{1}{\alpha'''+\beta'''}} \quad \cdots\cdots (37)$$

(13) $C'G'=-Z'_0$とすれば(22)より

$$[\sqrt{Z'_0}-\alpha'''\theta]^{\alpha'''}[\sqrt{Z'_0}+\beta'''\theta]^{\beta'''}=A_4 \quad \cdots\cdots (38)$$

又(12)より$(t=0)$

$$[\sqrt{Z'_0}+\alpha\theta]^{\alpha}[\sqrt{Z'_0}-\beta\theta]^{\beta}=A_1 \quad \cdots\cdots (39)$$

次に(14)及び(20)(16)及び(22)より

$$\alpha=\alpha'';\quad \beta=\beta'';\quad \alpha'=\alpha''';\quad \beta'=\beta''' \quad \cdots\cdots (40)$$

又DKEFGのOAFCに於ける關係はGK'E'F'G'のCA'F'C'に於ける關係に同一なりと假定する時は次の關係を得

$$A_1=A_3;\quad A_2=A_4 \quad \cdots\cdots (41)$$

$$OD=GC=C'G';\quad Z_0=Z_{20}=Z'_0 \quad \cdots\cdots (42)$$

$$EB=B'E';\quad Z_0=Z'_0;\quad AE=E'A' \quad\cdots\cdots(43)$$

$$FI=I'F' \quad\cdots\cdots(44)$$

$$OK=CK';\quad t_0=t_0' \quad\cdots\cdots(45)$$

$$OI=CI';\quad t_1=t_1' \quad\cdots\cdots(46)$$

$$KK'=II'=2\theta \quad\cdots\cdots(47)$$

以上の如く種々の關係あるを以て此內の若干を用ひA_1 A_2等を決定することを得べしと雖も之を實際に適用するに當り誠に不都合なる結果を生ずるに至る、其次第を述べん

先づ(12)の曲線の性質を見るに大體次の如し

(一)此曲線はバラボラの內部即ち凹面の側にのみ存在することを得何となれば若し然らずして假りに外部にも存在すとせば此場合にはzはuよりも大となり從て(12)は虛數となるべきを以てなり

(二)此曲線はバラボラと唯一點に於てのみ交錯することを得之れは(27)及び(28)より明かなり

(三)zの最大値は此曲線とバラボラとの交錯點に相當す(12)を微分すれば(11)となる、(11)を零に等しくすれば$z-u=0$を得之れは交錯の條件なり

(四)zの上りつゝある場合の曲線

此場合には$\dfrac{dz}{dt}=2m\sqrt{u-z}$に於て兩側共正號ならざるべからず、即ち(12)は此假定に依り得たる方程式にして第二圖及び第三圖に於けるKEFの如き曲線なり、此場合には其曲線とバラボラとの交錯點Fは A の右方にありて$OI=t_1$はθより大なり、極端の場合にはFはAと一致しt_1はθ等しくなり從てA$_1$は零となる

(五) zの下りつゝある場合の曲線

$\sqrt{u}=z$は正負兩號を有するを以て若し其負號を取ればzの下りつゝある場合にして本編の假定とは一致せざるも曲線は成立することを得此場合の曲線は第三圖に於けるF′EK′の如きものにして前項の曲線とは屈曲の方向を全く反對にす、OI′はθより小にしてF′はAの左方にあり、極端の場合にはF′はAと一致し從てA_1は零となる

(六) (12)の曲線系は互に相交錯することなし

(12)に於てA_1の數値を異にするに從ひ一の曲線系を得べし、而して此系統中の曲線は何れも相互に交錯すること能はず

(七) $A_1=0$なる場合

(12)に於てA_1が零なる時はαは負數なるを以て(12)は結局次の如くならざるべからず

$$\sqrt{u-z}-\beta(\theta-t)=0 \quad\cdots\cdots(48)$$

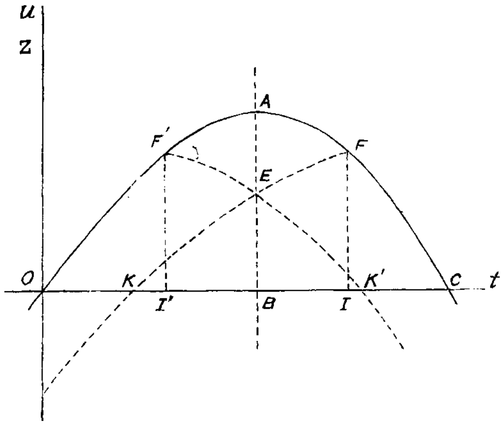
又は

$$u-z=\beta^2(\theta-t)^2 \quad\cdots\cdots(49)$$

此れは前に述べたる如く第三圖に於けるAとFとが一致する場合にして即ち第四圖のADの曲線となる、而して$t=0$の時は

$$\overline{OD}=\beta^2\theta^2 \quad\cdots\cdots(50)$$

第三圖

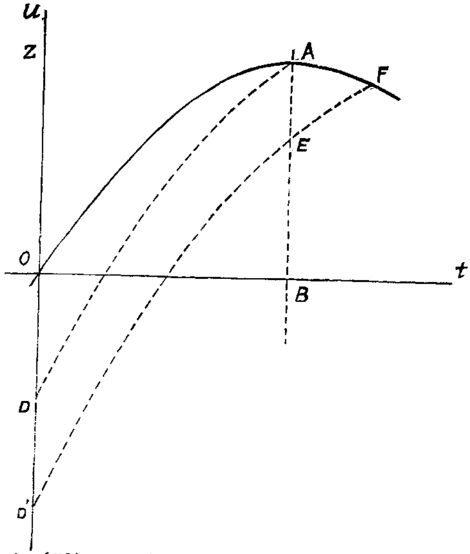


にして此時uとzとの落差は最大にして時の進むに從ひ其落差は漸次に小となりA點即ち$t=\theta$に於て落差は零となる、(49)に據れば落差と時との關係は一のパラボラとなるを見る

(八) A_1の其他の數値の場合

(12)中のA_1が正號の數値なる時は(12)は第四圖に於ける$D'EF$の如き曲線となりOD'は(23)によりAEは(25)により決定せらるべし、而してAD及びFED'は(六)により相交錯することなきが故にOD'はODより大ならざるべからず、又A_1は負數となることを得ず

第四圖



(九)　β^2はαよりも大なり

$$\beta^2=\frac{1}{2}m^2-\alpha+\frac{1}{2}m\sqrt{m^2-4\alpha}$$

而して　$m^2>4\alpha$

然らざればα及びβは虚數となるを以てなり

$$\frac{1}{2}m^2>2\alpha;\ \frac{1}{2}m^2-\alpha>\alpha\quad\therefore\beta^2>\alpha$$

從て　$\beta^2\theta^2>\alpha\theta^2$ ……………………(51)

右は(12)の曲線の性質を概述せるものなり、尚(15)(19)及び(21)の性質も之に類推して知ることを得べし

(50)及び(51)に依れば第四圖に於てODは已にABより大なり、從て一般にOD'はABより大なることゝなる、故に第二圖に於てOD及び$C'G'$は$B'A'$より大にしてCGはBAより大なることゝなり、從て又G點はF點より高くG'點はF'點より低くならざるべからず、是等はuとzとの關係に於て實際上起り得べからざることに屬す、即ち此の如き不都合なる結果を生ずるを以て(12)以下の方程式は實際上價値なきものと稱せざるべからず、又後章に說明する所あるが如く運動の最初の條件に關係する場合に於ては(12)等の方程式は實際上

不都合なる結論を出すべし

此の如きが故に(12)等の方程式によりては未だ本問題を解決すること能はざるものなりと信ず、而して(12)等の方程式が此の如く不都合なる結果を生ずるはu曲線をパラボラと假定せるに源因す、

直線と假定する場合

以上の如くu曲線をパラボラと假定する時は數學上便宜あるに拘はらず、尚實際上問題を解決するに足らずとせば次にu曲線をハイパーボラ若くは楕圓と假定する時は如何此場合に於ても亦數學上の困難あり

次にu曲線を直線と假定する時は(5)式を解くことを得べし

直線の方程式を次の如くす

$$u=at \qquad (52)$$

但し座標の基點は直線上に在るものとす

之を(5)式に入るれば

$$\frac{dz}{dt}=2m\sqrt{at-z} \qquad (53)$$

之を解く時は次のものを得

$$t=\frac{1}{2m^2}\left\{a-2m\sqrt{at-z}-a\log\left(a-2m\sqrt{at-z}\right)\right\}+C \qquad (54)$$

然れどもu曲線を直線と假定するは餘りに事實に遠ざかれるの缺點あり

z曲線を假定す

以上に述ぶる所に依り本問題に就て完全なる解決法を見出すこと能はざることを知るべし依りて次に一の便宜法を述べんとす

t_0の時の井戸水面の速度　$V_0=2m\sqrt{z_0-u_0}$

$t_1=t_0+\Delta t$の時の同上　$V_1=2m\sqrt{z_1-u_1}$

とする時は

Δtの間の平均速度$\dfrac{V_0+V_1}{2}=m\left(\sqrt{z_0-u_0}+\sqrt{z_1-u_1}\right)$

$$\frac{V_0+V_1}{2}\times\Delta t=\Delta z=z_0-z_1$$

同様に

$$\frac{V_1+V_2}{2}\times\Delta t=z_1-z_2$$

$$\frac{V_{n-1}+V_n}{2}\times\Delta t=z_{n-1}-z_n$$

今第二圖に於てOI$=t_0$としF′よりF點迄の間を考ふる時はV_0はFに於ける速度V_nはF′に於ける速度にして共に零なり、故に上式を合計する時は

$$(V_1+V_2+\cdots\cdots+V_{n-1})\times\Delta t=z_0-z_n$$

而して

$$V_1+V_2+\cdots\cdots+V_{n-1}=2m\left(\sqrt{z_1-u_1}+\sqrt{z_2-u_2}+\cdots\cdots+\sqrt{z_{n-1}-u_{n-1}}\right.$$

$$= 2m\sum_{1}^{n-1}\sqrt{z_n - u_n}$$

又 $z_0 = -z_n$ なるに依り

$$z_0 = -m\sum_{1}^{n-1}\sqrt{z_n - u_n}\times\Delta t \quad \cdots\cdots(55)$$

u 及び z 兩曲線を假定する時は近似法により此式を解くことを得べし

今 u 曲線を次の如く假定す

$$u = \mathrm{H}\cos\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} \quad \cdots\cdots(56)$$

但し此場合には第二圖に於けるB點を座標の基點とす、此式中HはABの高さにしてTはBB′を表はす、

次に z 曲線も次の如きシニユソイドと假定すべし

$$z = a\mathrm{H}\cos\frac{2\pi(t-t_0)}{\mathrm{T}} \quad \cdots\cdots(57)$$

此式中 aH は第二圖のFIの高さにして t_0 はBIの時を示すものなり

F點に於ては以上の(56)及び(57)の兩式を滿足せざるべからざるを以て次の關係を得

$$a\mathrm{H} = \mathrm{H}\cos\frac{2\pi t_0}{\mathrm{T}}$$

$$\therefore\ a = \cos\frac{2\pi t_0}{\mathrm{T}} \quad \cdots\cdots(58)$$

即ち a の數値は0より大にして1より小なるものとなる、$0 < a < 1$

Hはuの振幅にしてTは其週期なり、aHはzの振幅にしてTは其週期なり、自記檢潮機の井戸內の水は自己振動を爲すことを得ずして其振動は全く外海より來る强迫振動のみなるを以て週期は兩者同じからざるべからず、又zの振幅はuの夫れより大となることを得ず、之れ即ち(58)の示す所のものなり、次にt_0は位相の後れを示すものとす

(56)及び(57)を(55)に入るゝ時は次の式を得

$$aH=m\sum_{t=t_0}^{t=t_0+T}\sqrt{aH\cos\frac{2\pi(t-t_0)}{T}-H\cos\frac{2\pi t}{T}}\times\Delta t \qquad \text{(59)}$$

此式は直接に解くことを得ずと雖も近似法によりaH及びt_0を見出すことを得

次に實例を擧げむ

內務省に於て宮城縣鹽竈港に設置したる自記檢潮機の井戸は次の如き寸法を有せり

導管の長さ　$l=107$尺　(導管は鐵管なり)

同上の徑　$d=0.5''$

井戸の徑　$D=2.5'$

次に導管內に於ける摩擦係數を0·02と假定し(4)式に入るれば

$$2m=\sqrt{\frac{2\times32.2}{\left(\frac{2.5\times2.5}{.5\times.5}\right)^2\left(1.5+0.02\times\frac{107}{0.5}\right)}}=0.134$$

$$\therefore\quad m=0.067$$

之れは一の井戸及び導管のシステムに就ては固有の數なり

今u曲線に於て H=6尺 ,T=12秒なる場合に於けるzの曲線を求めんとす

(一)先づ試みに $aH=1.00$ 尺と假定す

(58)より

$$\cos\frac{2\pi t_0}{T}=\frac{1}{6}=0.1667$$

$$\therefore\ \frac{2\pi t_0}{T}=80^\circ35.'6=80.^\circ593$$

$$t_0=\frac{80.593}{\frac{180}{12}}=5.373\ \text{秒}$$

(59)中のΣを求むる爲めに次の表を作る

t(秒)	$\frac{2\pi(t-t_0)}{T}$(度)	z(尺)	u(尺)	$z-u$	$\sqrt{z-u}$
5.373	0.0	1.000	1.000	0.0	0.0
6	9.405	0.987	0.0	0.987	0.993
7	24.405	0.911	−1.554	2.465	1.570
8	39.405	0.772	−3.000	3.772	1.942
9	54.405	0.579	−4.242	4.821	2.196
10	69.405	0.348	−5.196	5.544	2.355
11	84.405	0.094	−5.796	5.890	2.427
12	99.405	−0.163	−6.000	5.837	2.416

13	114.405	−0.413	−5.796	5.383	2.320
14	129.405	−0.634	−5.196	4.562	2.136
15	144.405	−0.815	−4.242	3.427	1.851
16	159.405	0.937	−3.000	2.063	1.436
17	174.405	−0.995	−1.554	0.559	0.748
17.373	180	−1.000	−1.000	0.0	0.0

$$\therefore \quad m\sum_{t=t0}^{t=t0+T}\sqrt{aH\cos\frac{2\pi(t-t_0)}{T}-H\cos\frac{2\pi t}{T}}\times\Delta t=1.462$$

然るに$aH=1.00$なるを以て之れにては(59)を滿足せしむる能はず、依りて更に次の假定を以て試む

(二) $aH=1.5$と假定す

$$\cos\frac{2\pi t_0}{T}=\frac{1.5}{6}=0.25$$

$$\frac{2\pi t_0}{T}=75.^\circ 5 \qquad \therefore \quad t_0=\frac{75.5}{15}=5.''03$$ 之れを$5''$とす

t(秒)	$\frac{2\pi(t-t_0)}{T}$(度)	z(尺)	u(尺)	$z-u$	$\sqrt{z-u}$
5	0	1.500	1.554	0.0	0.0
6	15	1.449	0.0	1.449	1.202
7	30	1.299	−1.554	2.853	1.689
8	45	1.061	−3.000	4.061	2.015
9	60	0.750	−4.242	4.992	2.234

10	75	0.389	−5.196	5.585	2.363
11	90	0.0	−5.796	5.796	2.407
12	105	−0.389	−6.000	5.611	2.369
13	120	−0.750	−5.796	5.046	2.246
14	135	−1.061	−5.196	4.135	2.033
15	150	−1.299	−4.242	2.943	1.716
16	165	−1.449	−3.000	1.551	1.245
17	180	−1.500	−1.554	0.0	0.0
計					21.519

$$\therefore\ m\sum_{t=0}^{t=t_0+T}\sqrt{aH\cos\frac{2\pi(t-t_0)}{T}-H\cos\frac{2\pi t}{T}}\times\Delta t=1.442$$

然るに $aH=1.5$ なるを以て之れにても(59)を滿足せず、假定(一)にては(59)の右方は左方に比し過となり假定(二)にては同上不足となれるを以て眞の aH の數値は兩者の中間に在るを知る、依りて比例にて之を求むれば次の如し

$$0.462+0.058 : 0.5=0.058 : x$$

$$x=0.056$$

$$\therefore\ aH\text{の眞價}=1.5-0.056=1.444$$

従て

$$a=\frac{1.444}{6}=0.24$$

$$t_0 = 5''.07$$

を得べし

前例に依りて之を觀れば外海に於ける振幅六尺(高さ一二尺)週期一二秒の波(此の如き波をシニュソイドと假定するの可否は暫措き)が自記檢潮機の井戸内に侵入する時は井戸内に於ては振幅は約四分の一に縮少せられ位相に於て約五秒の後れを生ずることを見る

此の如き結果を生ずる源因二個あり、一は導管内に於て水の流れに對する抵抗あるが爲めにして二は導管と井戸との寸法如何に關す、(59)於て $a=1$ なる場合には $t_0=0$ となり $\sqrt{\ }$ の内のものは各零となり從て Σ も亦零となる、故に $m=\infty$ ならざるべからず、(4)に據れば m の無極大なる爲めには A が無極小なるか又は a が無極大なるか何れかの場合なり、換言すれば井戸の徑が無限に小なるか又は導管の徑が無限に大なれば(後者の場合には勿論導管内に於ける抵抗なし)井戸内に於ける振動は外海の夫れと全く同大にして同時(シンクロナス)なり

次に $a=0$ なる場合には $t_0=\frac{T}{2}$ にして $t>\frac{T}{2}$ 從て $\frac{2\pi t}{T}>\pi$ なるを以て

$$\sqrt{aH\cos\frac{2\pi(t-t_0)}{T}-H\cos\frac{2\pi t}{T}}=\sqrt{-H\cos\frac{2\pi t}{T}}=\sqrt{H\sin\left(\frac{2\pi t}{T}-\pi\right)} \quad \cdots\cdots\cdots (60)$$

之れは虛數にもあらず、又零にもあらず、故に此場合には $m=0$ ならざるべからず、(4)に據れば m が零となる爲めには A が無極大なるか l が無極大なるか f が無極大なるか又は a 從て d が無極小なるか何れかならざるべからず、換言すれば井戸の面積が無限に大なる時、導管の長さが無限に大なる時導管内に於ける抵抗が無限に大なる時若くは導管の徑が無限に小なる時(此場合には勿論導管内に於ける抵抗は無限に大なり)には井戸内に於ては外海の振動の如何に拘はらず少しも水面の變動な

きものとす、

以上兩個の極端の場合を除き其他の場合には井戸内の水面は外海々面の運動に伴ない必らず運動すべしと雖も其大さは多少減縮せられ位相に於て後れを生ずるを免れず、故に自記検潮機の記録は外海々面の變動を眞實に示すものにあらず、而して高さの減縮の程度及び位相の差の大小は二個の源因に依りて多少あり

(一)は井戸及導管の構造より來る固有の源因にして即ち m の數値の大小に關係すのものなり導管の徑を大にし其長さを小にし内面の滑かなる管を使用し井戸の徑を小にする時に振幅減縮の程度は小にして位相の後れも亦小なり、之に反する時は振幅減縮の程度及び位相の後れ共に大なり

(二)は外海々面の振動の如何に源因するものにして即ち(59)式中のΣの内に含まるゝ量の大小に關す、一般に週期の小なるものの程井戸内に於ける振幅減縮の程度及び位相の後れ大となる(59)式中Tが小なれば$t=t_0$、$t=t_0+T$間のΣは小となるを以てαも亦小とならざるべからず、之に反しTが大となればαも亦大となる、從て潮汐の如き週期の大なる(即ち六時間餘)波の場合にはΣの量は大となるを以てmが可なり小なる時と雖もαは殆んど1に等しくなる、換言すれば普通の自記検潮機を以てせば潮汐は實際上殆んど振幅の減縮なく又位相の後れもなく觀測することを得ることゝなる

以上述ぶる所に依れば検潮機としてはmは可なり小とするも差支へなきのみならず、風波其他の雜種の波を成る可く井戸内に侵入せしめざるを望む場合にはmを小とするを必要とす、即ち導管の徑を小にするか其長さを大にするか其内の抵抗を大にするか若くは井戸の徑を導管の徑に比し大とするを要す、之に反しセーシュ以下週期の小なる海面の振動を觀測せんとするには普通の検潮機にては其目的を達することゝ能はざるを以て特種の量水機を必要とすることを知るに足る

運動の最初の條件に關係する場合

例へば自記検潮機の導管内に扉ありて任意に之を開閉することを得べき場合又はある有限の大さを有する水面が扉に依りて外海と連絡せる場合に於てある與へられたる瞬間に扉を開放し外海と連絡を通ずる時其以後に於ける井戸内若くは水面内の水面の變動如何

此問題は上來述べたる所のもの丶一の特別なる場合に過ぎざるを以て勿論上述の解決法を應用し得ざるべからず

前に述べたる海面の運動をパラボラと假定せる場合の方程式は此問題に對しても完全なる解決を與ふるものにあらず

第二圖に於て井戸内の水面を豫めAと同水平に保ち置き外海の水面がA即ち最高水位に達したる時始めて扉を開き連絡を通ずる時は如何と云ふに(15)に於て $A_2=0$ なるを以て結局次の如し

$$\sqrt{z-u}=\alpha'(\theta-t)\qquad\cdots\cdots(61)$$

此場合には $t>\theta$ なるを以て $-\alpha'(\theta-t)$ は正號となる、而して

$$\sqrt{z-u}-\beta'(\theta-t)=0$$

を採るべからざるは $\beta'(\theta-t)$ は負號となり根本の觀念に背反するを以てなり

(61)より

$$z-u=\alpha'^2(\theta-t)^2\qquad\cdots\cdots(62)$$

之れに依れば内外水位の落差は時の進むに從ひ漸次大となる、其關係はパラボラなることを見るC點に至りては $t=2\theta;\ u=0$ 故に

$$z=\alpha'^2\theta^2$$

而して $0<\alpha'^2<\alpha$ なることは容易に證明することを得、從てC點に於ける z の高さはABよりも小なり、然れども海面が尚Cより下る場合に z の變化を(19)により定めんとするに當りては前已に其曲線

の性質を論じたる條下の(七)項に據り不都合なる結果を生ずべし

第二圖に於て井戸內の水面を豫めA′と同水平に保ち置き海面がA′即ち最低水位に達したる時始めて連絡を通ずる時も前と同樣の結論に達す

井手內の水面を豫め平均水面の高さになし置き海面が平均水面に達したる時連絡を通ずる場合には前に述べたる方程式(12)又は(19)によりては全く解決すべからず、之れは曲線の性質(四)及び(五)によりて然るなり

此の如く本問題も亦理論的に之を解釋するの途なし、依りて前述の便宜法を適用すれば次の如し

$$t=0;\quad V_0=9m\sqrt{u_0-z_0}$$

$$t=1;\quad V_1=2m\sqrt{u_1-z_1}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$t=n;\quad V'_n=2m\sqrt{u_n-z_n}$$

$$\frac{V_0+V_1}{2}=m\left(\sqrt{u_0-z_0}+\sqrt{u_1-z_1}\right)=z_1-z_0$$

今 $m\sqrt{u_0-z_0}=c_0$ と置く、此れは最初の條件による數なるを以て已知數なり

$$m\sqrt{u_1-z_1}=z_1-(z_0+c_0)$$

$$\therefore\ z_1^2-z_1\left[2(z_0+c_0)-m^2\right]+(z_0+c_0)^2-m^2u_1=0 \quad\cdots\cdots(63)$$

此れは z_1 に就て二次式なるを以て之れより z_1 を求むることを得

次に

$$\frac{V_1+V_2}{2}=m\left(\sqrt{u_1-z_1}+\sqrt{u_2-z_2}\right)=z_2-z_1$$

$$m\sqrt{u_2}-z_2=z_2-(2z_1-z_0-c_0)$$

$$z_2^2-z_2\left[2(2z_1-z_0-c_0)-m^2\right]+(2z_1-z_0-c_0)^2-m^2u_2=0 \quad\cdots\cdots(64)$$

之れより z_2 を求むることを得

故に一般に次の如し

$$z_n^2-z_n\left[2\{2(z_{n-1}-z_{n-2}+\cdots\cdots+(-1)^n z_1)+(-1)^{n-1}(z_0+c_0)\}-m_2\right],$$

$$+\left[2(z_{n-1}-z_{n-2}+\cdots\cdots+(-1)^n z_1)+(-1)^{n-1}(z_0+c_0)\right]^2-m^2u_n=0 \quad\cdots\cdots(65)$$

今

$$2(z_{n-1}-z_{n-2}+\cdots\cdots+(-1)^n z_1)+(-1)^{n-1}(z_0+c_0)=p$$

と置けば(65)は次の如くなる

$$z_n^2-z_n(2p-m^2)+p^2-m^2u_n=0 \quad\cdots\cdots(66)$$

$$\therefore\quad z_n=\frac{2p-m^2}{2}\pm\frac{1}{2}m\sqrt{4u_n+m^2-4p} \quad\cdots\cdots(67)$$

此式により z_1 z_2 等を順次に計算することを得べし

例へば前に擧げたる實例の場合に井戸内の水面を豫め平均水面に保ち置き海面が第二圖に於ける0に達したる時始めて連絡を通じたるものと假定する時は其以後の z の數値は如何と云ふに此場合には

$u_0=z_0=0$ なるが故に　$c_0=0$;　$m=0.067$

又 $u_1=1.554$（但し t の單位を秒とす）　$p=0$

$$\therefore\quad z_1=-\frac{0.067\times0.067}{2}+\frac{1}{2}\times0.067\times\sqrt{4\times1.554+0.067\times0.067}=0.079$$

此場合には u は上りつゝあり z は正號なるを要するを以て(67)中の平方根は正號を取る

次に $u_2=3.000;\ p=2\times0.079=0.158$

$$\therefore\quad z_2=\frac{2\times0.158-0.067\times0.067}{2}+\frac{1}{2}\times0.067\times\sqrt{4\times3+0.067\times0.067-4\times0.158}=0.269$$

次に $u_3=4.242;\ p=2\times(0.269-0.079)=0.38$

$$\therefore\quad z_3=\frac{2\times0.38-0.067\times0.067}{2}+\frac{1}{2}\times0.067\times\sqrt{4\times4.242+0.067\times0.067-4\times0.38}=0.509$$

追て此の如し

以上の如くにして得べき z の曲線は明かならずと雖も(57)に示すものにあらざることは想察し得べし、此場合に於ては(57)中の a t_0 及びTは一定せずして時と共に變化し時の進むに從ひ結局 a t_0 及びTに等しくなるべきものなり、換言すれば以上の如き運動の繼續する時は漸次に第二圖に示せる狀態に接近することゝなるべし

以上に述べたる所と類似の場合に種々あり、例へば井戸内に急にある一定の水量を注入せる場合、反對に井戸内より一定の水量を急に除斥せる場合又井戸内に他より常にある水量の注入しつゝある場合等之れにして此等は上述の方法により順次に z を求むることを得るなり

今井戸及び導管の代りにある水面及び水路を想像する時は海面とある水路により連絡せる湖又は瀉の場合となる然れども此場合には水路及湖瀉内に於ける波の波及を考へざるべからざるが故に以上の如く簡單には取扱ふこと能はざるに至る

結論

以上に述べたる所の要點を概括すれば次の如し

自記檢潮機の井戸内に於ける水面の運動

一）自記檢潮機に於て普通使用する所の如き導管によりて外海と連絡せる井戸内の水面は外海々面の運動に伴なひ一の强迫運動をなす、此運動の如何なるものなるやは理論上之を求むるは困難なり

（二）ある大家は已に外海々面の振動をパラボラと假定し理論上の解決を試みたるも其結果は實際に不都合めに未だ完全ならず

（三）井戸内の水面は外海々面と同樣なる方程式にて示し得べき振動をなすものと假定せば兩者振幅の關係及び位相の差を計算することを得べし

（四）其結果に依れば實現し得べき範圍内に在る井戸及び導管系に於ては井戸内水面の振幅は海面の夫れよりも必らず小となり且つ位相の後れを生ず

（五）其振幅減少及び位相の後れの程度は二種の原因によりて異なる、(1)は井戸及び導管に固有なるものにして導管内に於ける水の流れに對する抵抗大なれば大なる程又井戸の横斷面積が導管の夫れに比し大なれば大なる程振幅減少の度及び位相の後れ大となる(2)は海面の振動に關係するものにして其週期が小なれば小なる程井戸内水面の振幅減少の度及び位相の後れ大となる、從て潮汐の振動は週期甚だ大なるを以て井戸内に於ては殆むど振幅の縮少を生せず又位相の後れも之れ無し

（六）井戸内水面の運動を起す最初にある條件ある場合に於ても其以後の運動を理論上に決定するの方法なしと雖もある假定の下に其運動を計算することを得るの途あり　（完）

拔萃

土木