工學士(電氣)國分武胤君　紹介人　澤田堅太郎君

工學士(土木)來島良亮君
工學士(土木)橋本敬次君　同　中山秀三郎君

工學得業士(土木)川勝忍君　同　小溝茂橘君

鈴木定治郎君　紹介人　西尾虎太郎君
須田誠太郎君　同　澤田堅太郎君

金澤樂二郎君
片山茂君　紹介人澤田堅太郎君

論說及報告

河川橫斷面の天然形狀

工學士　金森鍬太郎君

河川橫斷面の形狀は一般に不規則なりと雖も多少の不規則を相平均する時は特別の場合を除き幾何學的の形狀を以て之を代表せしむることを得べし即ち獨逸に於て橫斷面パラボラ(Profilparabel)說の起りし所以の如きは其一例なり

著者は先きに本誌第三四五卷に於て河川の橫斷面は一般に低水部、中水部及高水部の三部分より成るものと見做し得べきことを論せり、勿論其區劃線の明瞭ならざること多しと雖も河川に於ける實測橫斷面圖を取りて見れば大體に於て三部の區別あるを認むるを得べし

低水部

低水部に在りては水面幅に比して水深は小なるを以て(特に河川の下流に於て然り)橫斷面の形狀は

扁平なる皿狀を呈するを普通とす、故に此横斷面を代表すべき幾何學的の形狀は墺國の大家シーデック氏の云へるが如く(R. Sedek-Die Natürlichen Normalprofile der fließenden Gewässer, Wien, 1902. s. 9—10)水深は一般に水面幅の二乃至四パーセントを超過することなきが故に圓、橢圓、パラボラ、若くはハイパーボラの何れとするも其相互間の差異は極めて小なるものなりとす、低水部は稀れなる場合を除き多くは水面下に在るを以て其横斷面の形狀は水流の作用に依りて形成せらるゝものとす、即ち水流と土砂との平衡に依りて定まり流水の作用は繼續的なり

中水部

中水部とは低水部以上岸一杯の水位以下にある部分にして其兩岸の法は低水部に於けるよりも急なるを常とす、其法は一般に曲線を爲せりと雖も其屈曲は極めて小にして從て場合に依りては直線と見做すも差支へなきこと多かるべし、故に此部を代表すべき形狀は圓形パラボラ若くは梯形とするも相互間の差異は甚しく大ならざるべし、然れども其形狀は低水部に於ける扁平なるに反して稍縱に細長くなるべし、此部は時々水を以て充たさるゝのみにして水を以て被はれざることも多きが故に其形狀は一方にては水流の作用に依り他方にては雨露等大氣中に於ける天然力に依りて形成せらる、故に流水の作用は半繼續的と稱することを得べし

以上の低水部及中水部は河川に依りて徐々に土地内に切込まれたる部分にして兩岸の土地より以下に位するものとす

高水部

河川の水位が岸一杯の水位を超過すれば水は兩岸の殆ど水平なるか若くは僅かに河川に向て傾斜せる土地に氾濫す、此の如くにして水に被はるゝ部分を高水部と稱す、又其區域を氾濫區域と云ふ、堤防を有する河川にては其氾濫區域は堤防によりて制限せらる、其堤防の外側にある區域を制限氾

濫區域 (Eingeschränkte Überschwemmungs Gebiet) と稱す、又堤防の存在せざる場合若くは存在するも破堤したる場合には水は天然の地勢に從て其達すべき部分に擴がる、此際水に被はるべき區域を自然氾濫區域 (Natürliche Überschwemmungs Gebiet) と稱す、高水部に於ける兩岸は山間部なる河川にては其傾斜急なりと雖も平地部に在りては概ね傾斜極めて小なるを常とす、堤防を有する河川にして堤外地殆んど水平なる場合には高水部の形狀を長方形又は梯形と假定するを得べく又兩岸傾斜せる土地なる時はパラボラ又は梯形と見做して可なるべし、何れにしても其形狀は極めて扁平なり、此部は稀れに流水に被はるゝことあるのみなるを以て流水の作用は即ち稀有的なり、

單一及複合形狀 (Simple and Compound Forms)

以上の如く河川横斷面は一般に三部より成るものと見ることを得べく又各部は各一個の幾何學的形狀を以て代表し得べしとすれば各部の形狀は單一なりと稱すべきも或は扁平或は縱長にして各部各別の形狀を呈するが故に之れより成る横斷面は複合形狀なりと稱せざるべからず尤もある場合には低水部と中水部とは形狀に於て相融合して通して一個全一の形狀にて代表せしめ得べきことなり、此場合には低中兩部は單一形となれるなり、又山間部の河川に於て往々見る如く低中高三部共に同一の形狀となることあり、此場合には横斷面は單一形を呈すべきなり、

横斷面積

横斷面積は水面と濡潤周界とにより圍まれたる面積なるが故に其大さは水位に關係す、水位上昇すれば横斷面積は大となり水位下降すれば横斷面積は小となる、横斷面に對しある幾何學的の形狀を假定する時は水位と横斷面積との關係を兎に角ある代數學的の方程式として表はすことを得べし此場合に低水部に關するものは一般に其關係割合に簡單となる、横斷面が單一形を呈せる場合には其單一形なる部分に關し亦全樣なり、然れども横斷面が複合なる場合には其關係は稍複雜となり質

用に適せざるに至る、此件に關しては尙後に擧けむとする例に就て明瞭となるの機あるべし

横斷面積曲線 (Area Curve)

今暫く以上に略述したるが如き水位と横斷面積との理論上の關係を看過し去り專ら實際的歸納的方面より以上兩者の關係を觀察せむ、直角座標を用ひ圖上に於て水位を縱軸に、之に對する横斷面積を横軸に取り點を入るゝ時は點は略線狀に排列すべし、其點の平均位置を通して劃きたる線を横斷面積曲線と稱す、即ち水位と横斷面積との關係を示す線なり、著者は先きに本誌第三四五卷に於て流量曲線、第三四九卷に於て平均速度曲線に就て論述する所ありしが此れに關聯して次に少しく横斷面積曲線に就て述べむとす、

横斷面の複合なる場合には各部各別の横斷面積曲線を有すべし北米合衆國地質調査局內水利部にては流量平均速度兩曲線と同樣に横斷面積曲線に就ても圖上に於て各點の平均位置を通じて推斷的に劃したる線を直ちに利用するの方法を採れり (Water-supply Papers; Hoyt and Grover-River discharge)

此方法は長所と共に短所も有せり、余は已に論述せる流量及平均速度兩曲線の例に倣ひ方程式に依り横斷面積曲線を算出せむとす、其算出の方法は以上兩曲線に於けると同樣なり、次に先づ數例を擧げむ

第一例　Kiskiminetas River, Avonmore, Pa.

本例に用ひたる材料の出所は本誌第三四五卷「河川に於ける流量曲線の方程式」中第二例、仝上第三四九卷「水位と平均速度との關係」中第六例として撰びたるものに同一なり

次表に計算の材料及結果を掲ぐ(第一圖)

第一表

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
番號	水位 h(呎)	水面幅 w(呎)	横斷面積 F(平方呎)	$F^{\frac{2}{3}}$	計算せる $F^{\frac{2}{3}}$	計算せる F	實測及計算兩Fの差	$\frac{\text{仝上}\times 100}{\text{實測F}}$	直線式にて計算せる平均速度V	横斷面積及平均速度兩曲線より計算せる流量 Q=FV	流量曲線より計算せる流量 Q	實測流量 Q
1	1.61	185	199	34.09								
2	2.86	382	508	63.67	70.86	596	+88	17.4	1.37	817	686	628
3	2.89	312	434									
4	3.26	384	629	73.41	79.77	712	+83	13.3	1.46	1,040	921	976
5	4.36	391	1,100	106.56	104.26	1,065	−35	3.2	1.68	1,789	1,746	1,780
6	6.06	398	1,810	148.52	142.12	1,694	−116	6.4	2.04	3,456	3,537	3,770
7	7.17	403	2,250	171.71	166.84	2,155	−95	4.2	2.27	4,892	5,044	5,250
8	9.15	408	3,140	214.43	210.94	3,064	−76	2.4	2.68	8,212	8,392	8,600
9	9.79	417	3,460	228.76	225.19	3,379	−81	2.3	2.81	9,495	9,657	9,630
10	9.79	417	3,460			3,379			2.81	9,495	9,657	9,400
11	9.85	417	3,460	228.76	226.53	3,409	−51	1.5	2.82	9,613	9,779	9,660
12	10.08	418	3,580	234.02	231.65	3,526	−54	1.5	2.87	10,120	10,258	9,880
13	10.26	416	3,550	232.71	235.66	3,618	+68	1.9	2.91	10,528	10,640	11,000
14	10.32	419	3,710	239.65	236.99	3,648	−62	1.7	2.92	10,652	10,770	10,500
15	10.74	422	3,880	246.92	246.35	3,867	−13	0.3	3.01	11,640	11,696	11,500
16	12.35	424	4,760	282.97	282.20	4,741	−19	0.4	3.34	15,835	15,598	15,700
17	12.81	429	4,870	287.31	292.44	5,001	+131	2.7	3.43	17,153	16,814	17,000
18	13.64	429	5,280	303.22	310.93	5,483	+203	3.8	3.61	19,794	19,130	19,200
平均		410.88						4.2				

上表中No.1は水面幅及横斷面積より想像し得る如く低水部に屬するものにして其他は中水部に屬

するものとす、而して其内No.3は其他のもの特にNo.2に比較するに水位大なるにも拘はらず水面幅及斷面積は共に小なり是れ普通の狀況に於ては在り得べからざる所なり、今之を原始の報告Water-supply Paper, No.243)に就て檢するにNo.3は一九〇七年八月十三日の實測に係るものにして其れより以前の實測に係れるものは唯No.5一個あるのみ、他は凡て夫れより以後の實測に係る、故に想像するにNo.3の實測以後に於て間も無く河岸の一部崩壞せるか若くは水流の爲めに削流せられたるかの事故ありたる爲めに以上の如き結果を來せしならん、然れども其事實明瞭ならず、兎に角No.3は他のものと並立すべからざる結果を示せるを以て之を省略せり、又No.9とNo.10とは横斷面積に關しては同一物なるを以て其内一個を取る、此くして殘り十五個の結果に就て之を圖面より見るに横斷面積曲線の大勢は縱軸に凸面を向くるパラボラなるが如し、依りて其方程式として次の式を假定す

$$F^{\frac{3}{2}}=ah+b$$

此内Fは横斷面積hは量水標の示す水位なり、a及bは常數あるを以て以上十五個の結果を用ひ最小二乘法に依り其常數を計算する時は次の公式を得べし

$$F^{\frac{3}{2}}=22.268h+7.170$$ (單位呎)

此れに依り計算せるF、實測及計算兩Fの差及其差の實測に對する百分比は上表中に示すが如くにして差の百分比の平均は四、二パーセントとなれり

更に上表中第九欄に就て觀るにFの差の百方比は水位の小なるに從て大なるが如し、特に水位の低き時に最も大なり、是れ一は最小二乘法なる算法の性質に歸すべきも一は低水部と中水部との區別明劃ならずして徐々に變遷するが爲めなり

流量は横斷面積と平均速度との相乘なり、吾人は以上に横斷面積曲線を得たり、而して平均速度曲線

は已に本誌第三四九卷「水位と平均速度との關係」中第六例に於て之を擧げたり、故に此兩者より流量を計算し得べき筈なり、第一表中第十欄は平均速度曲線の內直線式にて計算せるものを掲げたるものにして第十一欄は之れに横斷面積曲線より計算せる横斷面積を乘したるものにして即ち流量なり、之れと比較する爲めに本誌第三四五卷「河川に於ける流量曲線の方程式」中第二例として出したる流量曲線より計算せる流量を第十二欄に、實測流量を第十三欄に列擧したり、此三者の流量を相比較するに大體に於て一致し其結果は先づ滿足すべきものなるを知るべし、然れども水位の小なる場合には横斷面の不規則あるが爲めに流量間の差異の稍大なるあるは止むを得ざる所なり、此不都合を除かんとすれば後に述ぶるが如く曲線に少許の修整を施せば滿足なるものとなる

又前出の第一表及本誌第三四五卷及第三四九卷中流量及平均速度に於ける各關係の表を比較するに横斷面の低水部より中水部に至る變遷の徐々なる爲めに換言すれば横斷面の理想的ならざる爲め若くは其不規則なる爲めに生ずる影響は横斷面積曲線に於て最も著しく顯はるるを見る、之れ其關係直接なるを以てなり、之に反して流量及平均速度兩曲線には其影響横斷面積曲線に於けるが如くに著明ならず、此れ其關係の直接ならざるに起因す、從て各計算せる横斷面積及平均速度の相乘より得たる流量は水位の小なる場合には流量曲線より計算せる流量よりも實測流量を距ること益大なりとす

低水部に於ける横斷面積曲線

前例中低水部に屬する横斷面積は唯一個に過ぎざるを以て曲線の大勢を知ること能はずと雖も中水部に於けると同樣の形を有する曲線となるものと假定し尚低中兩部の限界は水位二呎の處に在りと假定する時は低水部に於ける横斷面積曲線の公式を算出することを得るなり、即ち次の如し

$$F_3^2 = 45.18h - 38.65 \quad (\text{單位呎})$$

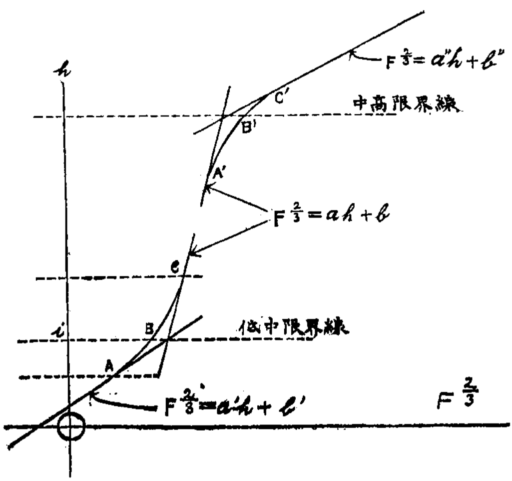
之れより横斷面積の零となるべき水位を求むるに $h=0.86$ を得、而して本誌第三四九卷「水位と平均速度との關係」中に述べたるが如く本例の場合に於て流量の零となるは $h=1.25$ の時にして平均速度の零となるは $h=1.45$ の時なり、即ち此場合には横斷面積よりも平均速度の方早く零となり從て少許の停滯水 (Ponded Water) あることを知るべし

三曲線の修整

流量、平均速度及横斷面積の三曲線は相互に相關聯するものなると言を俟たず、北米合衆國地質局内水利部にては三曲線共何等の公式を設定せず圖上に於て各點の平均位置を通して曲線を書き之を其儘夫れ〳〵の曲線として使用するの方法を採れるを以て多少任意に流るゝの弊あり從て各曲線間に衝突を生ずるを免れず、此不都合を避けんが爲めに各曲線を相互に照合し之を調整することをなせり、又流量曲線を實測の範圍以外に延長するには平均速度及横斷面積兩曲線に依れり、此の如きは方程式に依らざる方法を採用する場合には必要にして且つ最も信頼すきべ方法なりとす

各曲線に方程式を假定したる場合に、第一表に於けるが如く相互間の關係は大體に於て滿足すべきものありとせば各曲線を相互に調整するの餘地なく又其必要なしとす、然れども横斷面の不規則なることより生する誤差の多少大あるに忍び能はざる如くんば曲線

第二圖



に少許の修整を施せば可なり、其方法次の如し

第二圖に於て例へば $F^{\frac{2}{3}}=ah+b$ なる方程式により低中高各部に於ける横断面積曲線を得たりとすれば座標の軸には h と $F^{\frac{2}{3}}$ を取り直線として圖上に入る、第一例に於ては低中兩部の限界を水位二呎の處に在りと假定したるが故に以上兩部の横断面積曲線は水位二呎の處にて交錯せざるべからず而して横断面が假定の通りに水位二呎の處にて低水部の形狀より中水部の形狀に明劃に變化せば以上の直線の儘にて何等の不都合なき筈なり、然るに横断面の形狀は與へられ居らざるに依り不明なるも第一表に顯はるゝが如く水位の低き間は實測及計算兩斷面積の比較差大なるは低水部と中水部との區劃線明瞭ならずして徐々に變化するが爲めなり、今AC間に於て其變化あるものとすればABCの如き少許の曲線を両直線に接して其間に挾めば之れ即ち修整線にしてAC間の横断面積曲線はABCの曲線とある、而してABC線の入れ方は實測及計算兩 $F^{\frac{2}{3}}$ の差のある可く小なるやうにすべきは勿論なり、又はABC線は扁たき曲線なるを以て之を直線とするも實際上左程の差異あらざるべし、中水部より高水部に變化する附近に於ても亦同様なり

此の如くにして横断面積曲線に修整を施せば他の平均速度及流量兩曲線にも之に相當する修整を施さゞるべからず、然れども此場合に其修整の小なるべきこと即ち修整曲線は短かくして且つ本曲線を距ること小なるべきは前述せる所により想像し得るなり

第二例　Sacramento River, Red Bluff, Cal.

材料の出所は本誌第三四五卷「河川に於ける流量曲線の方程式」中第三例及本誌第三四九卷「水位と平均速度との關係」中第三例として選ひたるものに同一なり

計算の材料及結果は第二表に擧ぐ（第三圖）

第二表

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
番號	水位 h(呎)	水面幅 w 呎	横斷面積 F(平方呎)	計算せる F	實測及計算兩Fの差	同上×100 / 實測F	直線式にて計算せる平均速度 V	横斷面積及平均速度兩曲線より計算せる流量 FV=Q	流量曲線より計算せる流量 Q	實測量 Q
1	1.20	497	3,430	3,462	+32	0.9	1.39	4,812	4,816	4,230
2	1.70	499	3,770	3,725	−45	1.2	1.59	5,923	5,898	5,950
3	1.70	495	3,750	3,725	−25	0.7	1.59	5,923	5,898	5,570
4	1.70	493	3,760	3,725	−35	0.9	1.59	5,9[illegible]3	5,898	6,270
5	3.47	523	4,480	4,653	+173	3.9	2.30	10,702	10,609	10,200
6	3.80	510	4,920	4,826	−94	1.9	2.43	11,727	11,621	12,8[illegible]0
7	4.70	527	5,310	5,298	−12	0.2	2.79	14,781	14,665	14,900
8	5.10	528	5,520	5,508	−12	0.2	2.95	16,249	16,129	16,400
9	6.70	540	6,210	6,347	+137	2.2	3.59	22,786	22,710	21,200
10	7.65	542	6,880	6,845	−35	0.5	3.97	27,175	27,126	28,800
11	8.95	546	7,640	7,527	−113	1.5	4.49	33,79[illegible]	33,819	35,2[illegible]0
12	9.10	548	7,700	7,606	−94	1.2	4.55	34,607	34,670	36,100
13	10.20	555	8,0[illegible]0	8,182	+122	1.5	4.99	40,828	40,966	37,400
平均		523.31				1.3				

第三圖に於て觀るに水位と横斷面積との關係は直線として差支へなきが如く見ゆるに依り次の式を假定す

$$F = ah + b$$

上表中の h 及Fを使用し最小二乗法に依り上式を計算する時は次の式を得べし

$$F = 524.46h + 2,832.99 \quad (\text{單位呎})$$

之れ即ち此處に於ける横斷面積曲線にして之れより計算せるF、實測及計算兩Fの差並に其差の實測に對する百分比は前表中の5、6及7の三欄に擧ぐるが如くにして差の百分比の平均は一、三パーセントとなる

尙前例に於けるが如く第八欄に本誌第三四九卷中に出したる平均速度曲線の內直線式にて計算せる平均速度を、第九欄には前項の平均速度に以上の横斷面積曲線より計算せる横斷面積を乘して得たる流量即ち第五、第八兩欄の數字を相乘したるものを、第十欄には本誌第三四五卷中に出したる流量曲線より計算せる流量を、最後の第十一欄には實測流量を揭げたり、今此等三種の異なれる流量即ち第九、第十及第十一の三欄の數字を比較するに其相互間の差は小にして結果は甚た滿足なりと云はざるべからず

此處に於ける直線式の平均速度曲線は次の如し

$$V=0.4h+0.907$$ (本誌第三四九卷)

之れを前出の横斷面積曲線に乘する時は次の如

$$Q=FV=(524.46h+2{,}832.99)(0.4h+0.907)$$
$$=209.78h^2+1{,}608.88h+2{,}569.52$$

又流量曲線は次の如し

$$Q=218.33(h+3.5)^2$$ (本誌第三四五卷)
$$=218.33h^2+1{,}528.31h+2{,}674.54$$

之を以上の式に比較するに精密に一致することは勿論期すべからざるも大體に於て兩者の數字は相近似することを見るを得べし

第三例　最上川新渡

材料の出所は本誌第三四九卷「水位と平均速度との關係」中第八例として引用せるものに同し、此處にては流量の測定には浮子を使用せしを以て次の横斷面積は上下兩横斷面に於ける面積を平均せしものなり

計算の材料及結果は次表の如し(第四圖)

第三表

番號	水位 h(尺)	横斷面積 F(平方尺)	計算せる F	實測及計算 Fの差	同上×100 / 實測F
1	3.86	5,107.8	5,305.7	+197.9	3.9
2	4.39	5,560.4	5,685.9	+125.5	2.3
3	5.28	6,300.2	6,324.4	+24.2	0.4
4	5.70	6,890.8	6,625.7	−265.1	3.8
5	6.64	7,322.5	7,300.1	−22.4	0.3
6	7.85	8,214.6	8,168.2	−46.4	0.6
7	8.87	9,122.9	8,899.9	−223.0	2.6
8	10.84	10,113.2	10,313.3	+200.1	2.0
9	10.58	10,217.9	10,126.7	−91.2	0.9
10	13.47	12,099.5	12,200.1	+100.6	0.8
平均					1.8

第四圖に於て見得べきが如く水位と横斷面積との關係は直線として差支へなきが如きを以て其方程式を$F=ah+b$と假定し最小二乘法に依り計算する時は次の如き式を得べし

$$F=717.42h+2,536.43$$ (單位尺)

之れにて計算せるF、實測及計算兩Fの差及其差の實測に對する百分比は前表に擧ぐるが如くにし

て差の百分比の平均は一、八パーセントとなれり

第四例　赤川奥井新田

材料の出所は本誌第三四九卷水位と平均速度との關係中第九例として選びたるものに同一なり、次の横斷面積は前例に於けるが如く上下兩横斷面積の平均なり、

計算の材料及結果は次表の如し(第五圖)

第四表

番號	水位 h(尺)	横斷面積 F(平方尺)	計算せる F	實測及計算Fの差	同上×100 / 實測F
1	5.85	1,328.8	1,324.6	−4.2	0.3
2	6.64	1,566.9	1,568.1	+1.2	0.1
3	7.39	1,796.0	1,799.4	+3.4	0.2
4	8.82	2,243.8	2,240.2	−3.6	0.2
5	9.67	2,499.1	2,502.3	+3.2	0.1
6	10.17	2,658.1	2,655.4	−2.7	0.1
7	11.91	3,191.1	3,192.8	+1.7	0.1
平均					0.2

此場合に於ても水位と横斷面積との關係は直線として可なるを以て $F=ah+b$ に依り計算する時は次式を得

$$F=308{\cdot}28h-478{\cdot}80$$　　單位尺)

之れに依り計算せるF等は前表中に擧ぐるが如くにして實測及計算兩Fの差の實測Fに對する百分比の平均は〇、二パーセントとなる

第五例　雄物川新川橋

本例に使用せる材料の出所は本誌第三四九卷「水位と平均速度との關係」中第十例として出したるものに同一なり、次の横斷面積は前二例に同じく上下兩横斷面積の平均なり

計算の材料及結果は次表の如し(第六圖)

第　五　表

番號	水位 h(尺)	横斷面積 F(平方尺)	$F^{\frac{2}{3}}$	計算せる $F^{\frac{2}{3}}$	計算せる F	實測及計算Fの差	同上×100 / 實測F
1	8.05	6,147.5	335.58	336.79	6,180.7	+33.2	0.5
2	8.38	6,380.7	344.02	344.64	6,398.1	+17.4	0.3
3	8.53	6,487.8	347.86	348.20	6,497.5	+9.7	0.1
4	8.63	6,558.0	350.36	350.58	6,564.2	+6.2	0.1
5	11.28	8,447.8	414.79	413.60	8,411.4	−36.4	0.4
6	11.56	8,620.9	420.44	420.26	8,615.4	−5.5	0.1
7	11.97	8,930.5	430.44	430.01	8,917.0	−13.5	0.2
8	12.24	9,142.7	437.24	436.43	9,117.4	−25.3	0.3
9	11.73	8,773.3	425.38	424.30	8,740.0	−33.3	0.4
10	11.39	8,527.1	417.38	416.21	8,491.2	−35.9	0.4
11	11.29	8,454.2	415.00	413.84	8,418.8	−35.4	0.4
12	11.13	8,339.4	411.23	410.03	8,30[illegible].8	−36.6	0.4
13	13.42	9,989.0	463.82	464.49	10,010.7	+21.7	0.2
14	13.75	10,224.5	471.08	472.33	10,265.2	+40.7	0.4
15	13.96	10,388.8	476.11	477.33	10,428.6	+39.8	0.4
16	14.54	10,831.9	489.56	491.12	10,883.8	+51.9	0.5
17	14.66	10,911.7	491.97	493.97	10,978.7	+67.0	0.6

河川横断面の天然形狀　

番號	水位 h(尺)	横断面積 F(平方尺)	$F^{\frac{2}{3}}$	計算せる $F^{\frac{2}{3}}$	計算せる F	實測及計算Fの差	仝上×100 / 實測F
18	15.15	11,302.5	503.62	505.63	11,369.7	+67.2	0.6
19	15.15	11,276.2	502.85	505.63	11,369.7	+93.5	0.8
20	16.16	12,231.4	530.85	529.64	12,189.1	−42.3	0.3
21	17.37	13,182.7	558.05	558.42	13,195.9	+13.2	0.1
22	17.49	13,355.7	562.97	561.27	13,297.1	−58.6	0.4
23	17.54	13,421.7	564.78	562.46	13,339.4	−82.3	0.6
24	9.26	7,003.8	366.06	365.66	6,992.2	−11.6	0.2
25	8.92	6,763.1					
26	8.92	6,763.1	357.63	357.48	6,758.9	−4.2	0.1
27	8.92	6,763.1					
28	13.18	9,831.0	458.91	458.78	9,826.7	−4.3	0
29	13.28	9,901.6	461.20	461.16	9,903.2	−1.4	0
30	13.34	9,949.3	462.59	462.59	9,949.3	0	0
31	12.91	9,630.1	452.64	452.36	9,621.1	−9.0	0.1
32	12.68	9,462.6	447.38	446.89	9,447.2	−15.4	0.2
33	12.55	9,368.0	444.39	443.80	9,349.3	−18.7	0.2
平均							0.3

以上實測の結果の内 No.6. 25. 26 & 27 は全く同一物なるにより一個と見做す、圖面より見得べきが如く此場合には横断面積曲線はパラボラとなるべきを以て次の式を假定す

$$F^{\frac{2}{3}}=ah+b$$

此を條件の方程式として上表中の h と $F^{\frac{2}{3}}$ とを以て最小二乘法に依り計算する時は次の如くなる

$$F^{\frac{2}{3}}=23.779h+145.388$$　（單位尺）

之れに依り計算せる $F^{\frac{2}{3}}$ 及Fは前表中に列記するが如くにして實測及計算兩Fの差の實測Fに對する百分比の平均は〇、三パーセントとなれり

實測の總括

以上の例は其數僅少なりと雖も横斷面積曲線の形勢を察するに足るべし、而して五例中に於て Kiskiminetas River, Avonmore 及雄物川新川橋の三個所にては横斷面積曲線はパラボラとなり次の形式の方程式を取れり

$$F^{\frac{2}{3}}=ah+b$$

他の三個所即ち Sacramento River, Red Bluff 最上川新渡及赤川奥井新田に在りては横斷面積曲線は直線となり其方程式の形式は次の如し

$$F=ah+b$$

即ち之を概括すれば一般に横斷面積曲線は次の形式の方程式を以て表はすことを得べし

$$F^{n}=ah+b$$

此式中 n は一の指數にして前例に於ては或は $\frac{2}{3}$ 或は1となれりと雖も其他の價値を取り得ることも亦之れ有るべし、然れども1より大なる數となることは普通の場合には先づ無きものとす、其理由は後に説明する所の如し

以上は實測の結果より歸納的(Empirically)に觀察して到達したる所のものにして抽出せる横斷面積曲線より計算したる横斷面積と實測同上との差の後者に對する百分比は大體に於て甚だ小なることとは以上各表に於て明かなり、換言すれば以上の方法に依りて得たる横斷面積曲線は善く實際の事實を顯はすものと稱すべし

河川横斷面の天然形狀

次には少しく理論的方面を考察せむ

水面幅と水位との關係

横斷面の形狀が長方形なる時は水面幅は水位に關係なく一の定數なるも横斷面の形狀がパラボラ梯形等の場合には水面幅は水位の上るに從て增大す、今Wを水面幅とする時は

長方形の場合には $W=b$ となる、但し b は一の常數なり

パラボラの場合には(但し此パラボラは垂直軸を有するものと假定す)

$$W=A\sqrt{T}=A(h\pm Z)^{\frac{1}{2}}$$

Tは最大水深即ちパラボラの頂點より水面迄の垂直距離にして h は量水標の示す水位Zは量水標の零點とパラボラの頂點との間の距離なり

上式は次の如くに變化することを得

$$W^2=ah+b$$

次に梯形の場合には(簡單の爲めに梯形の兩側邊は同じ傾斜を有するものと假定す)

$$W=\frac{2}{\tan\theta}\cdot T=\frac{2}{\tan\theta}(h\pm Z)=ah+b$$

θ は梯形の側邊が水平線となす角度にして兩側邊を延長して會合せしむる時其會合點より水面迄の垂直距離をTとす(本誌第三四五卷「河川に於ける流量曲線の方程式」中第三圖及第四圖參照)

即ち水面幅と水位との關係は横斷面の形狀長方形なる時は水位軸に平行せる一の直線となり横斷面の形狀パラボラなる時は又一のパラボラとなる、而して此パラボラはWの指數1より大なるを以て水位軸に凹面を向くるものとなる、次に横斷面の形狀梯形なる時は一の直線となる

以上の關係は必らずしも河川に於ける一の全横斷面が夫れ〲一の長方形、パラボラ若くは梯形と

あらざるも亦適用する所のものにして換言すれば横斷面の單一形なるを必要とせず、唯河の岸の一部が垂直あるか(長方形)パラボラの腕の一部なるか(パラボラ)若くは傾斜せる直線(梯形)あるかにてあれば其範圍内に於て以上の關係は成立するものとす、即ち横斷面の複合形の場合にも其を構成する一部の形狀に從ひ以上の關係を適用して可なり

更に之を以上に引用せる實例の場合に觀るに水位を縱軸に、水面幅を横軸に取り實測の結果を圖上に入るゝに Kiskiminetas River, Avonmore にては第一圖に於けるが如く低水部に屬する No. 1 及他のものと兩立することと能はざる結果を示せる No. 3 を除き其他のもの即ち中水部に於けるものは縱軸に對し僅かに凹面を向くるパラボラ狀に排列するが如しと雖も其屈曲たるや極めて僅小にして之を直線と見做すも不可なきに似たり、次に W^2 を横軸に取り再び圖上に入るゝに其關係は直線と見做し得べし、之に依りて之を觀れば該横斷面の中水部はパラボラ形なれども之を梯形と見做すも支障なきが如し

次に Sacramento River, Red Bluff に在りては第三圖に於けるが如く h と W 及 W^2 との關係を圖上に入るゝに其形勢稍不規則ありと雖も大體に於て前例と同一の關係に在るを見るに足るべし

水面幅と横斷面積曲線との關係

水面幅と水位との關係は以上の如し、次に水面幅と横斷面積曲線との關係を考察せんに先づ横斷面の形狀をパラボラとする時は次の關係あり

$$F=\frac{2}{3}AT^{\frac{3}{2}}\ ;\ W=A\sqrt{T}\ ;\ T=h\pm Z$$

之を微分する時は次の結果を得

$$\frac{dF}{dh}=W$$

次に横斷面の形狀を長方形とする時は次の關係あり

$F=WT$ ； $T=h\pm Z$　此場合にはWは常數なり

之れより同様にして次の結果を得

$$\frac{dF}{dh}=W$$

次に横斷面の形狀を梯形とする時は次の關係あり

$$F=\frac{T^2-T_0^2}{\tan\theta}\ ;\ W=\frac{2T}{\tan\theta}\ ;\ T=h\pm Z$$

（本誌第三四五卷河川に於ける流量曲線の方程式參照）

之れより同様に次の結果を得

$$\frac{dF}{dh}=W$$

即ち何れの場合に於ても微分の結果は同一にして之を概言すれば横斷面の形狀の何たるを問はず水位と共に横斷面積の變化する割合は水面幅に等しと云ふに歸着す

又 $\frac{dF}{dh}$ は横斷面積曲線が水平線となす角度の Cotangent（或は垂直線となす角度の Tangent）なるを以て玆に横斷面積曲線に關する一の重要なる定理を得べし、即ち横斷面積曲線中ある點に於て其曲線と水平線となす角度のコタンゼントは其點に於ける水面幅に等しと云ふこと之れあり

又 $\frac{dF}{dh}$ は横斷面積の増加率（Increment）を示すものにして水位の上るに從ひ横斷面積の増加する割合は水位の差に水面幅を乘したるものなるを以て増加率は水面幅に等しきものなること明なり

一般に増加率の漸增及漸減、曲線屈曲の方向

以上に於て横斷面積曲線に對する次の如き一般の方程式を得たり

$$F^n=ah+b$$

又本誌第三四九卷「水位と平均速度との關係」中に於て平均速度曲線及流量曲線は各次の如き一般形式の方程式にて表はすことを得る旨を述べたり

$$V^n=ah+b$$

$$Q^n=ah+b$$

即ち三者同一形式の曲線となるを見る

次にnの數値が1より大なる時は曲線は水位軸(縱軸)に對し凹面を向くるものとなり平均速度曲線は此種の曲線に屬す、又nの價1より小なる時は曲線は水位軸に對し凸面を向くるものとなり流量曲線の如きは此種のものに屬するものなることも已に本誌第三四九卷中に略述せり

今茲に横斷面積曲線は以上兩種の内何れに屬すべきものなるやを論するに先ちnの數値が1より大若くは小なるに從ひ曲線屈曲の方向を異にする所以を試みに數學的に考察せんとす

以上三個の曲線は勿論次の一般形式の方程式に包含せらる

$$X^n=ah+b$$

之を微分すれば

$$nX^{n-1}dX=adh$$

$$\frac{dX}{dh}=\frac{a}{nX^{n-1}} \quad\cdots\cdots(1)$$

(1)式は即ちhと共にX(本問題に就ては横斷面積、平均速度若くは流量の何れか一つ)の增加する割合を示すものなり

河川横断面の天然形状

今 $1>n>0$ とすれば　$n-1=\text{negative}$　故に(1)式は次の如くになる

$$\frac{dX}{dh}=\frac{aX^{1-n}}{n}$$

此内 a は常數にして常に正なり、$1-n$ も正なるを以てXが大となるに從ひ $\frac{aX^{1-n}}{n}$ も亦増大す、即ち此場合には $\frac{dX}{dh}$ なる増加率はXと共に漸増することゝなる然るに $\frac{dX}{dh}$ は又曲線の水平線となす角度のコタンゼント(即ち曲線の垂直線となす角度のタンゼント)なるを以て此場合にはXの増大すると共に曲線の垂直線となす角度のタンゼントも亦漸次に増大す、此の如きは縦軸(Y)に凸面を向け横軸(X)に凹面を向くる曲線にして始めて然り得る所の事なり

次に $n>1$ とすれば $n-1=\text{Positive}$ なるを以て(1)式の右項はXが増大するに從て漸次に減少す、此場合には即ち増加率の漸減するものにして曲線の垂直線となす角度のタンゼントがXの大なるに從ひ漸減するが如きは縦軸に凹面を向け横軸に凸面を向くる曲線にして始めて然り得る所なり

次に中和の場合 $n=1$ なる時はXの價値の如何なるを問はず $X^{n-1}=1$ となるを以て(1)式の右項は常數となるべし、即ち増加率の常數なる場合にして曲線の水平軸若くは垂直軸となす角度の常數なるは直線にして始めて見る所のものなり

横断面積曲線は増加率漸増の種類に屬す

横断面積の増加率は水面幅に等しきことは已に前述せり、而して水面幅は普通の場合には水位の上ると共に増加するものなるが故に横断面積の増加率は漸増するものなること明かなり、從て横断面積曲線を表はす一般の方程式 $F^n=ah+b$ に於て n は1より大なる正數となることを得ざるものとす前出の數例は歸納的に善く之を證明す、故に又横断面積曲線は縦軸に凸面横軸に凹面を向くる曲線となる

以上は最も普通の場合なるが時として横斷面に懸蜒(Overhang)を呈せる特別の場合あり之れは山間部に稀に見ることあり、此の如き横斷面に在りては水面幅は水位の上るに從て却て減少す、然る時は横斷面積の增加率は漸減となり從てnはIより大となり横斷面積曲線は普通の場合と其屈曲を反對にすべし

理論的曲線と實際的曲線との矛盾

理論上より云へば横斷面の形狀パラボラなる時は$T^{\frac{3}{2}}$に比例することとなり梯形なる時はT^2に比例す、從て何れの場合にもFとTとの關係はパラボラとなるべし其關係の直線となるは唯横斷面の形狀の長方形なる場合に限るものとす、又横斷面增加率の水面幅に等しき點より見るも横斷面曲線は水面幅の常數(即ち長方形)ならざる限りは直線となること能はざるものなり

然るに之を實際的方面より觀るに前出五例中Kiskiminetas River, Avonmore及雄物川新川橋の二例に於ては横斷面積曲線はパラボラとなれるも他の三例に於ては直線として不可なく其直線式により計算せるFは實測の範圍内に於ては實測Fに比して著しき差異を示さず、然らば三例の場合に於ては横斷面の形狀長方形なりやと云ふにSacramento River, Red Bluffにては前に述べたるが如くパラボラ若くは梯形と見做すべきものなり、最上川新渡及赤川奧井新田に於ても亦同樣なり

茲に於て理論的横斷面積曲線と實際的同上と衝突することゝなる、而して其理由は蓋し次の如く說明すべきものなるべし、河岸の傾斜緩にして水面幅の增加率大なる横斷面若くは然らさるも河幅に比して横斷面積の割合に小なるが如き(淺き扁たき)横斷面(例へば第一例に擧げたる如き)にては横斷面積曲線はパラボラとなるも河岸の傾斜急にして水面幅の增加する割合等しからざる横斷面にては横斷面積の增加率は漸增すべき筈なるも其漸增たるや極めて徐々にして增加率を常數と見做す

時との差は全横斷面積に比して一パーセントの分數に過ぎざるが如き處にては横斷面積曲線は事實上殆んど直線となるべし、此傾向は河岸の傾斜急にして河幅に比し横斷面積の割合に大なる(深き縱長き)横斷面(例へば第二例に示せる如き)に於て益顯著となる

之を少しく數字上に徵せんか第二例として撰ひたる Sacramento River, Red Bluff に於ける實測の結果に就て水位の低き場合、中位の場合及最高の場合に於て水位一呎に對する横斷面積の増加率を計算するに次の如し

1. $h=1.20$; $W=497$; $h=1.70$; $W=499$ } 水位一呎に就き横斷面積増加率 $=498$ 平方呎
2. $h=3.80$; $W=510$; $h=4.70$; $W=527$ } 仝上 $=576.11$ 〃
3. $h=9.10$; $W=548$; $h=10.20$; $W=555$ } 仝上 $=501.36$ 〃

而して横斷面積曲線 $F=ah+b$ の内 $a=524.46$ なる數値は常數増加率にして増加率の平均を示せるものと見做し得べきが故に之れと前顯の各水位に對する増加率との差の横斷面積に對する比を求むるに次の如し

1. $h=1.20$; $\dfrac{524.46-498}{3.430} = -0.8\%$
2. $h=3.80$; $\dfrac{576.11-524.46}{4.920} = +1.0\%$
3. $h=9.10$; $\dfrac{524.46-501.36}{7.700} = -0.3\%$

即ち各水位に對する增加率相互間の差も比較的小にして又實際の增加率と計算增加率との差の全横斷面積に對する比は多くも一パーセントを超えず從て增加率は常數即ち横斷面積曲線を直線と見做すも實際上には殆んど不可なきを見るに足るべし

玆に注目すべきは先きに實測の結果より最小二乘法に依り計算せる横斷面積曲線中 $a=524.46$ なる數値は第二表中に與へたる水面幅の平均數に殆んど等しきこと之れなり之れは横斷面積曲線を直線とせば a の數値は平均增加率と見做し得べきものにして一方水面幅は横斷面積の增加率を示すものなることは來る當然の結果なり

更に第一例に就て前同様の事實を見るに次の如し

1. $h=3.26$; $W=384$ } 水位一呎に就き横斷面積增加率 $= 352.27$ 平方呎
   $h=4.36$; $W=391$ }

2. $h=12.35$; $W=424$ } 仝上 $= 927.17$ 〃
   $h=12.81$; $W=429$ }

先づ增加率相互間の差の極めて大なるに注目せざる能はず次に平均增加率として水面幅の平均數410.88(第一表)を取り之を前記のものと對照するに

1. $h=3.26$; $\dfrac{410.88-352.27}{629} = -9.3\%$

2. $h=12.35$ $\dfrac{927.17-410.88}{4{,}760} = +10.8\%$

即ち何れも平均値より著しき差異を示せり此の如き場合には增加率に平均値を用ゆること能はず換言すれば横斷面積曲線は事實上にも到底直線となること能はざるは當然にあらずや

水面幅と横断面積とより算出せる横断面積曲線

更に一歩を進めて理論的公式より横断面積を算出するの方法を論じ理論的横断面積曲線の實際的横断面積曲線に比し、必ずしも優秀ならざるの例を擧げんとす

横断面積曲線は一般に次の方程式にて表はし得るものなることは已に述べたり

$$F^n = ah + b$$

然る時は(1)式より

$$\frac{dF}{dh} = \frac{a}{nF^{n-1}} = W$$

今$\frac{a}{n} = \alpha$と置けば上式は次の如し

$$\alpha F^{1-n} = W$$

此ロガリズムを取れば

$$\log\alpha - n\log F + (\log F - \log W) = 0$$

此方程式は横断面積曲線の垂直線となす角度のタンゼントは水面幅に等しと云ふ定理より導きたるものなれば全く理論的のものあり而して此に據り實測のF及Wを用ひ最小二乘法を以てα及nを計算することを得るなり

今例として第二例に出したるSacramento River, Red Bluffに於ける結果を用ひ上式を計算する時は次の數値を得

$$n = 0.86 \fallingdotseq \frac{6}{7}$$

$$\log\alpha = 2.1974$$

$$\therefore \alpha = 157.54$$

故に上の方程式は次の如くなる

$$\therefore a=135.48$$

或は

$$2.1974+0.14\log F=\log W$$

$$157.54\ F^{0.14}=W$$

此等は即ち一種の理論的横斷面積曲線にしてある水位に對する水面幅を知れば夫れより横斷面積を算出し得るものとす、故に前に水面幅と水位との關係條下に述べたる如き水位と水面幅とを連結する方程式と共に以上の方程式を使用すべきあり、然れども此れにては水位より直に横斷面積を計算すること能はざるの不便あるを以て以上の方程式を尚少しく變化するを便とす、即ち $F^n=ah+b$ に於て n 及 a の數値を已に求め得たるを以て b の價を求むれば足れり

$$F^{0.86}-135.48h=b$$

此式に依り實測の h 及 F を用ひ各 b を計算し其總平均を取れば之れ即ち b の最も確からしき數値なり、其計算の結果次表の如し

第六表

Sacramento River, Red Bluff.

番號	水位 h	横斷面積 F	$F^{0.86}$	$F^{0.86}-135.48h=b$	計算せる $F^{0.86}$	同上 F	實測及計算 F の差	同上×100/實測F	實際的曲線より計算せる F
1	1.20	3,430	1,097	934	1,113	3,487	+57	1.7	3,462
2	1.70	3,770	1,190	960	1,180	3,732	−38	1.0	3,725
3	1.70	3,750	1,185	955	1,180	3,732	−18	0.5	3,725
4	1.70	3,760	1,188	958	1,180	3,732	−28	0.7	3,725
5	3.47	4,480	1,381	911	1,420	4,629	+149	3.3	4,653

番號	水位 h	横斷面積 F	$F^{0.86}$	$F^{0.86}-135.48h=b$	計算せる $F^{0.86}$	同上 F	實測及計算Fの差	$\frac{\text{同上}\times 100}{\text{實測F}}$	實際的曲線より計算せるF
6	3.80	4,920	1,497	982	1,465	4,800	−120	2.4	4,826
7	4.70	5,310	1,598	961	1,587	5,267	−43	0.8	5,298
8	5.10	5,520	1,652	961	1,641	5,476	−44	0.8	5,508
9	6.70	6,210	1,828	920	1,858	6,327	+117	1.9	6,347
10	7.65	6,880	1,997	961	1,986	6,837	−43	0.6	6,845
11	8.95	7,640	2,185	972	2,163	7,550	−90	1.2	7,527
12	9.10	7,700	2,200	969	2,181	7,624	−76	1.0	7,606
13	10.20	8,060	2,288	906	2,332	8,241	+181	2.2	8,182
平均				950				1.4	

上表中に於て見得るが如くbの數値は殆むど常數にして其總平均は$b=950$を得たり、依て横斷面積曲線は結局次の如くになる

$$F^{0.86}=135.48h+950$$

此式により計算せるF等は前表中に列擧す、而して實測及計算兩Fの差の前者に對する百分比の平均は一、四パーセントとなれり、之を前に歸納的に得たる直線式横斷面積曲線より計算せるもの(其價は比較對照に便する爲め上表中最後欄に再揭せり)に比するに差の百分比の平均は理論的公式に依る方却て實際的公式に依りたるものより大となれり、即ち理論的公式は必ずしも實際的公式に比し優秀ならざることを知るに足るべし

之を要するに理論上には矛盾ありと雖も横斷面積曲線を歸納的に直線とすることは强ち不可なく却て實際の事實に善く一致することを見るなり

nの數値は横斷面積曲線に在りては1より大となること能はざるものなることは己に前に述べたり

本例に於ては$n=0.86=\frac{6}{7}$となり、1より小なり之れは理論的曲線に關するものなるが故に當然の結果にして始めより豫期し得べき所なり而して此數値はパラボラ式横斷面積曲線に於けるnの數値即ち$\frac{2}{3}$よりも大となるべきことも圖上に於ける實測各點の排列の直線に近きことより直に推知し得る所なり

尚以上と全く別の形式を有する理論的横斷面積曲線に就ては後に論述すべし

ホイト及グローバー兩氏は横斷面積曲線の垂直線となす角度のタンゼントは水面幅に等しと云ふ理論を過當に重視し之れに基づく横斷面積曲線を訂正するの方法を述べたるも(Hoyt and Grover-River Discharge, New York, 1907, p. 83) 以上に論述せる理論に據れば之れは却て實際の事實に遠ざかるものなるを以て其方法は必ずしも取るに足らず

一般に低水部に於ける横斷面積曲線

横斷面の複合形なる場合に低水部は已に前に述べたる如く一般に扁平の皿狀を呈せるを以て兩側の傾斜は極めて緩にして水面幅に比し横斷面積は割合に小なり故に前項に述べたる理由に依れば此部に於ける横斷面積曲線はパラボラとなるべし之れを中水部に於ける同上の直線たると將たパラボラたるとに拘はらず然ることゝなるべきなり

横斷面積曲線の適用し得べき程度

横斷面積曲線も流量及平均速度の兩曲線と同じく空間的及び時間的に變化すべし以上三曲線は相互に關聯するものなりと雖も河川に變化ありたる時は直に横斷面積曲線に影響す故に時間的に適用し得べき程度より云へば大體に於て横斷面積曲線は最も短命にして流量曲線は最も長命なるべし

複合形の解剖

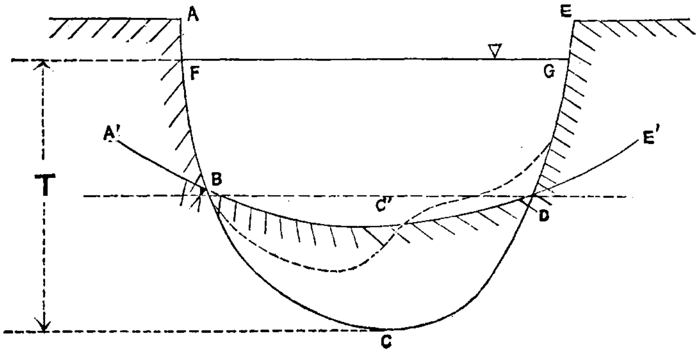
以上に於て横斷面積曲線に關する論述を一通り終れるを以て次に餘論として尚少しく横斷面の形

狀に關する事項を述ぶべし

河川横斷面の天然形狀

横斷面は一般に複合なることは已に述べたり、高水部は特別の位置を占むべきものなるに依り今之れは省略し中水部と低水部と複合なる場合を論せん、河川に顯はるゝ横斷面に於ては其複合の形狀種々ありと雖も就中最も多きは低水部中水部共に異種のパラボラより成れる場合なるべし、截斷パラボラは其特別なる場合の一なり、低水部は己に述べたる如く扁平なる皿狀の場合多く從て圓、楕圓パラボラ何れとも見做し得べし、中水部は梯形(或は寧ろ三角形の特別の場合即ち截斷三角形)又はパラボラの何れとも見做し得べきことも己に前例に於て之を見たり、故に低水部及中水部兩者共パラボラと見做すことを妨げざるなり、然る時は横斷面の一般形狀は次の圖の如くなる

第七圖



第七圖に於てABC′DEは河川の横斷面にしてBDを低中兩水部の限界線とすればABDEは即ち所謂中水部にしてBDC′は低水部に屬す、然る時AB及DEはABCDEなる垂直軸を有するパラボラの腕より成りBC′DはA′BC′DE′なる同樣のパラボラの一部より成るものと見做す、FGは水位線とす

FG＝水面幅W

面積FBC′DGF＝横斷面積F

面積BCDC′B＝F_0之は一の横斷面に就ては常數なり

面積FBCDGF＝F_1

FGよりパラボラの頂點Cに至る垂直距離＝T

ABCDEなるパラボラのパラメーターに比例する數＝A

然る時は

$$F_1=F+F_0 \quad \cdots\cdots(2)$$

$$F_1=\tfrac{2}{3}AT^{\frac{3}{2}}=\tfrac{2}{3}A(h+Z)^{\frac{3}{2}} \quad \cdots\cdots(3)$$

$$\therefore F=\tfrac{2}{3}A(h+Z)^{\frac{3}{2}}-F_0 \quad \cdots\cdots(4)$$

此れ即ち横斷面の複合形なる場合に於ける理論上の一般横斷面積曲線に對する方程式にして横斷面が單一形ある場合にはF_0は消滅して零となる此方程式を用ひんとする時Zを假定せざれば實測の結果より最小二乘法に依りA及F_0を計算すること能はざるものとす、然れども水面幅の關係を利用すれば(4)式よりAを除斥(eliminate)することを得るなり

$$W=AT^{\frac{1}{2}} \quad \cdots\cdots(5)$$

(3)及(5)より

$$\frac{F_1}{W}=\tfrac{2}{3}T \quad \cdots\cdots(6)$$

$$\frac{F+F_0}{W}=\tfrac{2}{3}(h+Z)$$

今 $\tfrac{2}{3}Z=Z'$ とすれば

$$\frac{F}{W}-\tfrac{2}{3}h=Z'-\frac{F_0}{W} \quad \cdots\cdots(7)$$

(7)式を條件の方程式とすれば實測の結果よりZ'及F_0を計算することを得べし、之れも即ち一種の横斷面積曲線にして實測の水位及横斷面積に加ふるに該曲線に最も密接の關係を有する水面幅の三者より成立する方程式あるが故に最も理想的なるかに見ゆ、試みに第一例として出したる Kiskiminetas River, Avonmore に於ける村料を用ひ最小二乘法に依り計算するに次の結果を得たり

$$\frac{F}{W}-\tfrac{2}{3}h=29.295-\frac{11,380.5}{W}$$

但し　$Z'=29.295$;　$Z=43.94$;　$F_0=11,380.5$ 平方呎

此の如くZ及F_0の大なる數となれることは中水部のパラボラの縱に甚だ細長きものあることを示すものなり

此式にはFとWとを含めるが故に單に此れのみにてはhに對するF若くはWを直ちに計算することを得ざるものとす、然れども已にZ及F_0を知り得たるが故に(4)式又は(5)式に依りAを計算することを容易なり、今簡單なる方を取り(5)式を用ひAを算出し其平均値を求むるに次の如し

$$A=56.5\ ;\ \tfrac{2}{3}A=37.67$$

茲に於て(4)式により各水位に對するFを計算することを得るなり、即ち(4)式の形狀に於ける横斷面積曲線は次の如し

$$F=37.67(h+43.94)^{\frac{3}{2}}-11,380.5 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

之れに依り計算せるF其他を次表に擧ぐ

第七表

Kiskiminetas River, Avonmore.

番號	水位 h	$\frac{F}{W}$	$\frac{F}{W}-\frac{2}{3}h$	$\frac{W}{\sqrt{T}}=A$	(8)に依り計算せるF	第一例中の式に依り計算せるF	實測F
2	2.86	1.33	−0.58	55.8	673	596	508
4	3.26	1.64	−0.53	55.9	832	712	629
5	4.36	2.81	−0.10	56.3	1,265	1,055	1,100
6	6.05	4.55	0.51	56.3	1,932	1,694	1,810

7	7.17	5.58	0.80	56.4	2,387	2,155	2,250
8	9.15	7.70	1.60	56.0	3,212	3,064	3,140
9	9.79	8.30	1.77	56.9	3,453	3379	3,460
11	9.85	8.30	1.73	56.9	3,480	3,[illegible]09	3,460
12	10.08	8.56	1.84	56.9	3,578	3,526	3,580
13	10.26	8.53	1.69	56.5	3,638	3,618	3,550
14	10.32	8.85	1.97	56.9	3,698	3,648	3,710
15	10.74	9.19	2.03	57.1	3,823	3,867	3,880
16	12.35	11.23	3.00	56.5	4,512	4,741	4,760
17	12.81	11.35	2.81	57.0	4,701	5,001	4,870
18	13.64	12.31	3.22	56.5	5,028	5,483	5,280
平均				56.5			

以上の諸公式の計算には Nos. 1. 3 & 10 の三者を除けり其理由は第一例の處に述べたると同一なり

上表に就て觀るに(8)式により計算せるFは水位の高き場合には其結果滿足なりと雖も水位低くなるに從ひ實測Fとの差益甚しくなる之れは低中兩水部の區劃截然たらずして實際に於ては徐々に變化するが爲めなり又(8)式及第一例中に出したる式により計算せるFと實測Fとを對照するに理想的なるべかりし(8)式は必ずしも歸納的公式に比し優秀ならざることを見るに足るべし之れも横斷面の形狀が理想的ならざるに歸因す

次に低水部の形狀を案するに實測の結果は唯 No.1 一個のみなるを以て詳くは不明なるも大體は次の如し即ち(6)式より

$$\frac{199}{185}=1.08=\frac{2}{3}T'; \quad \therefore \quad T'=1.62=h+Z$$

但しT'は水面よりA'B C'D E'なるパラボラの頂點C'迄の垂直距離なり

W'は低水部に於ける水面幅又A'は$A'BC'DE'$なるパラボラのパラメーターに比例する數なり

$$h=1.61 \quad \therefore \quad Z=0.01$$

$$W'=A'\sqrt{T'} \quad より \quad A'=145.67$$

此A'より水位二呎即ち低中兩水部界限線と假定せる處の水面幅を計算するに$W'=233'$を得更に中水部のパラボラより仝上の水面幅(即ちBDの長さ)を計算するに$W=383'$を得此兩者相一致せざる點より察するに此處に於ける横斷面は規則正しきものにあらざるべし依りて以上の點及中低兩部變遷の徐々なる點より此處に於ける横斷面の形狀は第七圖中點線にて示せる如きものならんと推定す

次に$T'=1.62$より横斷面積の零とあるべき水位を求むるに$2.00-1.62=0.38$を得第一例中の低水部に於ける横斷面積曲線より同上の水位は0.67あることを知れり横斷面の不規則なる割合には此點に於ては先づ善く一致するものと稱すべく兎に角水位〇五呎内外に於て横斷面積は消滅するものなること疑なし

若し第七圖に於て$A'BC'DE'$がBD線と一致すれば即ち截斷パラボラとなる之れは複合形の特別の場合の一なり

之を要するに以上のKiskiminetasの例に於ては吾人は横斷面の眞の形狀を知らずと雖も以上の方法に依れは横斷面積水面幅等より複合形を組成せる各パラボラを分解し得ることを知るなり

單複判定の要素

一の横斷面の單一形若くは複合形あるやは横斷面の形狀を一見すれば之を判定するに難からず然れども其區別の判明ならざる時又は横斷面の形狀の不明ある時と雖も横斷面積及水面幅より之を判定することを得

第七表中に擧げたる $\frac{F}{W}-{}^{3}/h$ ある數字は其判定の要素となるべきものにして甚だ重要なる性質を有す、第七圖に於て若しA′BC′DE′のパラボラがABCDEのパラボラに一致せる時は即ち單一形なる場合にして此場合にはF_0は零となるを以て(7)式に依り $\frac{F}{W}-{}^{3}/h$ は常數とならざるべからず、即ち此數字が常數となる時は橫斷面は單一のパラボラより成り夫れが常數とならざる時は橫斷面は複合のパラボラより成る、第七表に計算せる例は複合の場合にして表中 $\frac{F}{W}-{}^{3}/h$ の數字は常數ならざるを見る又其常數ならざる場合には橫斷面形の甚だしく不規則ならざる限り其數字は水位の增すと共に漸次に增加せざるべからず、何となればZ'及F_0は常數にしてWは水位と共に增加するものなれば、$\frac{F_0}{W}$は水位と共に漸次に減少し從て$Z'-\frac{F_0}{W}$は漸次に增大せざるべからざるを以てなり

單一形橫斷面の實例

吾人は已に複合形橫斷面の實例を擧げたるを以て次には單一形と見做し得べき橫斷面の實例を示さん、即ち雄物川新川橋に於けるもの之れあり

此處に於ける橫斷面は流量測定の爲めに實測せしものにして該測定には浮子を使用せしを以て實測せし橫斷面は上下流二個所あり、今次には其內上流のものを擧ぐ、本編中第五例として擧げたるは上下兩橫斷面積を平均したるものにして次に擧ぐるは上流橫斷面のみに關するものなるを以て材料は同一なるも第五例中のものと次のものとは水位橫斷面積は少許の差異あり、又次には流量の計算に必要なる橫斷面積のみを擧げ其他の水位の場合に亘らず、若し橫斷面の考究のみを主眼とする時には河底より最高水位に至る間水位の規則正しき間隔に對し測りたる橫斷面積及水面幅を用ゆるを適當とすべく其方一層好結果を奏するならんと思はる

實測橫斷面は第八圖の通りにして計算の結果は次表の如し

第八表　雄物川新川橋上流橫斷面

番號	水位 h	横斷面積 F	水面幅 W(尺)	$\frac{F}{W}$	$\frac{2}{3}h$	$\frac{F}{W}-\frac{2}{3}h$	$T=(h+Z)$	$T^{\frac{1}{2}}$	$A=\frac{W}{\sqrt{T}}$
1	8.05	6,466.4	624.0	10.36	5.37	4.99	15.53	3.94	158.4
2	8.38	6,669.5	632.7	10.54	5.59	4.95	15.80	3.97	159.4
3	8.53	6,768.5	636.0	10.67	5.69	4.98	16.00	4.00	159.0
4	8.63	6,831.8	641.4	10.65	5.75	4.90	15.98	4.00	160.3
5	11.28	8,543.2	652.5	13.09	7.52	5.57	19.63	4.43	147.3
6	11.56	8,665.9	654.0	13.21	7.71	5.50	19.81	4.45	147.0
7	11.97	8,962.1	655.8	13.67	7.98	5.69	20.50	4.53	144.8
8	12.24	9,170.8	657.0	13.96	8.16	5.80	20.94	4.58	143.4
9	11.73	8,837.6	654.6	13.50	7.82	5.68	20.25	4.50	145.5
10	11.39	8,614.4	652.8	13.20	7.59	5.61	19.80	4.45	146.7
11	11.29	8,549.0	652.2	13.11	7.53	5.58	19.66	4.43	147.2
12	11.13	8,145.0	651.6	12.96	7.42	5.54	19.44	4.41	147.8
13	13.42	9,951.8	662.1	15.03	8.95	6.08	22.54	4.75	139.4
14	13.75	10,170.8	665.1	15.29	9.17	6.12	22.93	4.79	138.9
15	13.96	10,310.0	666.0	15.48	9.31	6.17	23.21	4.82	138.2
16	14.54	10,699.2	669.0	15.99	9.69	6.30	23.99	4.90	136.5
17	14.66	10,775.9	671.4	16.05	9.77	6.28	24.08	4.91	136.7
18	15.15	11,109.7	676.2	16.43	10.10	6.33	24.64	4.96	136.3
20	16.16	11,793.5	681.9	17.30	10.77	6.53	25.95	5.09	134.0
21	17.37	12,637.3	718.8	17.58	11.58	6.00	26.37	5.14	139.8
22	17.49	12,852.8	720.9	17.83	11.66	6.17	26.74	5.17	139.4
23	17.54	12,908.1	721.8	17.88	11.69	6.19	26.82	5.18	139.3
24	9.26	7,236.2	644.1	11.23	6.17	5.06	16.85	4.10	157.1
25	8.92	7,017.9	642.3	10.93	5.95	4.98	16.39	4.05	158.6

28	13.18	9791.8	661.2	14.81	8.79	6.02	22.21	4.71	140.4
29	13.28	9859.1	661.8	14.90	8.85	6.05	22.35	4.73	139.9
30	13.34	9899.1	662.4	14.94	8.89	6.05	22.41	4.73	140.0
31	12.91	9612.5	660.0	14.56	8.61	5.95	21.83	4.67	141.3
32	12.68	9460.7	659.1	14.35	8.45	5.90	21.53	4.64	142.0
33	12.55	9374.8	658.5	14.24	8.37	5.87	21.35	4.62	142.5
平均						5.76			144.9

前表中No. 19はNo. 18に又No. 6, 26 & 27はNo 25に同一物なるに依り省略す

表に就て觀るに $\frac{F}{W}-\frac{3}{2}$ なる數字は多少の差異ありて水位に比例して增減するの事實を認むべく從て嚴密に云へば複雜形の特徵を示せりと雖も各數字間の差異は可なり僅少にして事實上に於ては略常數と見做すことを妨けず、從て此横斷面は單一形として差支へなきものなり、第八圖なる實際の横斷面の形狀を一見するも此の如くに推察し得るなり、而して同上の數字を平均するに次の如し

$$Z'=\frac{2}{3}Z=5.76 \quad \therefore Z=8.64$$

又Aの價を見るも略常數にして其平均は　$A=144.9$　となれり

次にZ及Aに對する以上の平均値を用ひパラボラを計算して之を圖上に入るゝ時は第八圖に於けるGNK若くはG′M K′のパラボラとある、前者は河の中央を通過する垂直線を軸とし後者は最深所即ち流心に一致する垂直線を軸とするものなり、實測横斷面は其形左右不齊なるか爲め之れと計算せる正パラボラとの一致を適切に觀察することを得すと雖も出入相比較すれば大體に於て兩者先づ一致することを見るべきなり而して後に詳論せんとする不齊等パラボラの理論に依れば適切に兩者の一致を知ることを得べし

以上に擧げたるGNK若くはG′M K′のパラボラは即ち獨逸に於ける代表パラボラと稱するものに

相當す、之れに類似せるものに横斷面パラボラあり、次に少しく之に就て述べん

横斷面パラボラ及代表パラボラ(Profil-und Ersatz Parabel)說

横斷面パラボラ說は始めて Sasse 氏の唱道せる所にして此說に依れば河川の長き部分に亘り多くの横斷面を取り之を平均すれば事實上一のパラボラとなると云ふに在りて之を横斷面パラボラと稱す (Jasmund u. Bubendey-Die Gewässerkunde, Handbuch der Ingenieurwissenschaften, 3 Teil, Wasserbau, Leipzig, 1906, S. 234 u.f.) 故に此說は一個の横斷面には必ずしも當篏まらざるものとす、然れども此說の事實は本編の引用せる實例中にも多少顯はれ居るやの傾向あり、即ち第三例より第五例に至る三例中の横斷面積は上下流二個を平均したるものなり、從て此場合特に赤川與井新田及雄物川新川橋に在りては計算及實測兩横斷面積の差は第一例及第二例(此處にては流量の測定には多く流速機を使用したるあるべし)に於けるよりは多少規則正しく且つ比較的に僅小なるを見るあり

ザッセ氏の後 Tolkmitt 氏は河川の横斷面の形狀をパラボラと假定するの說を提出し之を諸種の水理上の計算に應用せり其方法を略述すれば先づ實際の横斷面に最も善く符合するパラボラのパラメーター及最大水深 Füllhöhe 本編のTに相當す)を算出し之に依りパラボラを決定す、之を代表パラボラと稱す、然る後實際の横斷面の代りに此パラボラを使用し後水曲線等諸種の水理上の計算を爲す (Tolkonitt-Bubendey-Grundlagen der Wasserbaukunst, Berlin, 1907)

パラボラは其方程式簡單にして從て數學上の運算を輕易にする特徵を有するを以て以上の方法は横斷面の形狀を長方形と假定する方法佛國にて多く行はるゝ如く)に次て最も簡便なる方法とす、而して此說は河川横斷面の單一形なる場合には最も善く實際に一致し複合形の場合には然らずと雖も彼の後水曲線の如き諸種の假定を用ゆる計算に在りては此れにて元より充分なり

次に Bubendey 氏は更に人工の規則正しき横斷面を有する運河にまで此說を擴張しキール運河等に

就き代表パラボラを計算する方法を示せり(Die Gewässerkunde, Leipzig, 1911 S. 530 u. f.) 其方法は第八表に擧げたるものと少しく其趣を異にしZ及Aの代りに直にパラメーター及最大水深を算出す、何れにするもパラボラの性質に基づくものなるが故に歸する所は一なり

右の如き代表パラボラは横斷面の齊等なる場合即ち流心が河の中央にある場合には實際と善く符合すべしと雖も(但し單一形の時)横斷面の不齊等なる場合、即ち流心が河の中央に一致せざる場合例へば前に例として擧げたる雄物川新川橋に於ける如き(第八圖)横斷面には實際と果して一致するものなりや換言すれば第八圖に於けるGNK若くはG′M K′のパラボラは該横斷面に善く一致せるものと見做し得べきや否や、此點に就て少しく疑あり、依りて更に一歩を進めて其一致を證明するにあらざれば論述は未た完全せりと云ふべからず

不齊等パラボラ(Unsymmetrical Parabolas)

以上證明の方法として余は茲に不齊等パラボラ說を提出せんとす

凡そ河川の屈曲せる部分に於ける横斷面に在りては流心は凹曲部に偏するを以て流心と河の中央とは一致せず、從て流心より凹面の方にある周界線は傾斜急にして反對の側にあるものは傾斜緩かり、第八圖に出せる雄物川新川橋に於ける如きものは即ち之れなり、此の如き横斷面を不齊等の横斷面(Unsymmetrical Cross-Section)と稱するを得べし、之に反して河川の眞直なる部分に於ける横斷面に在りては原則として流心は河の中央に一致し從て其兩側に於ける周界線は同樣の傾斜を有せり、此の如き横斷面を齊等の横斷面(Symmetrical Cross-Section)と稱すべし

齊等の横斷面に在りては横斷面の形狀は代表パラボラ即ち第八圖のGNKのパラボラに一致すべし故に此場合に就ては別に議論を要せざるなり、之に反し横斷面が不齊等なる時は少しく考慮を費すの要あり

第八圖に於てＧＮＫは河の中央Ｒを通過する垂直線ＲＮを軸とするパラボラにしてＧ′ＭＫ′は河川の流心に一致するＱＭなる垂直線を軸とするパラボラあり而して以上二個のパラボラは軸の位置を異にする外全く同一のものとす、Ｇ′Ｋ′は水位が之れに達したる時は即ち岸一杯の水位となるべき線にして即ちＧ及Ｋは岸の最高點に相當す、今ＱＭを軸としＧ及Ｋを各通過するＧＤＭ及ＫＣＭなる二個のパラボラを作る、此パラボラは一方（ＧＤＭ）は急、他方（ＫＣＭ）は緩なる傾斜を有する二個のパラボラの各半分宛を集合したるものにして即ち不齊等横斷面の形狀を代表するものあり、之を不齊等パラボラと稱す、此不齊等パラボラは果して實際の横斷面に一致するや否やの點及其算出方法は後に讓り先づ其性質數條を次に明かにせん

任意の水平線Ｄ′Ｃ″を引く

$GR=RK=w=G'Q=QK'$

$GQ=w_1$；　$QK=w_2$

$QR=MN=E$　$G'G=K'K$

Ｅは河の中央と流心との距離に等しきものあり

$QM=RN=T$；　OM　$O'N$ と

$OD'=OC'$　$W=O'D''=O'C''$

$OD=W_1$；　$OC=W_2$

Ａ　ＧＮＫ又はＧ′ＭＫ′あるパラボラのパラメーターに比例する常數

A_1　ＧＤＭなるパラボラの同上 ⎫ 不齊等パラボラに屬す
A_2　ＫＣＭなるパラボラの同上 ⎭

但し $\frac{E}{w}=e$

$$\left.\begin{array}{l} OD'=W=\frac{1}{2}At^{\frac{1}{2}} \\ OD=W_1=\frac{1}{2}A_1t^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} w=\frac{1}{2}AT^{\frac{1}{2}} \\ w_1=\frac{1}{2}A_1T^{\frac{1}{2}} \quad w_2=\frac{1}{2}A_2T^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

$$\frac{W}{W}=\frac{A_1}{A}=\frac{w_1}{w}=\frac{w-E}{w}=1-\frac{E}{w}=1-e \cdots\cdots(\mathrm{I})$$

$$\left.\begin{array}{l} OC=W_2=\frac{1}{2}A_2t^{\frac{1}{2}} \\ OC'=W=\frac{1}{4}At^{\frac{1}{2}} \end{array}\right\}$$

$$\frac{W_2}{W}=\frac{A_1}{A}=\frac{w_2}{w}=\frac{w+E}{w}=1+e \cdots\cdots(\mathrm{II})$$

此eを特に不齊等率(Unsymmetricity)と稱せん、即ち横斷面の不齊等なる程度を表はすものにして一の横斷面に就ては常數あり、又eは常に1より小なる數なり

(1)より　$W_1=W(1-e)$　$(1-e)\gtrless\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$

即ちGDMのパラボラは幅の方に於て(高さは變化せず)G′D′Mのパラボラが一定の率に依りて短縮せるものなり

同樣に(II)より　$W_2=W(1+e)$;　$1+e)\gtrless\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}$

即ちKCMのパラボラは幅の方のみK′C′Mなるパラボラが一定の率に依り膨大せるものなり

$$W_1+W_2=W(1-e)+W(1+e)=2W \cdots\cdots(\mathrm{III})$$

即ち不齊等パラボラの幅は正パラボラの幅に等し換言すれば水面幅は同じ水位に對し不齊等にても齊等にても同一なり

次に(I)及(II)より

$$\left.\begin{array}{l} A_1=A(1-e) \\ A_2=A(1+e) \end{array}\right\} \cdots\cdots(\mathrm{IV})$$

$$A_1 + A_2 = 2A$$

即ちAに就ても幅と同一の關係あり

$$DD' = W - W_1 = W_e$$

$$CC' = W_2 - W = W_e$$

$$\therefore\ DD' = CC' \cdots\cdots\cdots(\mathrm{V})$$

$$DD'' = E - DD'$$

$$CC'' = E - CC'$$

$$\therefore\ DD'' = CC'' \cdots\cdots\cdots(\mathrm{VI})$$

次に

$$\text{面積 } OMD = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}A_1 t^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{面積 } OMC = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}A_2 t^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{面積 } DMCD = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(A_1 + A_2)t^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}At^{\frac{3}{2}} = \text{面積 } D'C'MD' \cdots\cdots\cdots(\mathrm{VII})$$

即ち不齊等バラボラの面積は正バラボラの面積に同じ、換言すれば横斷面積は同じ水位に對し不齊等にても齊等にても同一なり

$$\text{面積 } GMQG = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}A_1 T^{\frac{3}{2}}$$

$$\text{面積 } QMNRQ = TE$$

$$\therefore\ \text{面積 } GMNRG = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}A_1 T^{\frac{3}{2}} + TE$$

$$\text{面積 } GDMND''G = \text{面積 } GMNRG - \text{面積 } GNRG$$

$$\text{面積 } GNRG = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}AT^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\ \text{面積 } GDMND''G = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}A_1 T^{\frac{3}{2}} + TE - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}AT^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}TE$$

同様にして

$$\text{面積 } KCMNC''K = \text{面積 } QMNKQ - \text{面積 } QMKQ$$

$$=TE+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}AT^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}A_2T^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}TE.$$

$$\left.\begin{array}{l}\therefore \text{面積 } GDMND''G=\text{面積 } KCMNC''K \\ \quad \text{面積 } GDMSD''G=\text{面積 } KCSNC''K\end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\text{(VIII)}$$

即ち河の横斷面を始め正パラボラと假定する時一方(凹面側)に水流の爲めに掘り取られたる部分の面積は他方(凸面側)に沈澱せる部分の面積に同一となる、之れは土砂の平衡論の上に於て重要なる性質あるべし

不齊等パラボラの性質は大體以上の如くにして就中(VI)及(VII)より見得る如く水面幅及横斷面積は同じ水位に對し正パラボラ及不齊等パラボラの兩者に於て同一なり、換言すれば此兩パラボラは水理上同一(Hydraulically Equal)なることを知るなり

次に實際の不齊等横斷面と不齊等パラボラとの關係は如何と云ふに今例として第八圖に出したる雄物川新川橋に於ける横斷面を取るべし、先づ流心に一致する垂直線QMより圖に向て左方(第八圖の横斷面圖は下流より上流に向て見るようになれり、故に圖に向て左方は即ち右岸側なり、此の如く圖の作り方は普通の慣例に背くも事に甚しき害なきが故に今更めず)に於て水位のある間隔毎にQM線より岸迄の水平距離即ちW_1を測り同時に正パラボラより同水位に對する最大水深tを測る、同樣にしてQM線より圖に向て右方即ち左岸側に於てもW_2を測り(tは左方のものに同一なり)之れよりA_1及A_2を計算するに次の如し

第九表　雄物川新川橋不齊等横斷面

其一　右岸側

水位 h(尺)	岸より流心に至る水平距離 W_1(尺)	$t=h+Z$ 但し$Z=8.64$	$t^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}A_1=\frac{W_1}{\sqrt{t}}$	計算せるW_1 $W_1=39.4t^{\frac{1}{2}}$
18	186.0	26.64	5.16	36.0	203.3
16	184.8	24.64	4.96	37.3	195.4
14	180.0	22.64	4.76	37.8	187.5
12	180.0	20.64	4.54	39.6	178.9
10	180.0	18.64	4.32	41.7	170.2
8	180.0	16.64	4.08	44.1	160.8
合計	,090.8			236.5	
平均	181.8			39.4	

$\therefore A_1=78.8$

其二　左岸側

水位 h(尺)	岸より流心迄の水平距離 W_2(尺)	$t=h+Z$ 但し$Z=8.64$	$t^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}A_2=\frac{W_2}{\sqrt{t}}$	計算せるW_2 $W_2=105.0t^{\frac{1}{2}}$
18	546.0	26.64	5.16	105.8	541.8
16	496.8	24.64	4.96	100.2	520.8
14	485.4	22.64	4.76	102.0	499.8
12	475.8	20.64	4.54	104.8	476.7
10	466.8	18.64	4.32	108.1	453.6
8	444.0	16.64	4.08	108.8	428.4
合計	2,914.8			629.7	
平均				105.0	

$\therefore A_2=210.0$

$$W=\frac{1,090.8+2,914.8}{6\times12}=333.8$$

$$E=333.8-181.8=152.0$$

$$e=\frac{152.0}{333.8}=0.455$$

上表中A_1及A_2を計算するに用ひたる材料は水位の八尺より十八尺に至る間に關するもの丶みなり然れども横斷面は尙其れ以下にも存在し、最深所は實に水位の零以下約八尺に達せり、故に横斷面に關する考究には水位十八尺乃至零以下八尺に關する材料を使用するを正當とすべし、然れども比較すべき正バラボラの算出には其當時已に述べたるが如く流量測定の結果を利用したるを以て其水位は略十八尺以下八尺の間に位せり、故に理論の統一を保つ爲め玆にも同樣の水位の範圍內に關するもの丶みを用ひたり

以上の如くにして$A_1=78.8$; $A_2=210.0$を得たり、之れより計算せるW_1及W_2は上表中に附記す、此を用ひ第八圖中に不齊等バラボラを入るゝにGDM及KCMを得たり、之れと實際の横斷面とを比較するに後者には多少の不規則ありと雖も大體に於て兩者相一致することを見るなり、特に此バラボラは水位八尺以上のみの材料により算出したるものなることに注目する時は其一致は先づ滿足なりと稱せざるべからず

不齊等率は上表の末に於けるか如く$e=0.455$なる數値を得たり、又前に計算せる如く(第八表)正バラボラに於ては$A=144.9$を得たり、故に此兩者よりA_1及A_2を計算する時は次の如し

$$A_1=114.9\times(1-0.455)=79.0$$

$$A_2=144.9\times(1+0.455)=210.8$$

之を第九表に於て得たる數と比較する時は善く一致せることを見る又

$$A_1+A_2=78.8+210.0=288.8$$

$$2A=2\times144.9=289.8$$

此點に於ても善く一致せり

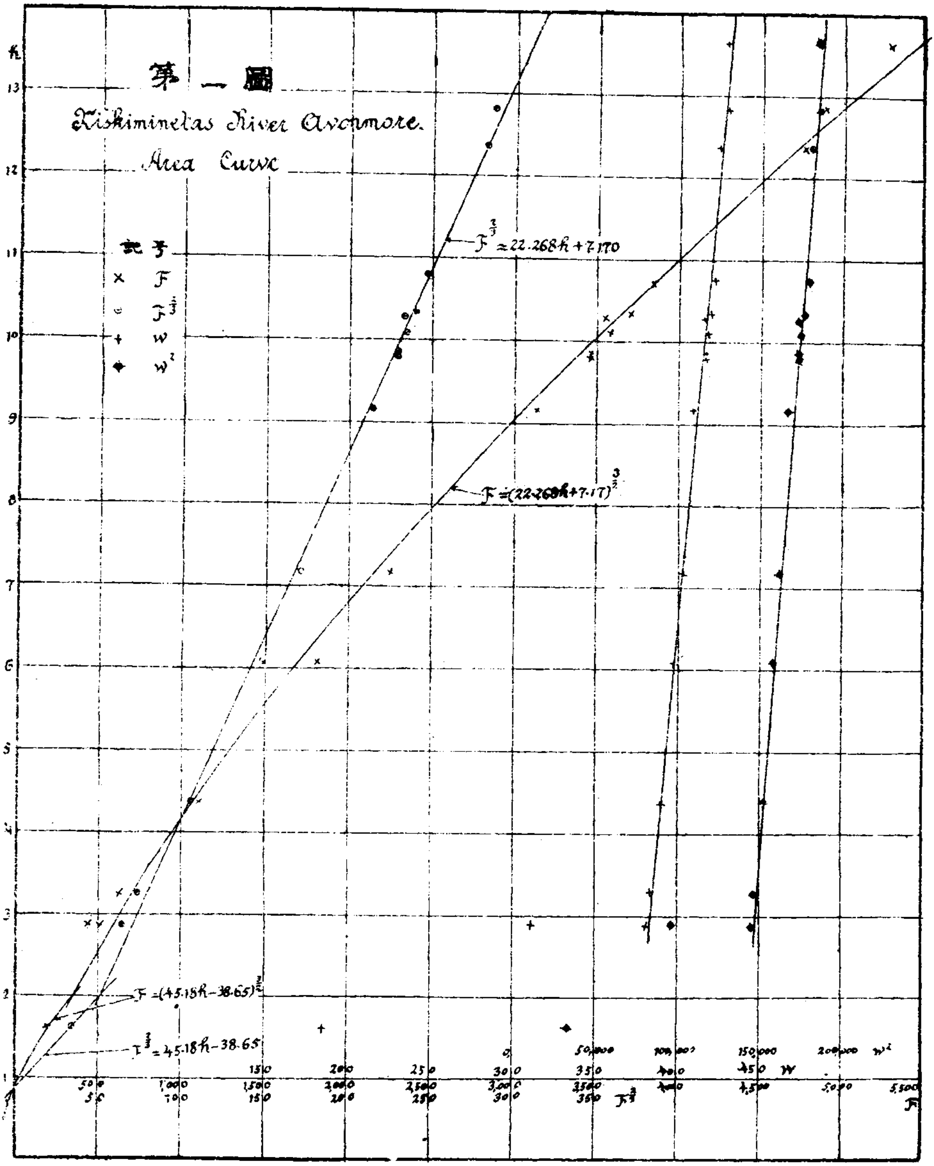
此の如くにして不齊等パラボラは實際の不齊等横斷面を代表するに足るべきを見る、而して前者は正パラボラと水理上同一物なりとすれば正パラボラは又水理上實際の不齊等横斷面を代表するに足るべきなり、一般に云へば横斷面の齊等不齊等なるを問はず水理上之を代表せしむるに代表パラボラを用ゆるは毫も支障なし

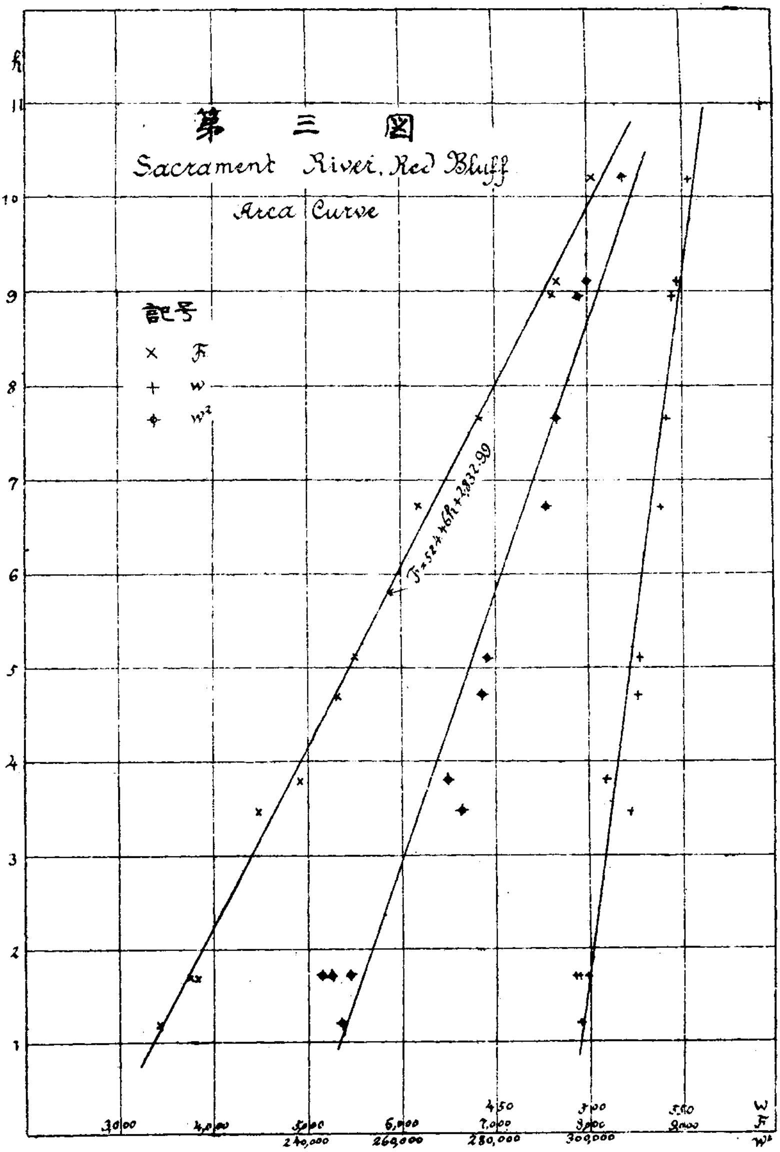
以上は横斷面の單一形なる場合に關するものなるが複合形の横斷面に於ても不齊等なる場合は無論多かるべし、此場合には低水部及中水部は別々の不齊等パラボラとなるべし

不齊等率eは河川の屈曲に關係あるものなるべし

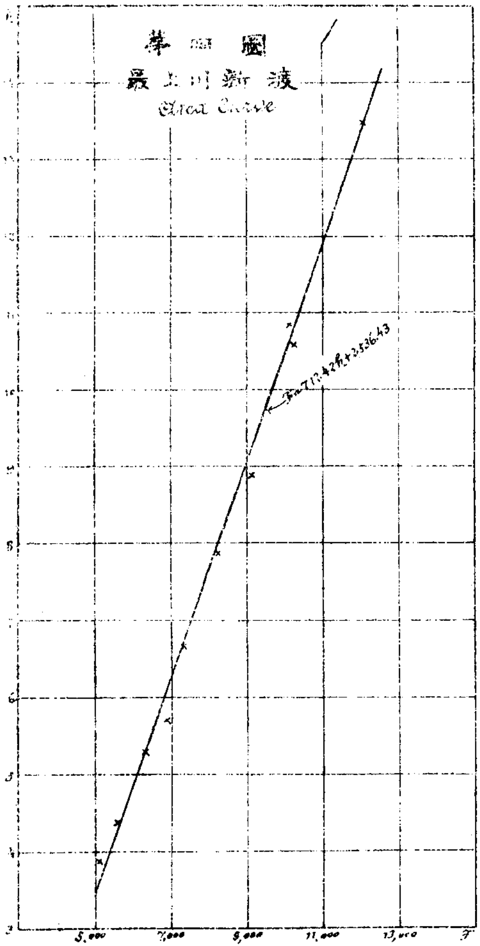
河川の横斷面は一般にパラボラ(單複の別はありと雖も)と假定して不可なきものとすれば横斷面をパラボラとして云ひ顯はす(Express)必要ある場合に單にパラメーター(若くはA)及最大水深(即ちT若くはZ)を與へたるのみにては水理上同價値の正パラボラは之を得べしと雖も實際の横斷面の形狀は未だ明かなりと云ふべからず、若し以上二者に加ふるにeなる不齊等率を與ふる時は横斷面圖なくとも實際の横斷面の形狀を彷彿せしむることを得べし

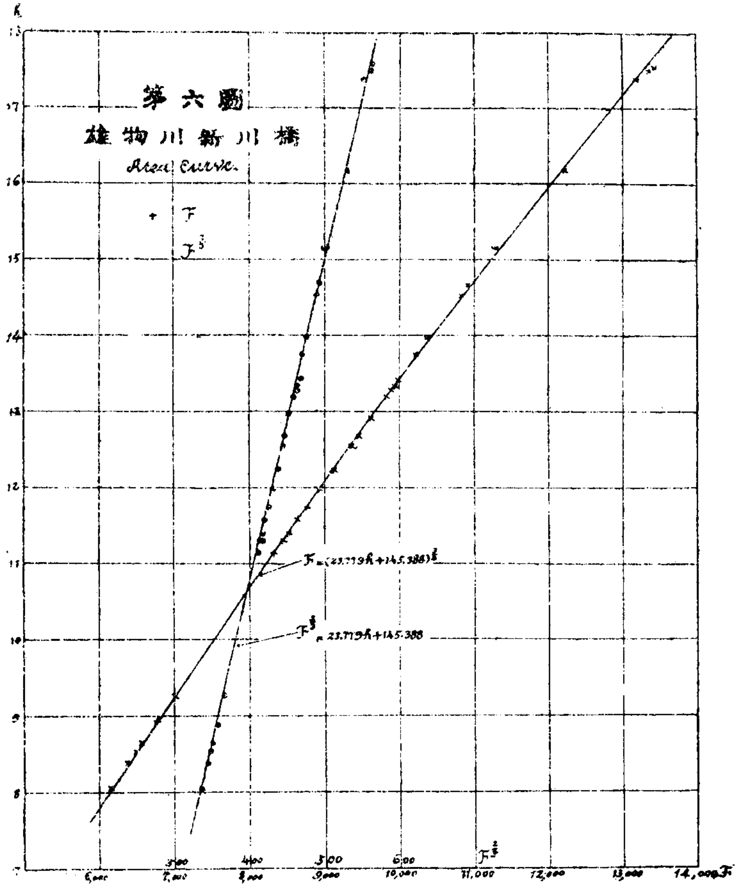
不齊等パラボラの説は必ずしも余が一家言にあらず、例へばシーデック氏も嘗て之れに言及せることあり(前に引用せるSiedek, S. 12 然れども其記載は極めて簡單なり)仝氏が之を必要とするに至りし顚末は次の如し、同氏は同氏の所謂理想的天然水路(ideale oder normale Gewässer)其説は長きに依り之を略す)に於ける横斷面形狀の天然河川にも實際存在(此場合には即ち Natürliche Normal profil)することを證せんとしてドフウ及エルベに於ける實測横斷面數個を擧げたり、然るに其等は凡て不齊等横斷面なる

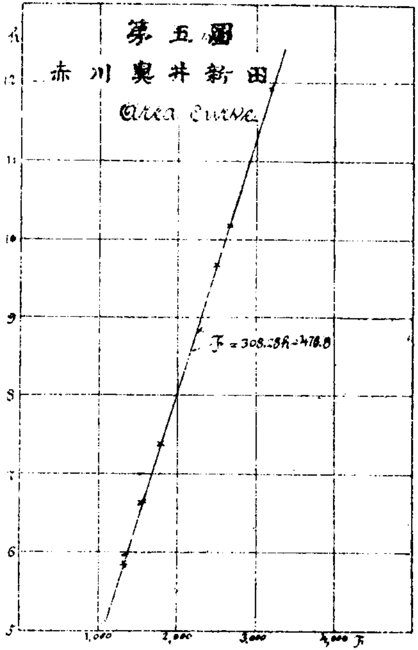

第一圖
Kiskiminetas River Avonmore.
Area Curve
記号
× F
∘ $F^{\frac{2}{3}}$
+ W
◆ W^2
$F^{\frac{2}{3}} = 22.268h + 7.170$
$F = (22.268h + 7.17)^{\frac{3}{2}}$
$F = (45.18h - 38.65)^{\frac{3}{2}}$
$F^{\frac{2}{3}} = 45.18h - 38.65$
h
F
W
W^2
$F^{\frac{2}{3}}$

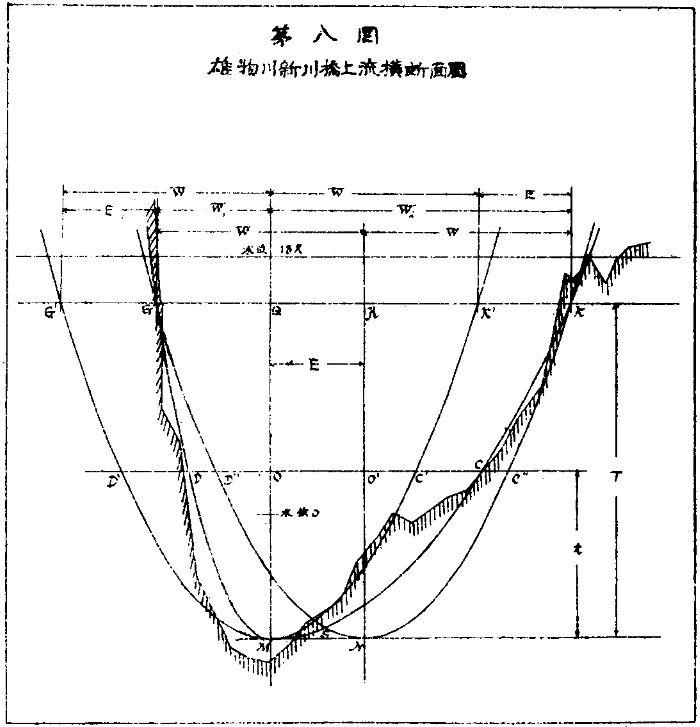


第三図
Sacrament River, Red Bluff
Area Curve
記号
× F
+ W
W²
F=524.46h+2832.99
h
W
F
W²


第四圖
最上川新渡
Area Curve
F=713.42h+3536.43


第六圖
雄物川新川橋
Area Curve
F=(23.779h+145.388)^3/2
F^2/3=23.779h+145.388


第五圖
赤川奥井新田
Area Curve
F = 308.28h - 478.8
1,000
2,000
3,000
4,000 F
5
6
7
8
9
10
11
12


第八圖
雄物川新川橋上流横断面圖
水位 13尺
水位 0
W
E
T
t

を以て同氏の理想的形状なる齊等パラボラにては兩者の一致適切ならざるに依り茲に不齊等パラボラを用ひたるものなり而して同氏の以上の考究は唯余の所謂低水部のみに關するものなり

結論

以上に論述せし所より生する至要なる結論次の如し

一、横斷面積曲線は一般に $F^n=ah+b$ なる方程式にて表はすことを得

二、同上の方程式の内nは普通の場合にては1より大なることを得ず

三、横斷面積曲線及平均速度曲線より計算せる流量は流量曲線より計算せる流量及實測流量に可なり善く一致す

四、横斷面積の増加率換言すれば横斷面積曲線のある點に於て垂直線となす角度のタンゼントは其點に於ける水面幅に等し

五、一般に $X^n=ah+b$ なる方程式を有する曲線は n が1より小なる正數なる時はXの増加率は漸増にして曲線は縱(h)軸に凸面を向け n が1より大なる時はXの増加率は漸減にして曲線は横(X)軸に凸面を向くるものとなる

六、横斷面積曲線は普通の場合には増加率漸増の曲線に屬す

七、横斷面の形状梯形若くはパラボラなる時と雖も横斷面積曲線を直線として可なる場合有り

八、理論的公式より算出せる横斷面積曲線は必ずしも歸納的公式より算出せる仝上に比し優秀ならず

九、水面幅の關係を利用すれば $F^n=ah+b$ に於て n を豫め假定せざるも實測の結果より n、a 及 b を算出することを得

一〇、横斷面の形状には單一及複合なる二種の區別あり

河川横斷面の天然形狀

一一、複合形なる場合に水位、水面幅及横斷面積實測の結果より夫れを組成する各別のパラボラを解剖することを得

一二、$\frac{F}{W}-\frac{2}{3}h$なる數値は横斷面の單複判定の要素なり

一三、横斷面には又齊等及不齊等の區別あり

一四、不齊等パラボラは不齊等横斷面に善く一致す

一五、不齊等パラボラと正パラボラとは水理上同一なり

一六、正パラボラは水理上不齊等横斷面をも代表することを得

（終）

拔萃

造船

○船舶用ディゼル發動機及齒車(ギヤード)タービン及吸入(サクション)瓦斯機對普通汽機ノ比較

本論文は本年四月一日英國ノース、イースト、コースト、インスチチューション、オブ、エンヂニアース、エンド、シツプビルダー集合席上に於て各機各專門大家により講演せられたるものの梗概にして一定の船舶に一定馬力の各種機械を備付くるものとして比較研究せるものなり

一、ディゼル發動機（講演者イト、エル、オルデ氏）

第一表に示すが如き現今最も普通なる貨物船を採り普通蒸汽機關對ディゼル、ヲイル、エンヂンの得失を論ぜんとす、同表により純貨物搭載重量即載貨重量より燃料、水其他のものを差引き實際運賃の收入を得べき載貨量の增減を知り得べし