河川に於ける流量曲線の實例

13. 絶對最高流量(〃)	180,000	41,400
14. 絶對最高最低兩流量の比	1:600	1:23.2
15. 平均流量(秒/立方尺)	11,024	6,167
16. 平均水位に對する流量(〃)	8,822	5,853
17. 前兩者の差(〃)	2,202	314
18. 平水流量(〃)	7,538	5,600
19. 最多流量(〃)	6,000	5,450
20. 水位の回數曲線の頂點の偏れる程度	4.18	4.02
21. 流量の回數曲線の同上	30.53	9.80
22. 水位の回數曲線の面積と底と高さとにて圍む長方形の面積に對する比	4.35	5.50
23. 流量の回數曲線の同上	13.45	8.68
24. 平均水位より低き水位の起る年平均日數	212.08	203.17
25. 平均流量同上	243.21	218.15

以上の內雄物川の水位に關する數字は「雄物川の水位」中より採る
雄物川に關するものは明治二十六年乃至三十七年の十二ヶ年間瀨田川のものは明治七年乃至三十二年の二十六ヶ年間の觀測に基づくものなり

河川に於ける流量曲線の實例

工學士　衣川清一君

河川の水位と流量との關係を表はす曲線即ち流量曲線は其の大勢略バラボラに類似せる事は實驗

の示す所なるも此れを代表すべき方程式の形は河川に於ける流量測定地點の横斷面の如何により て定まるものにして一定せず

右に關しては工學士金森鍬太郎氏の研究報告に見るが如くにして實用に當りては此れが撰定に困む所なるが臨時發電水力調査局に奉職中島根鳥取兩縣下の各河川調査に際し左記パラボラの式を採用し參拾餘ヶ所に適用したるに特別の場合を除きては頗る好結果を得たるを以て以下予の試みたる解法幷に二三の實例を記述せんとす、

$$Q=a(b+h)^m \quad \cdots\cdots\cdots(1)$$

但しQは流量　hは水位　a b mは常數

〔解法〕先づ a b m 等の近似値を得んがため左の運算を行ふ、即ち實測されたる結果を製圖して目測により適當なる流量曲線を想像し其の曲線中の任意の三點を撰び夫等の點に對する水位幷に流量$(h_1Q_1)(h_2Q_2)(h_3Q_3)$を圖上にて見出し(1)式に代入すれば

$$Q_1=a(b+h_1)^m \qquad Q_2=a(b+h_2)^m \qquad Q_3=a(b+h_3)^m$$

或は

$$\left.\begin{array}{l} \log Q_1=\log a+m\log(b+h_1) \qquad \log Q_2=\log a+m\log(b+h_2) \qquad \log Q_3=\log a+m\log(b+h_3) \end{array}\right\} \cdots(2)$$

上式より$\log a$を消去して

$$\left.\begin{array}{l} \log Q_1-\log Q_2=m\{\log(b+h_1)-\log(b+h_2)\} \\ \log Q_2-\log Q_3=m\{\log(b+h_2)-\log(b+h_3)\} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots(3)$$

上式よりmを消去して

$$\frac{\log Q_1-\mathrm{lob}Q_2}{\log Q_2-\log Q_3}=\frac{\log(b+h_1)-\log(b+h_2)}{\log(b+h_2)-\log(b+h_3)} \quad \cdots\cdots\cdots(4)$$

上式を漸近法にて解きbの値を得漸次(3)式及(2)式に代入してm及aの値を得、かくの如くして得た

る値を a_1 b_1 m_1 にて表はせば次の如き近似の曲線式を得べし

$$Q=a_1(b_1+h)^{m_1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

(4)式の解法は稍複雜なるが如きも實際の計算に於ては三回位の檢算によりて小數點以下三位まで正しき b の値を得べし

右は目測によりて得たる曲線式にして次に此等の値を用ひて最小二乘法を適用せんとす

解法一〕 (三)式に於ける a b m を(5)式の a_1 b_1 m_1 にて表はせば次の如し

$$a=a_1+x \qquad b=b_1+y \qquad m=m_1+z \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

尙右により(三)式は次の如く表はすを得

$$Q=(a_1+x)\{(b_1+y)+h\}^{m_1+z}$$

今 x y z を各々一より小なる數なりと假定せば上式は開展して次の如し

$$Q=a_1(b_1+h)^{m_1}+(b_1+h)^{m_1}x+m_1a_1(b_1+h)^{m_1-1}y+a_1(b_1+h)^{m_1}\log_e(b_1+h)z$$

或は

$$q=\alpha x+\beta y+\gamma z$$

上式に最小二乘法を適用して次の正當式(Normalequation)を得

$$\left.\begin{aligned}[q\alpha]&=[\alpha\alpha]x+[\beta\alpha]y+[\gamma\alpha]z\\ [q\beta]&=[\alpha\beta]x+[\beta\beta]y+[\gamma\beta]z\\ [q\gamma]&=[\alpha\gamma]x+[\beta\gamma]y+[\gamma\gamma]z\end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (7)$$

上式を解きて x y z の値を得此等の値を(6)式に代入して a b m の値を得

〔解法二〕 (三)式の b のみに(6)式を適用すれば

$$Q=a\{(b_1+y)+h\}^m \qquad \text{或は} \qquad \log Q=\log a+m\log\{(b_1+y)+h\}$$

y が一より小なりと假定すれば開展して次式を得

或は

$$\log Q = \log a + m\{\log(b_1+h) + yM/(b_1+h)\}$$

$$q = \alpha X + \beta Y + \gamma Z$$

但し

$$q = \log Q,\quad \alpha = 1,\quad \beta = \log(b_1+h),\quad \gamma = 1/(b_1+h)$$

$$X = \log a,\quad Y = m,\quad Z = myM,\quad M = \text{modulus} = 0.4343$$

上式に最小二乘法を適用して次の正當式を得

$$\left.\begin{aligned}[q\alpha] &= [\alpha\alpha]X + [\beta\alpha]Y + [\gamma\alpha]Z\\ [q\beta] &= [\alpha\beta]X + [\beta\beta]Y + [\gamma\beta]Z\\ [q\gamma] &= [\alpha\gamma]X + [\beta\gamma]Y + [\gamma\gamma]Z\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(8)$$

上式を解きてＸＹＺの値を得べく從つて a b m の値を得べし

以上の方法は正當なる解法なるも以下に記するものは一つの簡便法にして(5)式に於ける a_1 b_1 m_1 の內何れか一つを正當なるものと倣して他の二つの常數を最小二乘法によりて算出せんとするものなり

解法(三)（m を假定したる場合）其の一

(5)式の m_1 を正當なるものとすれば(6)式は次の如し

$$m = m_1\qquad a = a_1 + x\qquad b = b_1 + y\cdots\cdots\cdots(9)$$

故に(二)式は

$$Q = (a_1+x)\{(b_1+y)+h\}^m$$

x y を一より小なる數と假定すれば開展して次式を得

$$Q = a_1(b_1+h)^m + (b_1+h)^m x + ma_1(b_1+h)^{m-1}y$$

或は

$$q = \alpha x + \beta y$$

上式に最小二乘法を適用して次の如き正當式を得

$$[q\alpha]=[\alpha\alpha]x+[\beta\alpha]y \qquad [q\beta]=[\beta\alpha]x+[\beta\beta]y \quad \cdots\cdots(10)$$

上式を解きてx yの値を得べく其の値を(9)式に代入してa bの値を得べし

其の二

(1)式のm乘根を取れば

$$Q^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{m}}(b+h) \qquad \text{或は} \qquad Q^{\frac{1}{m}}=a^{\frac{1}{m}}b+a^{\frac{1}{m}}h$$

上式に最小二乘法を適用して次の正當式を得

$$na^{\frac{1}{m}}b+[h]a^{\frac{1}{m}}=[Q^{\frac{1}{m}}] \qquad \text{但し}n\text{は觀測式の數}$$

$$[h]a^{\frac{1}{m}}b+[h^2]a^{\frac{1}{m}}=[Q^{\frac{1}{m}}h]$$

$$b=\frac{[h][hQ^{\frac{1}{m}}]-[h^2][Q^{\frac{1}{m}}]}{[h][Q^{\frac{1}{m}}]-n[hQ^{\frac{1}{m}}]} \qquad a=\left\{\frac{[Q^{\frac{1}{m}}]}{nb+[h]}\right\}^m \quad \cdots\cdots(11)$$

（解法四）（bを假定したる場合）

其の一

(5)式のb_1を正當なるものと假定すれば(6)式は次の如し

$$a=a_1+x \qquad b=b_1 \qquad m=m_1+z \quad \cdots\cdots(12)$$

故に(1)式は次の如く表はす事を得

$$Q=(a_1+x)(b+h)^{m_1+z}$$

今x及zを一より小なる數と假定せば展開して次式を得

$$Q=a_1(b+h)^{m_1}+(b+h)^{m_1}x+a_1(b+h)^{m_1}\log_e(b_1+h).z \quad \text{或は} \quad q=\alpha x+\gamma z$$

上式に最小二乘法を適用して次の如き正常式を得

$$[\alpha q]=[\alpha\alpha]x+[\alpha\gamma]z \qquad [\gamma q]=[\alpha\gamma]x+[\gamma\gamma]z \quad \cdots\cdots(13)$$

(13)式を解きて x 及 z の値を得(12)式によりて a 及 m の値を得

其の二

(1)式の對數式は　$\log Q=\log a+m\log(b+h)$

上式に於て $\log a$ 及 m を未知數と考へて最小二乘法を適用すれば次の正常式を得

$$\left.\begin{aligned}[\log Q]&=n.\log a+[\log(b+h)]m\\ [\log Q\log(b+h)]&=[\log(b+h)]\log a+[\{\log(b+h)\}^2]m\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(14)$$

〔解法五〕(a を假定したる場合)　其の一

(5)式の a_1 を正當なるものとせば(6)式は次の如し

$$a=a_1 \qquad b=b_1+y \qquad m=m_1+z \quad \cdots\cdots(15)$$

故に(1)式は　$Q=a\{(b_1+y)+h\}^{m_1+z}$

y 及 z を一より小なる數と假定せば展開して次式を得

$$Q=a(b_1+h)^{m_1}+am_1(b_1+y)^{m_1-1}y+a(b_1+h)^{m_1}\log_e(b_1+h).z \quad \text{或は} \quad q=\beta y+\gamma z$$

上式に最小二乘法を適用して次の正常式を得

$$[\beta q]=[\beta\beta]y+[\gamma\beta]z \qquad [\gamma q]=[\beta\gamma]y+[\gamma\gamma]z \quad \cdots\cdots(16)$$

上式を解き y 及 z の値を得次に(15)式によりて b 及 m の値を得

其の二

(1)式の b のみに(15)式を適用すれば　$Q=a\{(b_1+y)+h\}^{m}$

故に其の對數式は　$logQ=loga+mlog\{(b_1+y)+h\}$

yを一よりも小なる數と假定せば展開して次式を得

$$logQ=loga+m\left\{log(b_1+h)+\frac{yM}{b_1+h}\right\}$$

或は

$$\left.\begin{array}{l} logQ-loga=mlog(b_1+h)+myM/(b_1+h) \\ \text{或は}\quad q=\alpha X+\beta Y \\ \text{但し}\quad q=logQ-loga \quad \alpha=log(b_1+h) \quad \beta=1/(b_1+h) \\ \qquad X=m \quad Y=myM \quad M=\text{modulus}\ 0.4343 \end{array}\right\}\cdots\cdots(17)$$

上式に最小二乘法を適用して次の正當式を得

$$[\alpha q]=[\alpha\alpha]X+[\alpha\beta]Y \qquad [\beta q]=[\alpha\beta]X+[\beta\beta]Y\cdots\cdots(18)$$

(18)式を解きてX及Yの値を得(17)式及(15)式によりてb及mの値を得べし

以上八種の解法は最小二乘法の適用方法如何によりて次の如く分類する事を得べし

A、直接流量に最小二乘法を適用したるものにして解法一、三の一、四の一、五の一、此れなり

B、流量のm乘根に最小二乘法を適用したるものにして解法三の二此れなり

C、流量の對數に最小二乘法を適用したるものにして解法二、四の二、五の二此れなり

さて解法一は(6)式に於けるx y zが各々一より小なりと假定したるも實際運算に當りては當初述べたる近値數計算法によりてy zを一より小ならしむるを得るもxを一より小ならしむる事は殆ど不可能なるを以て此の解法によらんとせばxに一より小なる數を取らしめんがため流量の單位を變更して即ち流量の位を下げて最小二乘法を適用せざるべからず、解法三の一及四の一は解法一と同樣の欠點を存して尚(5)式のm_1或はb_1を正當なるものと假定せざるべからず、解法五の一は(5)式

のa_1 b_1 m_1の内最も誤り大なるa_1を正當なりとする者にして甚だ面白からず、かくの如くにしてAに屬する解法は其の内最も完全なる解法一によるも尙充分正確なる能はず、しかも計算は甚だ複雜なり、而してBに屬するもの即ち解法三の二に付きて考ふるに流量のm乘根を取り扱ふ事はA種の流量の單位を變更する事と殆ど同一の結果を表はすべくmを假定するは解法三の一に於てm或は解法四の一に於てbを假定すると精密の程度に於て何等變る事なく尙最も誤り大なるa_1を正當なりと假定したる解法五の一より正確にして其の運算は此等A種に屬するものよりはるかに簡單なり、のみならず解法一は流量の單位を變更するのみにて何等の假定を設けざればB種の解法より精密なるべきも近似數計算法によりて(5)式のm_1は相當精確なる値に達し得るを以て解法三の二によりて得たる結果は解法一によりて得たる結果と比較するに流量に於て其の差實驗上約一パーセント以内にして實用上何等の障害を存せず、さればAB兩種の解法に於ては解法三の二を採用するを以て最も便利なりとすべし

次にC種に屬するものを考ふるに此の種は何れも流量の對數を取り扱ふものにして間接法とも稱し得べく其の内の解法五の二はA種の五の一と同じく誤り最も大なるa_1を正當なりと假定するを以て最も不正確なりとす而して解法四の二は近値數計算法によりて得らるべきb_1の正確の程度によりて其の良否を決すべきものなるも實驗の結果によれば此れによりて得たる流量は最も正確なる解法二によりて得たる流量との差實驗上僅かに一パーセント以内にして實用上何等の差異なきものと考へ得べしされぱC種の解法に於ては其の内最も計算の容易なる解法四の二を採用するを便利とす

然れども此の解法に於ては流量の對數に最小二乘法を通用するを以て從て算定の結果定め得たる曲線式は流量の誤差の二乘を最小にせずして其の對數の誤差の二乘を最小にするものなるは明か

なり、而して對數は眞數の如何にかゝわらず數字同一なれば假數も又同一にして數字の單位の如何は單に指數の增減にすぎず故に此の場合に於ては實測されたる流量に輕重率を附せずとも尙流量の單位が變化する毎に其の輕重率を變化すると殆ど同一の結果を得べし即ち曲線中低き流量が十位にして中央百位を有し高き流量が千位なる場合に於て此の解法を適用すれば流量に何等の輕重率を附せずとも自然に十位の流量には一、百位の流量には十分一、千位の流量には百分一の輕重率を附したると殆ど同一の結果を生ずべし實際に於ては測定の結果左の如く判然たる輕重の存すべき謂れなきも高水部に於ては測水時の水位の變化等により低水部より誤差稍大なるは論をまたず以上述べたる所によりて次の如き結論を得べし

(一) 測定の結果が同一の輕重率を有する場合には解法三の二を最も便利とす

(二) 測定の結果高水部に於ける流量低水部に於ける流量より誤差大なりと認めたる場合は解法四の一を最も便利とす

〔實例一〕 島根縣神戶川(簸川郡山口村)に於ける流量曲線

第一表の水位と流量とを製圖して目測によりて曲線を想像し其の曲線上の三點を圖上にて得たるに次の如し

$$\begin{cases} h_1 = 3.4 \\ Q_1 = 920 \end{cases} \quad \begin{cases} h_2 = 2.6 \\ Q_2 = 497 \end{cases} \quad \begin{cases} h_3 = 1.4 \\ Q_3 = 100 \end{cases}$$

故に

$$\frac{\log Q_1 - \log Q_2}{\log Q_2 - \log Q_3} = \frac{2.9637878 - 2.6963564}{2.6963564 - 2.0000000} = 0.384$$

故に(4)式は次の如し

$$0.384 = \frac{\log(b+3.4) - \log(b+2.6)}{\log(b+2.6) - \log(b+1.4)}$$

さて上式は檢算(trial)にて此れを解けば $b = -0.48$ を得べし次に此の値を(3)式に代入して $n = 1.924$ を

得以上の値を(2)式に代入して $a=117.06$ を得るを以て(5)式は次の如し

$$Q=117.6(h-0.48)^{1.924}$$

上式を製圖して實測流量との關係を見るに正當なる曲線に甚だ近きが如きを以て上式に於ける $1.924(=m)$ を正當なる値と倣して解法三の二を適用すれば

第壹表

番號	水位 (h)	h^2	流量 (Q)	$log\ Q$	$\frac{1}{1.924}log Q$	$Q^{\frac{1}{1.924}}$	$hQ^{\frac{1}{1.924}}$
1	尺 1.40	1.960	個 91.7	1.9623693	0.9998408	9.996	13.994
2	1.48	2.190	109.8	2.0406023	1.0606041	11.498	17.016
3	1.50	2.250	121.5	2.0845763	1.0834596	12.113	18.178
4	1.56	2.434	122.6	2.0884905	1.0854940	12.175	18.994
5	1.64	2.690	155.2	2.1908917	1.1387171	13.763	22.571
6	1.69	2.856	167.0	2.2227165	1.1552581	14.297	24.162
7	1.70	2.890	172.2	2.2360331	1.1621794	14.527	24.696
8	1.73	2.993	184.2	2.2652896	1.1773854	15.044	26.027
9	1.74	3.028	180.6	2.2567177	1.1729302	14.891	25.910
10	1.82	3.312	217.2	2.3368598	1.2145841	16.390	29.830
11	1.88	3.534	228.6	2.3590762	1.2261311	16.832	31.643
12	1.99	3.960	267.3	2.4269990	1.2614340	18.257	36.331
13	1.99	3.960	274.2	2.4380675	1.2671868	18.500	36.816
14	2.12	4.494	318.9	2.5036545	1.3012757	20.011	42.424
15	2.60	6.760	492.0	2.6919651	1.3991503	25.070	65.181
16	2.80	7.840	583.0	2.7656686	1.4374577	27.381	76.668
17	2.87	8.237	639.9	2.8061121	1.4584782	28.739	82.482
18	3.11	9.672	766.7	2.8846255	1.4992856	31.571	98.185
19	3.24	10.498	843.5	2.9260851	1.5208340	33.177	107.492
20	3.41	11.628	908.3	2.9582293	1.5375412	34.479	117.571
計	42.27	97.186	....	....	....	388.716	916.171

(11)式により

$$b=\frac{[h][hQ^{\frac{1}{m}}]-[h^2][Q^{\frac{1}{m}}]}{[h][Q^{\frac{1}{m}}]-n[hQ^{\frac{1}{m}}]}=\frac{42.27\times916.171-97.186\times388.716}{42.27\times388.716-20\times916.171}=-0.50$$

$$a=\left\{\frac{[Q^{\frac{1}{m}}]}{nb+[h]}\right\}^{m}=\left\{\frac{388.716}{-20\times0.5+42.27}\right\}^{1.921}=120.1\qquad(\log a=2.0795235)$$

故に求むる曲線式は

$$Q=120.1(h-0.5)^{1.921}\qquad\text{(第壹圖參照)}$$

(實例二) 島根縣高津川水系匹見川(美濃郡匹見下村)に於ける流量曲線

第二表の水位と流量とを製圖して目測によりて曲線を想像し其の曲線上の三點を圖上にて得るに次の如し

$$\begin{cases}h_1=3.95\\Q_1=2,200\end{cases}\quad\begin{cases}h_2=3.10\\Q_2=1,260\end{cases}\quad\begin{cases}h_3=1.42\\Q_3=130\end{cases}$$

右の値を(4)式に代入して $b=-0.74$ を得て(3)式及(2)式により $m=1.818$, $a=263.96$ を得べきにより(5)式は次の如し

$$Q=263.96(h-0.74)^{1.818}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

さて此のA式を實際製圖して實測流量との關係を見るに(A)曲線は曲率やゝ急に過ぐるが如く即ち m が大に過ぐるが如きを以て曲線上の三點を更に次の如く假定すべし

$$\begin{cases}h_1=3.95\\Q_1=2,170\end{cases}\quad\begin{cases}h_2=3.10\\Q_2=1,780\end{cases}\quad\begin{cases}h_3=1.42\\Q_3=135\end{cases}$$

右の値によりて(4)式を解けば $b=-0.84$ を得されば(3)式及(2)式によりて $m=1.654$, $a=332.38$ を得べく此の場合の(5)式は

$$Q=332.38(h-0.84)^{1.654} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (B)$$

(B)式を實際製圖して實測流量との關係を見るに此の場合に於ては(A)式と反對に曲率緩に過ぐるが如く即ち m が小に過ぐるを知る而して(A)式と(B)式との中間を通過する曲線は最も望ましき曲線なるを以て(A)式の m と(B)式の m との平均即ち $(1.818+1.654)\div 2=1.736$ を正當なる値と考へ解法三の二を適用すべし

貳表

流量(Q)	$\log Q$	$\frac{1}{1.736}\log Q$	$Q^{\frac{1}{1.736}}$	$hQ^{\frac{1}{1.736}}$
127.47	2.1054080	1.2127926	16.320	23.179
118.53	2.0738283	1.1946016	15.653	22.541
132.27	2.1214614	1.2220400	16.674	24.344
160.19	2.2046354	1.2699513	18.619	27.370
169.48	2.2291185	1.2840544	19.234	28.850
174.46	2.2416959	1.2912994	19.557	30.705
197.12	2.2947307	1.3218495	20.982	33.152
210.66	2.3235821	1.3384690	21.801	34.881
231.86	2.3652218	1.3624573	23.039	37.553
261.20	2.4169732	1.3922657	24.676	42.935
298.46	2.4748861	1.4256256	26.646	47.962
351.48	2.5459006	1.4665326	29.278	55.334
357.61	2.5534897	1.4708581	29.570	56.184
632.13	2.8008064	1.6133675	41.055	95.621
676.84	2.8304860	1.6304643	42.704	102.725
752.46	2.8764834	1.6569605	45.390	113.021
898.59	2.9535616	1.7013602	50.276	133.734
1244.09	3.0948518	1.7827487	60.638	186.160
1870.78	3.2720227	1.8848057	76.702	279.960
2198.89	3.3422036	1.9252324	84.185	336.738
········	········	········	682.999	1,712.949

第

番號	水位 (h)	h^2
1	1.42	2.0164
2	1.44	2.0736
3	1.46	2.1316
4	1.47	2.1609
5	1.50	2.2500
6	1.57	2.4649
7	1.58	2.4964
8	1.60	2.5600
9	1.63	2.6569
10	1.74	3.0276
11	1.80	3.2400
12	1.89	3.5721
13	1.90	3.6100
14	2.34	5.4756
15	2.40	5.7600
16	2.49	6.2001
17	2.66	7.0756
18	3.07	9.4249
19	3.65	13.3225
20	4.00	16.0000
計	41.610	97.5191

(11)式により

$$b=\frac{(h)(hQ^{\frac{1}{m}})-(h^2)(Q^{\frac{1}{m}})}{(h)(Q^{\frac{1}{m}})-n(hQ^{\frac{1}{m}})}=\frac{41.610\times1.712.949-97.519\times682.999}{41.610\times682.999-20\times1.712.949}=-0.8$$

$$a=\left\{\frac{(Q^{\frac{1}{m}})}{nb+(h)}\right\}^{\frac{1}{m}}=\left\{\frac{682.999}{-20\times0.8+41.61}\right\}^{1.738}=298.92\quad(\log a=2.4755542)$$

故に曲線式は次の如し

$$Q=298.92(h-0.8)^{1.737}$$　(第二圖參照)

〔實例三〕島根縣高津川水系匹見川(美濃郡匹見上村)に於ける流量曲線

第三表の水位と流量とを製圖して目測によりて想像せる曲線上の三點を得るに次の如し

$\begin{cases}h_1=4.30\\Q_1=1,075.0\end{cases}$　$\begin{cases}h_2=2.70\\Q_2=252.5\end{cases}$　$\begin{cases}h_3=1.89\\Q_3=80.0\end{cases}$

右の値によりて(4)式を解き $b_1=-0.17$ を得

此の場合解法二を適用すれば次の如し

第三表

番號	水位 (h)	$h-0.17$	$\frac{1}{h-0.17}$	$\frac{1}{(h-0.17)^2}$	$log(h-0.17)$	$\{log(h-0.17)\}^2$	$\frac{log(h-0.17)}{h-0.17}$	流量 (Q)	$log Q$	$log Q log(h-0.17)$	$\frac{log Q}{h-0.17}$
1	尺 1.89	1.72	0.5814	0.338	0.2355	0.0555	0.1370	79.2	1.89873	0.44715	1.10390
2	1.99	1.82	0.5495	0.302	0.2601	0.0677	0.1429	98.4	1.99300	0.51838	1.09510
3	2.04	1.87	0.5348	0.286	0.2718	0.0739	0.1453	99.4	1.99739	0.54289	1.06812
4	2.09	1.92	0.5208	0.271	0.2833	0.0803	0.1476	114.4	2.05843	0.58315	1.07210
5	2.10	1.93	0.5181	0.268	0.2856	0.0816	0.1480	126.7	2.10278	0.60055	1.08937
6	2.44	2.27	0.4405	0.194	0.3560	0.1267	0.1569	190.9	2.28081	0.81197	1.00476
7	2.58	2.41	0.4149	0.172	0.3820	0.1459	0.1585	217.8	2.33806	0.90015	0.97015
8	2.70	2.53	0.3953	0.156	0.4031	0.1625	0.1593	254.5	2.40569	0.96973	0.95087
9	2.73	2.56	0.3906	0.153	0.4082	0.1666	0.1595	271.8	2.43425	0.99366	0.95090
10	2.77	2.60	0.3846	0.148	0.4150	0.1722	0.1596	265.1	2.42341	1.00572	0.93208
11	2.81	2.64	0.3788	0.143	0.4216	0.1778	0.1597	287.5	2.45864	1.03656	0.93130
12	2.90	2.73	0.3663	0.134	0.4362	0.1903	0.1598	315.9	2.49955	1.09030	0.91559
13	3.07	2.90	0.3448	0.119	0.4624	0.2138	0.1595	365.0	2.56229	1.18480	0.88355
14	3.16	2.99	0.3345	0.112	0.4757	0.2263	0.1591	404.7	2.60713	1.24021	0.87195
15	3.28	3.11	0.3215	0.103	0.4928	0.2429	0.1585	472.0	2.67394	1.31772	0.85978
16	3.30	3.13	0.3195	0.102	0.4955	0.2455	0.1583	454.7	2.65773	1.31691	0.84911
17	3.40	3.23	0.3096	0.096	0.5092	0.2593	0.1577	494.7	2.69434	1.37196	0.83416
18	3.95	3.78	0.2646	0.070	0.5772	0.3335	0.1528	816.9	2.91217	1.68170	0.77042
19	4.35	4.18	0.2392	0.057	0.6212	0.3859	0.1486	1097.6	3.04044	1.88872	0.72738
計	………	………	7.6093	3.224	7.7927	3.4082	2.9296	………	46.03878	19.50232	17.8809

(8)式に於て

$$[qa]=[log Q]=46.03878,\quad [q\beta]=[log Q \, log(h-0.17)]=19.50232,\quad [q\gamma]=\left[\frac{log Q}{h-0.17}\right]=17.8809$$

$$[aa]=19,\quad [a\beta]=[log(h-0.17)]=7.7927,\quad [a\gamma]=\left[\frac{1}{h-0.17}\right]=7.6093,$$

$$[\beta\beta]=[\{log(h-0.17)\}^2]=3.4082,\quad [\beta\gamma]=\left[\frac{log(h-0.17)}{h-0.17}\right]=2.9296,\quad [\gamma\gamma]=\left[\frac{1}{(h-0.17)^2}\right]=3.224.$$

故に(8)式は次の如し

$$\left\{\begin{array}{l} 46.03878=19X+7.7927Y+7.6093Z \\ 19.50232=7.7927X+3.4082Y+2.9296Z \\ 17.88090=7.6093X+2.9296Y+3.2240Z \end{array}\right.$$

上式を解きて

$$X=1.2255922,\quad Y=2.919,\quad Z=0.00227,$$

而して $loga=X$　$m=Y$　$myM=Z$　$b=b_1+y$　なるを以て

$$a=16.811\quad m=2.919\quad y=0.00179,\quad b=-0.17+0.00179=-0.172$$

故に求むる曲線式は次の如し

$$Q=16.811(h-0.172)^{2.919}$$

或は簡單に　$Q=16.8(h-0.17)^{2.919}$……………………………………(第三圖參照)

以上の結果を見るに正確なるbの値は　-0.172　にして當初目測によりて決定せるb_1と殆ど變りなく小數點以下三位を無視する場合には全く同一となるべしかくの如く目測によりて得たるbの値は相當に正確なるを以て本法によらんよりむしろ解法四の二によるを便利なりとす

〔實例四〕島根縣神戸川(簸川郡窪田村)に於ける流量曲線

第四表に於ける水位と流量とによりて目測によりて曲線は想像し其の曲線上の三點を得るに

$$\begin{cases} h_1=2.80 \\ Q_1=893.0 \end{cases} \quad \begin{cases} h_2=1.92 \\ Q_2=422.5 \end{cases} \quad \begin{cases} h_3=1.09 \\ Q_3=118.0 \end{cases}$$

されば(4)式によりて $h_1=-0.37$ 故に $m_1=1.666$ $a_1=203.44$ にして(5)式は次の如し

$$Q=203.44(h-0.37)^{1.666}$$

上式を製圖して實測流量と比較し、大なる誤なきを以て b の近値數 -0.37 を正當なりと假定して解法四の二を適用すれば次の如し

第四表

番號	水位 (h)	$h-0.37$	$log(h-0.37)$	$\{log(h-0.37)\}^2$	流量 (Q)	$logQ$	$logQlog(h-0.37)$
1	1.09	0.72	−0.14267	0.02035	119.4	2.07700	−0.29693
2	1.24	0.87	−0.06048	0.00366	178.1	2.25066	−0.13612
3	1.30	0.93	−0.03152	0.00199	172.8	2.23754	−0.07050
4	1.30	0.93	−0.03152	0.00199	190.8	2.28058	−0.07188
5	1.36	0.99	−0.00436	0.00002	209.2	2.32056	−0.01012
6	1.72	1.35	0.13033	0.01699	327.8	2.51561	0.32786
7	1.86	1.49	0.17319	0.03000	400.7	2.60282	0.45078
8	1.92	1.55	0.19033	0.03623	421.0	2.62428	0.51112
9	2.05	1.68	0.22531	0.05077	492.4	2.69232	0.60660
10	2.57	2.20	0.34242	0.11725	784.7	2.88349	0.98737
11	2.58	2.21	0.34439	0.11860	768.7	2.88576	0.99384
12	2.80	2.43	0.38561	0.14870	893.0	2.95085	1.13789
計	………	………	1.52103	0.54655	………	30.32147	4.42916

(14) 式は

$$\begin{cases} 30.32147 = 12\log a + 1.52103m \\ 4.42916 = 1.52103\log a + 0.54655m \end{cases}$$ なり

上式を解きて　$\log a = 2.3168758$（或は $a = 207.429$）　$m = 1.656$

故に求むる曲線式は　$Q = 207.(h-0.37)^{1.656}$　（第四圖參照）

さて一般には以上の方法によりて相當なる結果を得たるも數ヶ所に於て次の如き例外を得たり即ち(4)式によりて得たるbの値が負數にして其の絶對値が非常に大なる場合即ち此れによりて(3)式より得たるmが非常に大なる場合には上述の解法によりては好良なる結果を得る能はず而して上述の方法を適用し得べきmの範圍は實驗上3以下にあるものゝ如く尚河川の斷面と比較するに斷面が（流量曲線使用範圍內に於ける河岸の形）がコンケーブなる時はmの値は3を越ゆる事殆ど無く結果良好なるも斷面がコンベックスとなり即ちラッパ口の如き形を有する場合にはmの値は非常に增加し殆と常に3以上にして上述の方法を適用する能はざるか如し、かくの如き場合は曲線を數個に分割せば上述の方法を適用し得るも余は次式を採用して良好なる結果を收め得たり

$$Q = a(b+h)^m + c \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

上式を正當に最小二乘法によりて解かんとせは算式非常に複雜となるべきを以て次の如き簡便法によれり即ちCを任意に（曲線の使用範圍外）假定して(4)式のQの代りに$(Q-C)$を代入しmの値を3以下に達せしめて解法三の二或は四の二を適用せり

（實例五）　島根縣斐伊川（仁多郡温泉村）に於ける流量曲線

第五表に於ける水位と流量とを製圖して目測によりて曲線中の三點を得れは次の如し

$$\begin{cases} h_1 = 4.2 \\ Q_1 = 1{,}645 \end{cases} \quad \begin{cases} h_2 = 3.0 \\ Q_2 = 885 \end{cases} \quad \begin{cases} h_3 = 1.6 \\ Q_3 = 340 \end{cases}$$

されは(4)式は次の如し

$$\frac{log(1645-c)-log(885-c)}{log(885-c)-log(340-c)}=\frac{log(b+4.2)-log(b+3.0)}{log(b+3.0)-log(b+1.6)} \quad \cdots\cdots(19)$$

上式に於て $c=50$ と假定せは $b=1.05$ を得べし然れは(3)式によりて $m=2.494$ (2)式によりて $a=25.5$ を得るを以て(5)式は次の如し

$$Q=(h+1.05)^{2.494}+50 \quad \cdots\cdots(20)$$

(但し(19)式に於て $c=0$ として b を求め(3)式及(2)式にて m 及 a を得て實際製圖するに實測諸點と非常に隔離したる結果を表はすべし)

(20)式を實際製圖して實測流量と比較するに甚だ當を得たるが如きを以て $c=50$, $m=2.494$ を正當なる値と假定して解法三の二を適用せんとす

第五表

番號	水位 (h)	h^2	流量 (Q)	$Q-50$	$log(Q-50)$	$\frac{1}{2.494}log(Q-50)$	$(Q-50)^{\frac{1}{2.494}}$	$h(Q-50)^{\frac{1}{2.494}}$
1	尺 1.54	2.3716	個 320.4	270.4	2.4320067	0.9751430	9.444	14.544
2	1.56	2.4336	325.5	275.5	2.4401216	0.9783968	9.515	14.843
3	1.60	2.5600	336.8	286.8	2.4575791	0.9853966	9.669	15.470
4	1.62	2.6244	339.3	289.3	2.4613484	0.9869080	9.703	15.719
5	1.68	2.8224	376.5	326.5	2.5138832	1.0079724	10.185	17.111
6	1.73	2.9929	388.6	338.6	2.5296870	1.0143092	10.335	17.880
7	1.75	3.0625	390.5	340.5	2.5321171	1.0152835	10.358	18.127
8	2.06	4.2436	494.5	444.5	2.6478718	1.0616985	11.526	23.744
9	2.10	4.4100	504.9	454.9	2.6579159	1.0657241	11.634	24.431

10	2.13	4.5369	520.5	470.5	2.6725596	1.0715997	11.792	25.117
11	2.55	6.5025	637.3	587.3	2.7688600	1.1102085	12.889	32.867
12	2.72	7.3984	725.2	675.2	2.8294324	1.1344958	13.630	37.074
13	2.75	7.5625	731.1	681.1	2.8332109	1.1360108	13.678	37.615
14	2.86	8.1796	841.3	791.3	2.8983412	1.1621256	14.525	41.542
15	2.90	8.4100	808.0	758.0	2.8796692	1.1546388	14.277	41.403
16	3.00	9.0000	868.4	818.4	2.9129656	1.1679894	14.723	44.169
17	3.05	9.3025	918.3	868.3	2.9386698	1·1782958	15.076	45.982
18	3.10	9.6100	949.5	899.5	2.9540012	1.1844431	15.291	47.402
19	3.17	9.7344	976.6	926.6	2.9668923	1.1896120	15.474	48.279
20	3.45	11.9025	1138.5	1088.5	3.0368284	1.2176537	16.506	56.946
21	3.60	12.9600	1240.5	1190.5	3.0757294	1.2332516	17.110	61.596
22	3.68	13.5424	1289.9	1239.9	3.0933867	1.2403315	17.391	63.999
23	4.00	16.0000	1497.4	1447.4	3.1605881	1.2672769	18.504	74.016
24	4.20	17.6400	1646.1	1596.1	3.2030601	1.2843064	19.244	80.825
計	62.75	179.8027	……..	……..	……………	……………	322.479	900.701

$$b=\frac{[h][h(Q-50)^{\frac{1}{m}}]-[h^2][(Q-50)^{\frac{1}{m}}]}{[h][(Q-50)^{\frac{1}{m}}]-n[h(Q-50)^{\frac{1}{m}}]}=\frac{62.75\times900.701-179.8027\times322.479}{62.75\times322.479-24\times900.701}=1.06$$

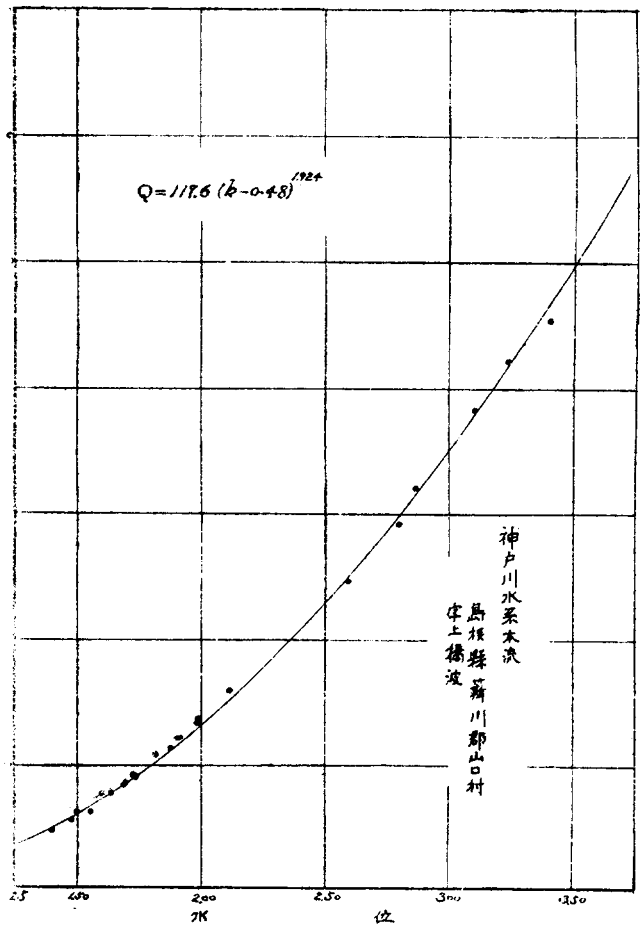
$$a=\left\{\frac{[(Q-50)^{\frac{1}{m}}]}{nb+[h]}\right\}^{\frac{1}{m}}=\left\{\frac{322.479}{24\times1.06+62.75}\right\}^{\frac{1}{2.494}}=25.374\qquad(\log a=1.4043268).$$

故に求むる曲線式は左の如し

$$Q=25.374(1.06+h)^{2.494}+50$$　（第五圖參照）

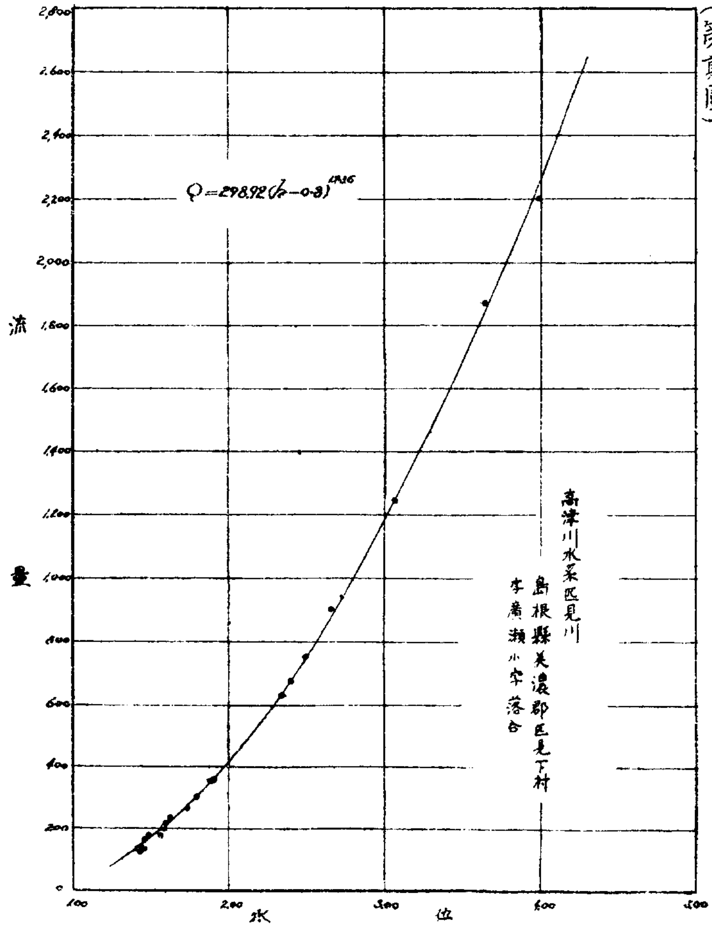
流量曲線圖

(第壹圖)



Q=117.6(h-0.48)^1.924
神戸川水系本流
島根縣簸川郡山口村
字上橋波
1.5
1.50
2.00
2.50
3.00
3.50
水位

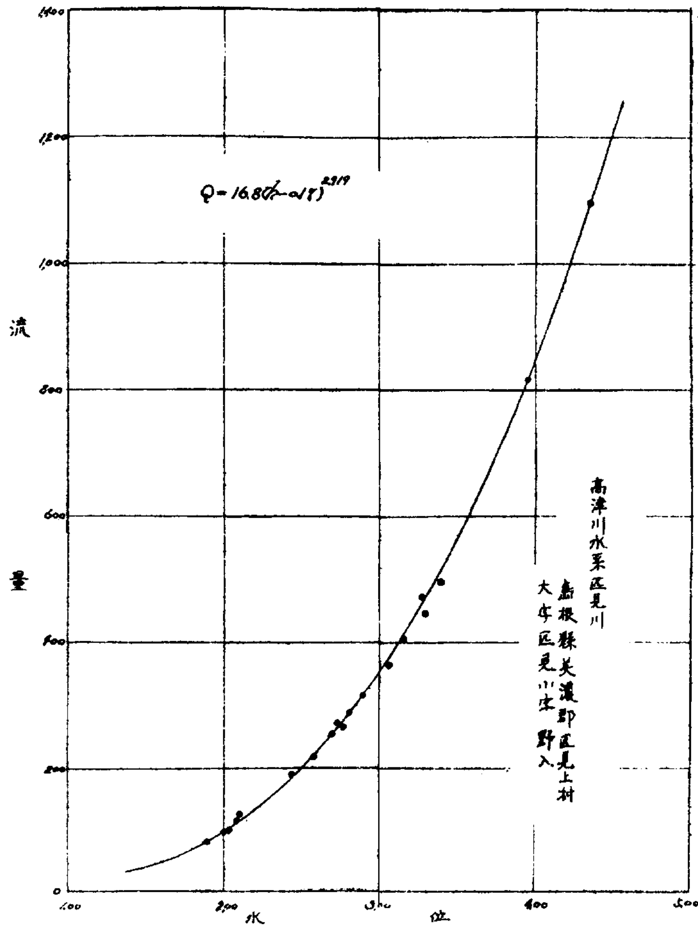
流 量 曲 線 圖


$Q=298.92(h-0.8)^{1.816}$
2,800
2,600
2,400
2,200
2,000
1,800
1,600
1,400
1,200
1,000
800
600
400
200
0
流
量
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00
水
位
高津川水系匹見川
島根縣美濃郡匹見下村
字廣瀨小字落合

(第貳圖)

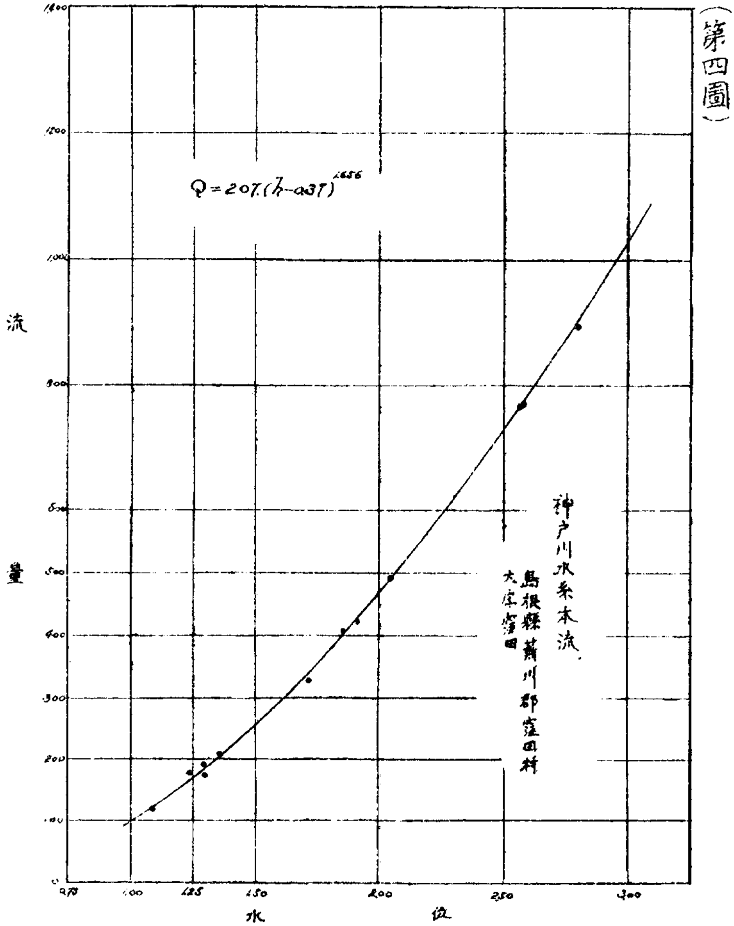
(第三圖)

流量曲線圖



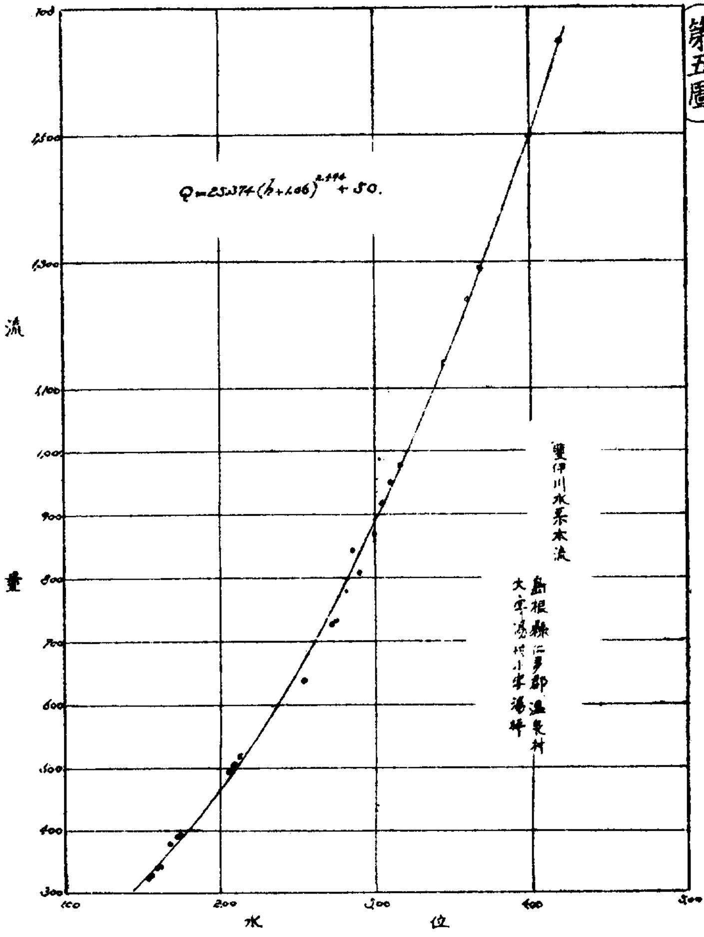
$Q=16.8(h-0.18)^{2.319}$
高津川水系匹見川
島根縣美濃郡匹見上村
大字匹見小字野入
流量
水位
1400
1200
1000
800
600
400
200
0
1.00
2.00
3.00
4.00
5.00

流　量　曲　線　圖



流　量　曲　線　圖

第五圖



$Q=25.374(h+1.06)^{2.494}+50.$
斐伊川水系本流
島根縣仁多郡温泉村
大字湯村小字湯坪
流
量
水
位
1,500
1,300
1,100
1,000
900
800
700
600
500
400
300
100
200
300
400
500