附したり　紹介人　内海三貞君　紹介人　柁原巽平君

○前報告后客月二十六日迄に規則第八條第三項に依り其氏名を准會員名簿に登錄し准員證を送附したる諸君左の如し

工學得業士(土木)　田中傳吾君　紹介人　保科圭三郎君
同　中川政次郎君　同　迫田專之介君
同　鳥居潮君　同　川口虎雄君
藤掛清三郎君　紹介人　吉村惠吉君
大村德太郎君
野村盛君　同　中山秀三郎君
岡部藤次郎君
伊藤開一郎君　紹介人　中川吉造君

論説及報告

河川に於ける流量曲線の方程式

工學士　金森鍬太郎君

本編に於て引用書名を一々列擧するは複雜なるを以て先づ其書名を玆に掲ぐべし

Graeff——Mémoires sur le Mouvement des eaux. Paris, 1873.

W. Willcocks——Egyptian Irrigation. London, 1889.

R. Scheck——Die Niederschlags-und Abflussverhältnisse der Saale, u.s.w. Wiesbaden, 1893.
De Mas——Rivières a courant libre. Paris, 1899.
Usine de Chèvres. Génève, 1900.
V. Tein——Ergebnisse der Untersuchungen der Hochwasserhältuisse in Deutschen Rheingebiet;
Heft VI. Maingebiet. Berlin, 1901
Bovey——Treatise on Hydraulics. New York, 1906.
Jasmund——Die Gewasserkuude; Handbuch der Ingenieurwissenschaften, 3 Teil, 1 Band. Leipzig, 1906.
U. Masoni——Corso di idraulica. Napoli, 1908.
A. Flamant——Hydraulique. Paris, 1909.
Water-supply Papers, United States Geological Survey, Washington.

河川の內一の橫斷面に就て考ふるに流量增加する時は水位も上昇し之に反して流量減少する時は水位も亦下降すべし

今直角座標に於て水位及流量を各軸に取り實測の結果に據り流量及之に對する水位を圖上に記入し各點を連絡する時は曲線を得べし、此を流量曲線(Discharge Rating Curve)と稱す

此曲線の大勢は略パラボラに類似せるものある事は諸學者の一致する所なり、然れども此曲線を代表すべき方程式の形狀に關しては數種の異說あり

又直角座標に於て水位及流量を何れの軸に設定すべきやの方法も學者に依り異なれり、先づ水位を縱軸に流量を橫軸に取る方法を用ゆるはフォン、タイン(V. Tein, S. 108)ヤスムンド(Jasmund, S. 297)北米合衆國水利調査部(Water-Supply Papers)等にして流量を縱軸に水位を橫軸に取る方法を用ゆるはドゥマー(De Mas, P. 70)グレーフ(Graeff, Pl. VIII)、シェック(Scheck, S. 28)、マソニ(Masoni. P. 747)等にして何れの

河川に於ける流量曲線の方程式

方法を用ゆるも實用上其結果に差違なし唯流量を水位の函數として顯はすが故に數學上の慣例に從へば後者の方法を以て正しとすべし然れども以下の考究には余は寧ろ前者の方法に據らむとす

流量曲線の方程式に關する異說及各種の場合を分類すれば次の如し

(A)河川の橫斷面の形狀を二乘式のパラボラと假定する說

b　水面に於ける川幅

T　橫斷面中の最大水深、普通流心に於て水深最大なり

F　橫斷面積

以上三者は水位に依り增減す

橫斷面の形狀をパラボラと假定せるが故に次の關係あり

$$F = \tfrac{2}{3} b.T;\qquad b = A\sqrt{T}.$$

A　パラボラのパラメーターに比例する係數、一の橫斷面に就ては常數なり

故に

$$F = \tfrac{2}{3} A.T^{\frac{3}{2}}.$$

然るに橫斷面に於ける平均速度は一般に左の如し

$$V = C\sqrt{RI}$$

V　橫斷面に於ける平均速度

C　係數

R　水深平均深

I　水面勾配

而して今 t_m を橫斷面の平均水深とすれば大なる河にては殆んど

あり故に

$$R=t_m$$

$$V=C\sqrt{t_m I}$$

パラボラにては $t_m=\frac{2}{3}T$ なる關係あるが故に

$$V=C\sqrt{\tfrac{2}{3}T.I}=\sqrt{\tfrac{2}{3}I}.C.\sqrt{T}$$

今水面勾配は水位の變化に關せず常に變化せざるものとしてCも常數とすれば $\sqrt{\frac{2}{3}I}\,C$ は一の常數にして之をBと置けば

$$V=B\sqrt{T}$$

然るに

$$Q=F.V=\tfrac{2}{3}.A.T^{\frac{3}{2}}.B.\sqrt{T}=CT^2 \quad\cdots\cdots(1)$$

但し　Q　流量

$$C=\tfrac{2}{3}\cdot A\cdot B$$

(1)の方程式はQとTとの關係を示すものにして即ち一のパラボラなり換言すれば河川の横斷面の形狀を二乘式のパラボラと假定すれば其れに於ける水深と流量との關係も亦二乘式のパラボラあり

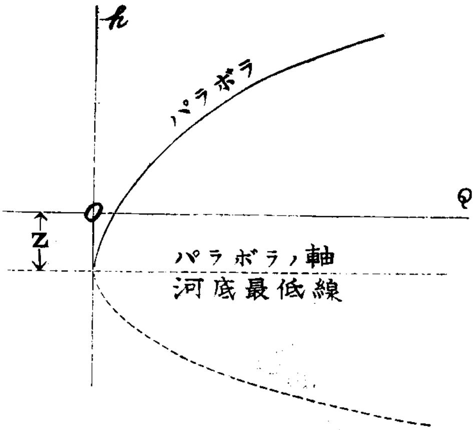
若し前記の横斷面に一の量水標を建設したりとせんに其零點は河底の上又は下なる一定の高さにあるが故に

$$T=h\pm Z$$

h　量水標の目盛板にて示す水位

Z　ある常數にして量水標の零點と横斷面中最低の河床との差にして前者が後者の上にある

第一圖



時は正號とあり之に反する時は負號とある實際の場合には正號とあること多し

故に(1)の方程式は次の如くある

$$Q=C(h\pm Z)^2 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(2)の方程式は量水標にて示す水位と流量との關係を顯はすものにして實用に適するものなり

(2)の代表するパラボラの形は上圖の如く其軸は座標の横軸に平行し且つ縱軸に接す

此形式の流量曲線を實地に適用せるもの〻數例を擧げんにバレンチニ(Valentini)に據れば左の如し

河川名	場所	流量曲線
アドイゲ(Adige)	アルバレド(Albaredo)	$Q=73.39(h+3.04)^2$
ポー(Po)	ポンテラゴスクロ(Pontelagoscuro)	$Q=82.05(h+7.18)^2$
チシノ(Ticino)	セスト、カレンデ(Sesto Calende)	$Q=103.95(h+1.26)^2$
アッダ(Adda)	コモ(Como)	$Q=31.25(h+0.88)^2$
ミンシオ(Mincio)	デセンツアノ(Desenzano)	$Q=21.18(h+0.85)^2$
レノ(Reno)	モリナツツオ(Molinazzo)	$Q=22.73(h+3.31)^2$
テベーレ(タイバー)(Tevere)(Tiber)	リペッタ(Ripetta)	$Q=8.07(h+5.34)^2$

アルノ(Arno)　　ソットピサ(Sotto Pisa)　　$Q=46.7(h+0.46)^2$

(Masoni, P. 819)

グローテ(Grote)に據ればエルベ(Elbe)のトルガウ(Torgau)にては次の如し

$Q=59.69(h+0.63)^2$　　(Jasmund, S. 298)

此流量曲線は平均水位以下の水位に適用するものなりと云ふ

以上の流量曲線は凡て米單位なりとす

(2)の形式の流量曲線は中水以下の水位に對し善く當篏まるべし此水位以下にては河の横斷面の形を事實上パラボラと見做し得へき場合多きを以てなり

Cなる係數は同一河川にても横斷面毎に異なるものとす、其數値を求むるには實測流量と夫れに對する水位とを以て最小二乘法に依り算出するを正當とす、此場合にはZの數値を豫め假定するにあらざればCの數値を算出すること能はず、然るにZは量水標の零點と最低河床の高さとの差なるを以て横斷面より見出すことを得べしと雖も横斷面の不明なる場合には遂に適用すること能はず、又横斷面の與へられ居る時と雖も流量の零となるは必らずしも水位が最低河床迄降下せる場合のみに限らず、例へば其横斷面個所の下流に堰堤ある時又は下流の河床が高き時には其横斷面に於ける水位が堰堤又は下流河床の頂天に同しくなりし時流量は已に零となるべし、故にZを假定するには横斷面の外に下流の縱斷面をも參酌せざるべからざるの不便あり

B)河川の横横面の形狀を長方形と假定する說

tを水深とすれば前項の場合と同じ理論に依り

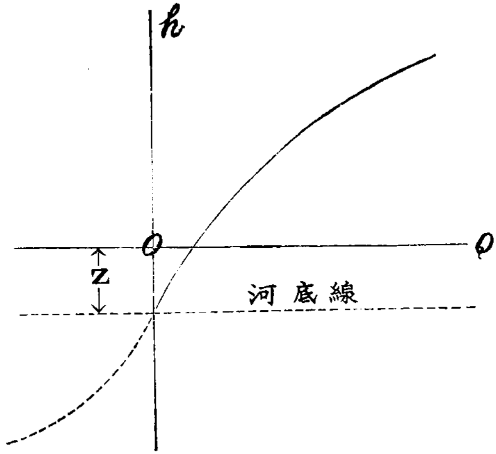
$$F=bt;\qquad V=B\sqrt{t}.$$

$$Q=F.V=bt.B.\sqrt{t}=Ct^{\frac{3}{2}}=C(h\pm Z)^{\frac{3}{2}} \quad\cdots\cdots(3)$$

但し此場合には　C＝B.b.

即ち流量と水位との關係は亦パラボラに類似せる一種の曲線にして上圖の如し

第二圖



河川の横斷面の形狀を長方形と假定することは佛國學者の多く慣用する所にして此形式を有する流量曲線も佛國に於て多く賞用せらる、其實用の數例を左に擧げむ

グレーフに據ればローアル(Loire)河のロアンヌ橋(Pont de Roanne)にては

$$Q=180(h+0.25)^{3/2}$$　(Graeff, P. 208)

クユビノー(Cuvinot)に據ればセーヌ(Seine)のマンテ橋(Pont de Mante)にては

$$Q=95(h+0.7)^{3/2}$$　(Flamant, P. 359)

サンジョン(Sainjon)に據ればロアールにてオルレアン(Orléans)の上流五十六吉羅なるキユイツシイ(Cuissy)にては

$$Q=359(h-0.25)^{3/2}$$

仝上オルレアンにては

$$Q=326(h+0.29)^{3/2}$$　(以上 De Mas, P. 76)

以上二個の流量曲線は唯大洪水にのみ適用することを得るものにて即ちオルレアンにては其量水標に於ける水位三米以上に適す、但し二米迄は尚適用することを得るも此場合には多少の不正確を免れずと云ふ

ポー(Po)にては

$$Q=182.88(h+1.08)^{\frac{3}{2}}$$ (以上Jasmund, S. 298)

ロンバルデニ(Lombardini)に據ればナイル(Nile)にては

$$Q=383(h+1.1)^{\frac{3}{2}}$$ (Willcocks, P. 18)

以上の流量曲線の單位は凡て米とす

以上の形式の流量曲線は堤防を有する河川に於ける高き水位の場合又は河幅が水位の昇騰に從ひ著しく增加せざる場合に適用して可なりと云ふ

流量實測の結果を以てCある係數を最小二乘法に依り計算せむとするには豫めZを假定せさるべからず故に(3)の方程式に就ても(2)の仝上に關する前項の評論の如き不便あり

(C) 河川の横斷面の形狀を三角形と假定する場合

横斷面の形狀を第二圖の如しとすれば

$$F=\tfrac{1}{2}b.T; \qquad b={}^{2T}/_{tan\theta}$$

$$\therefore\ F=T^2/tan\theta.$$

$$V=B\sqrt{R}; \qquad R=\tfrac{1}{2}T.cos\theta$$

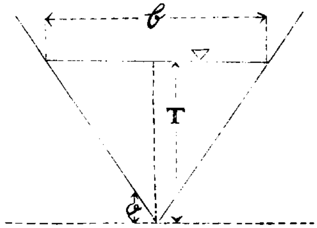
$$\therefore\ V=B\sqrt{\tfrac{1}{2}cos\theta}\sqrt{T}=B'\sqrt{T}$$

但し

$$B'=B\sqrt{\tfrac{1}{2}cos\theta}$$

$$Q=F.V=\frac{B'}{tan\theta}.T^{\frac{5}{2}}=C'T^{\frac{5}{2}}=C'(h\pm Z)^{\frac{5}{2}}\cdots\cdots(4)$$

第三圖



但し

$$C'=\frac{B'}{tan\theta}$$

河川に於ける流量曲線の方程式

(4)の方程式も(3)に類似せる曲線を顯はす

此形式の流量曲線は未だ實地に適用なし、蓋し河川の横斷面の形狀を三角形と見做し得るは極端なる場合にして從て$\frac{5}{2}$なる指數は2)(3)(4)の如き形式一般に云へば$Q=C(h\pm Z)^n$なる形式を取る流量曲線のnの極限と見做すことを得べし、本件に關しては尙後葉に記述すべし

(D) 河川の横斷面の形狀を梯形と假定する場合

梯形は長方形と三角形との集合と見做すことを得るが故に流量曲線も亦次の如く(3)と(4)との合計と見做すことを得べし、故に

$$Q\ C(h\pm Z)^{\frac{3}{2}}+C'(h\pm Z)^{\frac{5}{2}} \quad \cdots\cdots(5)$$

此形式を以て實地に適用せられたる流量曲線は未た之を見出すことを得すと雖も左のものは略此形式を有するものと云ふことを得べし

ロンバルデニ(Lonbardini)に據ればアッダ Adda 河のコモ橋 Como Bridge)に於ては

$$Q=100h^{\frac{3}{2}}(1-0.032h)=(100-3.20h)h^{\frac{3}{2}}$$ (Bovey, P.310)

(5)の形式の流量曲線も亦Zを假定すれば流量實測の結果よりC及びC'を最小二乘法に依り算出することを得

又は次の如く少しく異なれる立脚點より異なりたる形式の方程式を導くことを得べし

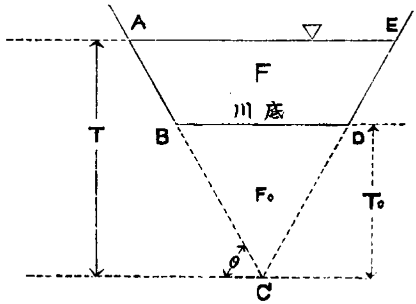
第四圖に於てABDEを河の横斷面としAB及びEDを延長してCに會せしむ、今ACEなる三角の面積をF_1としBCDなる三角の面積をF_0とすれば河の横斷面積Fは

$$F=F_1-F_0$$

なり、而して

$$F_1=\frac{T^2}{tan\theta}\ ;\qquad F_0=\frac{T_0^2}{tan\theta}$$

第四圖



今

$$\therefore\ F=\frac{T^2-T_0^2}{\tan\theta}$$

$\frac{T_0}{T}=\alpha$ とすれば

$$F=\frac{1}{\tan\theta}.T^2.(1-\alpha)^2$$

次に

$$t_m=\frac{F}{b}=\frac{1}{2}.T.(1-\alpha^2)$$

$$\therefore\ V=B'T^{\frac{1}{2}}(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}.$$

$$Q=\frac{1}{\tan\theta}.T^2.(1-\alpha^2).B'.T^{\frac{1}{2}}.(1-\alpha^2)^{\frac{1}{2}}=CT^{\frac{5}{2}}(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}$$

$$=C(h+Z')^{\frac{5}{2}}\left\{1-\frac{T_0^2}{(h+Z')^2}\right\}^{\frac{3}{2}}\quad\cdots\cdots(6)$$

(6)式中T_0は橫斷面の形狀に屬する常數なるを以て已知數なり、故にZ'を假定すれば流量實測の結果より最小二乘法に依りCなる係數を算出することを得るなり

(6)の形式を有する流量曲線は實地に適用せられたるもの未だ之を發見せず

尙(6)式を少しく變化すれば次の如し

$(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}$をバイノミヤルセオレムに依り展開すれば

河川に於ける流量曲線の方程式

$$(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}\alpha^2+\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}{1.2}\alpha^4-\frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)}{1.2.3}\alpha^6+\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{3}{2}\alpha^2+\frac{3}{8}\alpha^4+\frac{1}{16}\alpha^6+\cdots\cdots$$

而して α は一より小なる數なるにより α^6 を含む項以下を省略すれば

$$(1-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}\alpha^2+\frac{3}{8}\alpha^4=1-\frac{3}{2}\left(\frac{T_0}{T}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{T_0}{T}\right)^4$$

故に

$$Q=C\left(T^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{2}T_0^2T^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8}T_0^4T^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$=C\left\{(h+Z')^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{2}T_0^2(h+Z')^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8}T_0^4\frac{1}{(h+Z')^{\frac{3}{2}}}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

此形式を有する流量曲線は實地に適用せられたるものなしと雖もZ′を假定すれば流量實測の結果よりCを算出することを得べし

(6)及び(7)中のZ′は其以前の式中に用ひたるZとは少しく其意味を異にす、即ちZは量水標の零點と流量の零となる水位との差なるもZ′は量水標の零點と第四圖に於けるC點との差なり

(E)河川横斷面の形狀を截斷パラボラ(Truncated Parabola)と假定する場合

第五圖に於てABDEを河の横斷面とし之をABCDEなるパラボラの一部と假定す、今BCDなる面積をF₀としABCDEなる面積をF₁とすれば河の横斷面積Fは

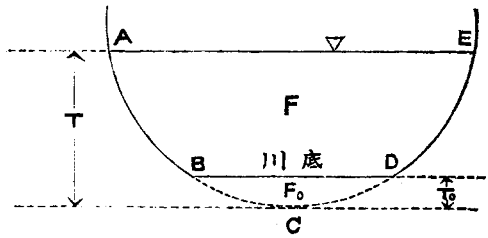
$$F=F_1-F_0$$

なり、而して

$$F_1=\frac{2}{3}AT^{\frac{3}{2}},\qquad F_0=\frac{2}{3}AT_0^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\ F=\frac{2}{3}A\left(T^{\frac{3}{2}}-T_0^{\frac{3}{2}}\right)$$

第五圖



今 $\frac{T_0}{T}=a$ とすれば

$$F=\frac{2}{3}AT^{\frac{3}{2}}(1-a^{\frac{3}{2}})$$

次に

$$t_m=\frac{F}{b}=\frac{2}{3}T(1-a^{\frac{3}{2}})$$

$$\therefore\ V=BT^{\frac{1}{2}}(1-a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

$$Q=CT^{\frac{3}{2}}(1-a^{\frac{3}{2}}).T^{\frac{1}{2}}(1-a^{\frac{3}{2}})^{\frac{1}{2}}=CT^2(1-a^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}$$

$$=C(h+Z')^2\left(1-\frac{T_0^{\frac{3}{2}}}{(h+Z')^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

(8)式中T_0は橫斷面の形狀に屬する常數なるを以てZ'を假定すれば流量實測の結果より最小二乘法に依りCなる係數を算出することを得べし

此形式の流量曲線は未だ實地に適用せられたるものなし

又(8)式を少しく變化すれば次の如し

$(1-a^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}$を展開すれば

$$(1-a^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}a^{\frac{3}{2}}+\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)}{1.2}(a^{\frac{3}{2}})^2-\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)}{1.2.3}(a^{\frac{3}{2}})^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{3}{2}a^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{8}a^3+\frac{1}{16}a^{\frac{9}{2}}+\cdots\cdots\cdots$$

而してaは1より小なる數なるを以て$a^{\frac{9}{2}}$より以下の項は小なる數となる、故に此等を略すれば

$$(1-a^{\frac{3}{2}})^{\frac{3}{2}} \doteqdot 1-\frac{3}{2}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{8}\left(\frac{T_0}{T}\right)^3$$

故に

$$Q=C\left(T^2-\frac{3}{2}T_0^{\frac{3}{2}}T^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8}T_0^3T^{-1}\right)$$

$$=C\left\{(h+Z')^2-\frac{3}{2}T_0^{\frac{3}{2}}(h+Z')^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{8}T_0^3\frac{1}{(h+Z')}\right\}\cdots\cdots(9)$$

此式に於ても Z' を假定すれば流量實測の結果よりCなる係數を算出することを得、而して Z' の意味は前項に準ず

(9)等の流量曲線も未だ實地に適用なし、然れども河川の横斷面の形狀を截斷バラボラと假定するは最も善く實地の形狀と一致する場合あるが故に此場合には前記(8)及び(9)の形式の流量曲線は恐らく良好なる結果を與ふるならんと思はる

(F)流量曲線の方程式を直ちに次のバラボラと假定する說

以上五項にて見出したる流量曲線の理論にては先づ水面勾配は水位の變化により變化せざるもの即ち常數と假定せり、又 $V=C\sqrt{RI}$ の式中Cの價値は水位に關係なく常數と假定せり、然るに此等の假定は實際上不適當なり、故に此等の考察點より流量曲線の方程式を直ちに次のバラボラとする說を生したり、其方程式は次の如し

$$Q=C(h\pm Z)^n\cdots\cdots(10)$$

此れはハーラッシャー(Harlacher)の始めて唱道せる所のものにして爾來獨國學者多く之を襲用せり

今其實例の數個を擧けむ

チューバート(Teubert)に據ればエルベ(Elbe)にては

ミュールベルヒ(Mühlberg)　$Q=71.13(h+0.40)^{1.587}$

トルガウ(Torgau)　$Q=61.21(h+0.62)^{2.044}$

バルビー(Barby)　$Q=84.17(h+1.13)^{1.527}$

レンツエン(Lenzen)　$Q=141.94(h+0.78)^{1.569}$

アルトレンブルヒ(Artlenburg)　$Q=105.4(h+1.45)^{1.666}$

ハーラッシャーに據ればライン(Rhein)のケルン(Köln)にては

$$Q=121.78(h+2.0)^{1.785}$$

全河のリンツ(Linz)にては

$$Q=54.255(h+2.53)^{2.066}$$

(以上Jasmund, S. 298—299)

此式にて計算したる流量は實測のものに比し平均僅かに〇.八パーセントの差あるのみなりと云ふ

以上の流量曲線は凡て米單位なり

實測流量の結果より此形式の流量曲線を出さむとするには前各項のものに同しく豫めZを假定せさるべからず、且つ此場合にてはCとnとを算出せさるへからず、此の二者を最小二乘法に依り算出せんとする時最も輕便なるはハーラッシャーの爲せるが如くロガリズムを用ゆるにあり(10)のロガリズムを用ゆれば

$$\log Q=\log C+n\log(h\pm Z)$$

此れに最小二乘法を適用し先づ$\log C$とnとを算出し$\log C$は更にCに還元す、然れども此方法は數學上正當なるものと云ふを得す、何となれば此方法に依れば流量の誤差の二乘の和が最小となるにあらすして流量のロガリズムの誤差の二乘の和が最小となる結果となるを以てなり、若し正當なる方法に依らんとすれば(10)の方程式を展開し而して後最小二乘法に依ることとなるを以て計算は甚しく面倒となるべし、此正當なる方法に依り前記のライン河ケルンに於ける流量曲線を計算すれば次

の如くなると云ふ

$$Q=104.11(h+2.0)^{1.58}$$ (Jasmund, S. 299)

即ち稍異なれる結果となれり

(10)の流量曲線は前各項のものの一般の形式と稱することを得べし而して河川の横斷面の形狀は長方形と三角形とを以て兩極端と見做すことを得るが故にnの價値は二者の形に對するもの即ち一、五と二、五との中間に在るべきを豫想し得べし實に前掲の實例を一見すれば略此豫想を證明するに足るものと云ふべくエルベ河のレンツエンに於ける流量曲線のnの價一、三六九なるは唯一の異例と稱すべし

(10)の形式の範疇に屬し少しく異なりたる形狀を有する流量曲線ありビー、ベーカー(B. Baker)に據ればナイル(Nile)にては次の流量曲線を適用し得べしと云ふ

$$Q=200(h+1)^{1.8}+150$$ 但單位は米 (Willcocks, P. 18)

之に對する一般形式の方程式は

$$Q=C(h+Z)^{n}+C' \quad \cdots\cdots(11)$$

となるべくして假りにZを假定するとするも尚ほ外にC若くはC'を假定せざる限り實測流量の結果より係數を算出せんとするには大に苦まざるべからず

(G)流量曲線の方程式を座標の軸に對し斜めの方向の軸を有するパラボラと假定する説

此説にては流量曲線の方程式を直に次の如く假定するなり

$$Q=a+bh+Ch^{2}+\cdots\cdots+xh^{n} \quad \cdots\cdots(12)$$

此式中a b C等は係數なり

數個の實例を擧ぐれば次の如し

ライン(Rhein)のレース(Rees)にては

$$Q=791.9+291.11h+114.927h^2$$

此式は其量水標の水位〇、〇五米乃至四、六〇米間に適用し得ると云ふ

仝上デュッセルドルフ(Düsseldorf)にては

$$Q=301.8+568.8h+18.562h^2$$

此は其量水標の水位三、五〇米迄に適用し得ると云ふ

仝河ロイブスドルフ(Leubsdorf)にては

$$Q=611.7+318.24(H-49.0)+61.618(H-49.0)^2$$ (以上Jasmund, S.299)

但し此處には量水標なき爲め此式中のHはある水準基線上水位の絕對的高さを示す、若し此處の流量と其下流のリンツ(Linz)に於ける量水標の示す水位との關係を取れば即ち前項に例示したるリンツに於ける流量曲線を得べしと云ふ、此式にて計算したる流量も實測のものに比し平均僅に〇、八パーセントの差あるのみなりと

ファルギユ(Fargue)に據ればガロンヌ(Garonne)のランゴン(Langon)にては

$$Q=86.52+120.18h+41.71h^2$$ (Jasmund, S. 299 and Flamant, P. 359)

此式は其量水標の水位七、五米迄好結果を與へ其以上の水位に對しては $Q=Ch^{1.5}$ の形を有するの式の方善く當篏まると云ふ

ドユボア(du Boys)に據ればローヌ(Rhône)のバレンス(Valence)(佛)にては

$$Q=325+365h+40h^2+14h^3$$ (Flamant, P. 359)

仝河のベルニエール(Vernier)(瑞西)にては

1) 水位零より一、四五米迄は

河川に於ける流量曲線の方程式

$$Q=86.31+27.10h+141.14h^2$$

2° 水位一,四五米より二米迄は

$$Q=330+520h$$

3° 水位二米より三,五〇米迄は

$$Q=570.22+860.60h-79.4h^2$$ (Usine de Chèvres, P.9)

以上の流量曲線は凡て米單位とす

(12)の方程式は前各項のものに比し全く其形式を異にせるものにして唯ある場合に於て偶相一致することあるのみ例へば $Q=a+bh+Ch^2$ の場合に於て $\frac{b}{C}=2\sqrt{\frac{a}{C}}$ となりたる時は $Q=C(h+Z)^2$ と全く同じ方程式となるが如し

(12)の形式の流量曲線は豫め何等の假定をなすことなく實測流量の結果より最小二乗法に依り正當に a b C 等の係數を算出することを得べし故に非難の最も少なき形式と云ふことを得べしと雖も唯其計算に多くの勞力を要するの失あり又此形式の流量曲線は其項數の撰定方に依りて水位の流量に影響を及ぼすべき各種の事情を包含せしめ得べきが故に最も良好の結果を與ふるならむ實に近時は此形式の方程式を採用するもの多きが如し

項數の撰定方に就ては前記の數例は多く h^2 にて止まれり唯ローヌ河のバレンスに於けるものは h^3 迄包含せり要するに各個所に付て最も良好の結果を與ふるやう撰定すべきを當然とするも一般に云へば河川の横斷面の形狀の極端なる三角形の場合に $h^{2.5}$ なる項を含有することより推測すれば h^3 迄包含せしむるを可とせん然れども此くすれば最小二乗法に依る係數の算出には益勞力を要することとなる

(H)流量曲線に何等の方程式を設定せざる説

此說に依れば流量は水位の簡單なる函數にあらざるを以て普通に行はるゝが如き簡單なる方程式に依り兩者の關係を律せんとするが如きは到底良好なる結果を得べき筈なしと云ふにあり、故に何等の方程式を設定せずして實測流量の結果を圖面に記入し圖上に於て其平均位置を通して曲線を畫き之れを直に流量曲線とするなり、此方法は米國の地質調査局の內なる水利調査部(Hydrographical Survey)に於て專ら採用する所の方法にして(Water-Supply Papers)又ドウ、マーも方程式は實地に適用するの價値なしと云へり(De Mas, P. 70)

此方法に據れば一度流量曲線を得たる後、ある水位に對する流量を求めんとするには計算に依りて出すことを得ずして一々圖上より測り出すことを得るのみ、故に其煩を避けんが爲めに流量曲線と同時に流量表(Discharge Rating Table)を調製するを普通とす、之れは各水位に對する流量を圖上より測出し一の表にしたるものを云ふ、方程式を用ゆる場合にも流量表を調製するを便とすること多きは論を待たず

方程式を設定せざる仕方にては前記の如く圖上に於て平均位置に曲線を畫くものなるを以て簡便は即ち簡便なりと雖も多少任意に流るゝの弊あるは免れざる所にして之を此方法の缺點とす

以上は流量曲線に關し現今已に世に行はるゝ說及び方法を分類し之に聊か詳論を試みたるものにして流量曲線に何等の方程式を設定せざる方法は暫く措き何等かの形式の方程式に據らむとする場合に於て何れの形式のものを以て宜しとすへきやは豫め抽象的に斷言することは能はず、要は最も良好の結果を與ふるものゝ換言すれば方程式にて計算したる流量と實測流量との差の最も小なる結果を齎らすが如き方程式を可とすべし、而して(10)の一般形式にて代表せらるゝ流量曲線は其係數の算出にZを豫め假定せざるべからずして此假定は常に容易なるものにあらず、又(12)の形式のものは其係數の算出に勞力を要するの失あり、依りて此兩者を調和せんが爲めに余の少しく試みたる考究

河川に於ける流量曲線の方程式

の結果を以下に記述せんとす

先づ(2)の方程式

$$Q=C(h\pm Z)^2 \quad\cdots\cdots(2)$$

に於て兩側の平方根を取れば次の如し

$$\sqrt{Q}=\sqrt{C}(h\pm Z)$$

今 $\sqrt{C}=a$, $\pm Z\sqrt{C}=b$ とすれば上式は次の如くなる

$$\sqrt{Q}=ah+b \quad\cdots\cdots(13)$$

此内a及びbは係數にして$\sqrt{Q}$とhとの關係は直線となる、實測流量の結果よりa及びbを計算せんとするには各の流量の平方根を出し然る後に最小二乘法を適用す、此の場合に豫め何等の假定をなすを要せず又其計算は大に簡便となるの利益ありと雖も一方には數學上正當にあらざるの不利あり何となればロガリズムに依りて係數を算出したる時の如く此方法に依れば$\sqrt{Q}$の確からしき價値を得るも其二乘即ちQに就ては然らざるを以てなり、然れども此形式の流量曲線を實地に適用するに當り幾何の誤差あるやは後に擧くる數例に依りて明瞭となるべし

此くしてa及びbを算出したる後(2)式に還元せんとするには直ちにC及びZの價を得べし

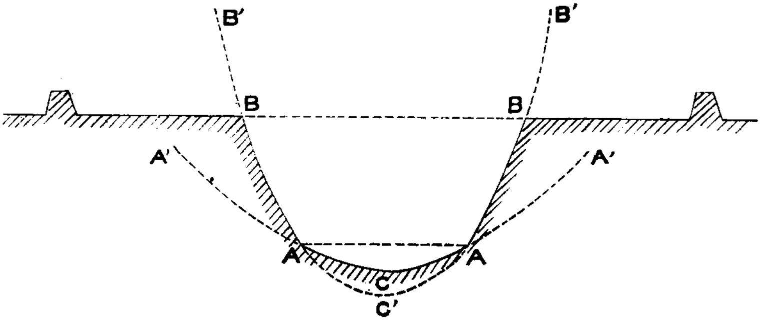
即ち

$$C=a^2,\qquad Z=\frac{b}{\sqrt{C}}=\frac{b}{a}.$$

(13)の方程式は(2)式即ち河川の横斷面の形狀をパラボラと假定せる場合の方程式の變形なるを以て水位の低き間は好結果を奏すべきが如しと雖も水位高くなるに從ひ實地と一致せずやの疑ひあり

然れども次に詳述するが如く流量曲線の適用を水位に依り三段に分つ時は以下數例の示す通り(13)式を適用して實用上差支へなきが如し

第六圖



凡そ何れの形状の流量曲線を問はず水位の最低より最高迄一の方程式を以て律せんとせば到底良好なる結果を得べからざること多し、前諸項の數例に於けるが如く、あるものは適用し得べき水位の界限を有し他のものは水位に依り方程式を異にすることとロース河のベルニエールに於けるが如くするを以て蓋し宜しきを得たるものと稱せざるべからず、

一般に云へば河川の横斷面は三部分より成るものと見做すことを得べし、第六圖は其横斷面の一般形式を示すものにして之を三に區分す、1^0 は低水部にしてＡＡ線以下の部分之れあり、河川の横斷面の形状をパラボラと見做す時は此部分はA'ACAA'なるパラボラとなる、2^0 は中水部にしてＡＡ線以上ＢＢ線以下の部分之れあり之れはB'BC'BB'のパラボラとある、以上二個のパラボラはＡＡにて相交錯す、3^0 は高水部にしてＢＢ線以上の部分之れあり水位がＢＢを越ゆれば水は両岸割合に廣き部分に氾濫すＢＢの水位を岸一杯の水位(Bordvolle Wasserstand)と稱す

此の如く河川の横斷面は一般に三部分を有し各部分は特殊の形態を有するが故に夫れに對して各部分亦固有の流量曲線を有することを推定し得べし、故に河川の各横斷面は一般に三個の流量曲線を有するものと見做すことを得、此理論に從へば何が故にある流量曲線は適用し得べき水位の界限を有し又は水位に依り方程式を異にせざるべからざるやの所以を説明することを得べし

特殊の場合には河川の横断面に於て此三區分明瞭ならざることあり、例へば上記の第六圖に於てACAとAC′Aとは一致せる時は低水部と中水部とは連續せるものとなり其界限消滅す、從て其二部に對する流量曲線は一致して一個の同じ方程式を以て可なることとなる、故に此場合には其横断面に對する流量曲線はBB以下のものと以上のものとの二個となる、又河川の横断面が山間部の河川に往々普通なるが如くB′BAC′ABB′の如き形狀を取れば其横断面に對する流量曲線は唯一個となる故に此場合には水位の最低より最高迄一の流量曲線にて律することを得べし

以上の諸點は尚次の數例に依りて明瞭となるべし

次に從來己に發表せられたる材料を用ひ(13)の形式に依り計算したる流量曲線の數例を示さん

（第一例）マイン(Main)のミルテンベルヒ(Miltenberg)に於ける流量曲線

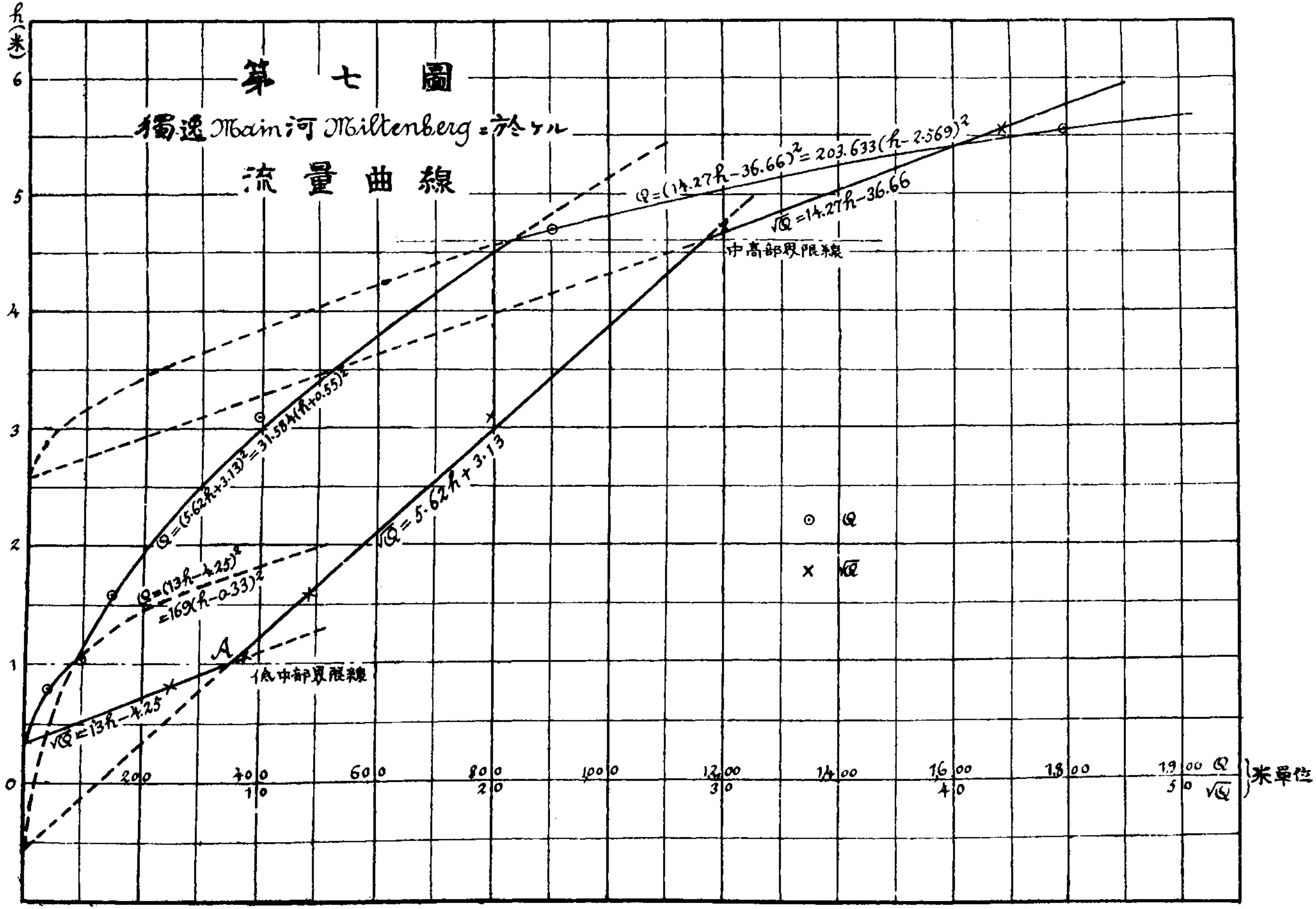
計算の材料はフォン、タイン(V. Tein, S. 108)より取る

此處にては水位約四、六〇米を超ゆれば氾濫始まると云ふ、即ち四、六〇米は略岸一杯の水位なり

實測流量の結果は僅かに六個にして次表の如し、尚全表中に計算の結果をも併記す(第七圖參照)

第一表

No	h (米)	Q (秒/立方米)	$\sqrt{Q}$	計算せる$\sqrt{Q}$	仝上Q	實測及計算流量の差	實測流量に對する仝上百分比
1	0.80	37.84	6.15				
2	1.04	85.60	9.25	8.97	80.46	−5.14	6.0
3	1.58	146.00	12.08	12.01	144.24	−1.76	1.2
4	3.10	391.00	19.77	20.55	422.30	+3.13	8.0
5	4.70	899.00	29.98	29.54	872.61	−26.39	2.9
6	5.54	1.797.00	42.39				
平均							4.5



第七圖
獨逸Main河Miltenberg＝於ケル
流量曲線
h (米)
6
5
4
3
2
1
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
1900 Q
10
20
30
40
50 √Q
米單位
Q=(14.27h-36.66)²=203.633(h-2.569)²
√Q=14.27h-36.66
中高部界限線
Q=(5.62h+3.13)²=31.584(h+0.55)²
√Q=5.62h+3.13
Q=(13h-4.25)²=169(h-0.33)²
√Q=13h-4.25
A
低中部界限線
⊙ Q
× √Q

此内No6は高水部に屬するものあること明かなり、No5は岸一杯の水位を超過せるも其差僅少にして之をも除く時は計算の材料餘りに寡少となるを以て暫く中水部に屬せしむ、而して横斷面は與へられざるが故に低水部と中水部との限界明瞭ならざるも第七圖より察すればNo1は低水部に屬するものと見做し得へきが如く從て限界は水位一米附近にあらん、即ち中水部に屬するものはNo2よりNo5迄の四個となる、今此に付て最小二乘法に依り(13)式中のa及びbを求むれば次の如し

$$a=5.620;\qquad b=3.130$$

故に中水部に對する流量曲線は

$$\sqrt{Q}=5.62h+3.13 \qquad \cdots\cdots(14)$$

今之を(2)の形式に還元すれば

$$C=5.62\times5.62=31.584;\qquad Z=\frac{3.13}{5.62}=0.557$$

$$\therefore\ Q=31.584(h+0.557)^2=(5.62h+3.13)^2$$ (以上單位は米)

此等より計算せる$\sqrt{Q}$及びQ、計算流量と實測流量との差及び其差の實測流量に對する百分率は第一表内に擧ぐるが如くにして差の百分比の平均は四、五パーセントとなる

次に低水部に對する流量曲線を求めんとするに中水低水の界限を暫く水位一米の處と假定すれば流量曲線は水位一米の處にて(14)の直線と交叉し且つNo1を通過せざるへからざるに依り流量曲線はA(第七圖)及びNo1を連結する直線となる、此直線の方程式は左の如くして得べし

(14)に於て$h=1$とすれば $\sqrt{Q}=8.75$

故に

$$8.75=a+b$$

$$6.15=0.8a+b$$

河川に於ける流量曲線の方程式

より a 及び b を求むれば　$a=13.0;$　$b=-4.25$

故に低水部に對する流量曲線は

$$\sqrt{Q}=13h-4.25$$

$$Q=(13h-4.25)^2=169(h-0.33)^2$$

又は次の如くにしても求むることを得べし

(13)の微分を取れば $\dfrac{d\sqrt{Q}}{dh}=a$

即ち a は直線が横軸となす角度の Cotangent なることを知る而して目下の例に於て

$$\triangle\sqrt{Q}=8.75-6.15=2.6;\qquad \triangle h=1-0.8=0.2$$

$$\therefore\ a=\frac{2.6}{0.2}=13$$

$$b=\sqrt{Q}-ah=8.75-13=-4.25$$

b は水位が零なる場合に起る流量の平方根なり、此場合には水位が零とならざる內に流量は已に零となる、即ち $h=\dfrac{4.25}{13}=0.33$ の時流量は零となるなり

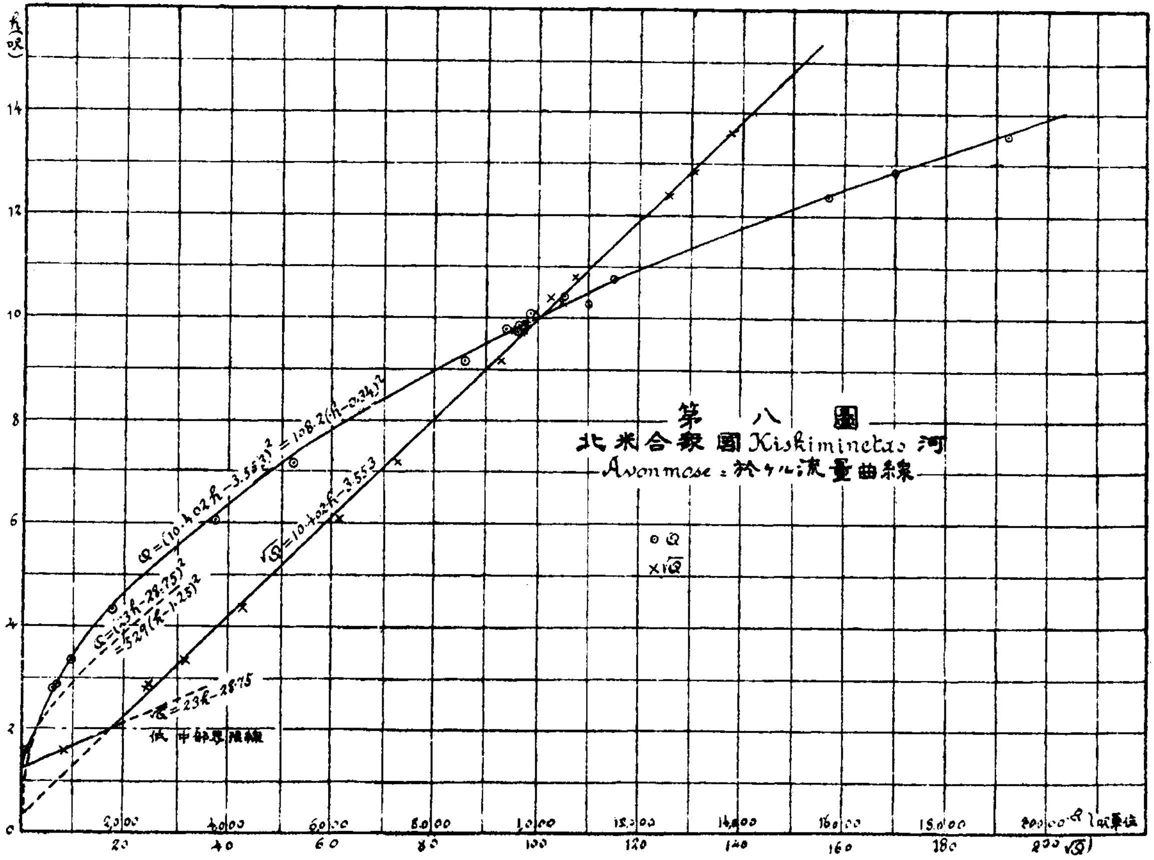
仝様にして高水部に對する流量曲線を求むれば(14)より水位四、六〇米の時 $\sqrt{Q}$ は二八、九八となる、故に

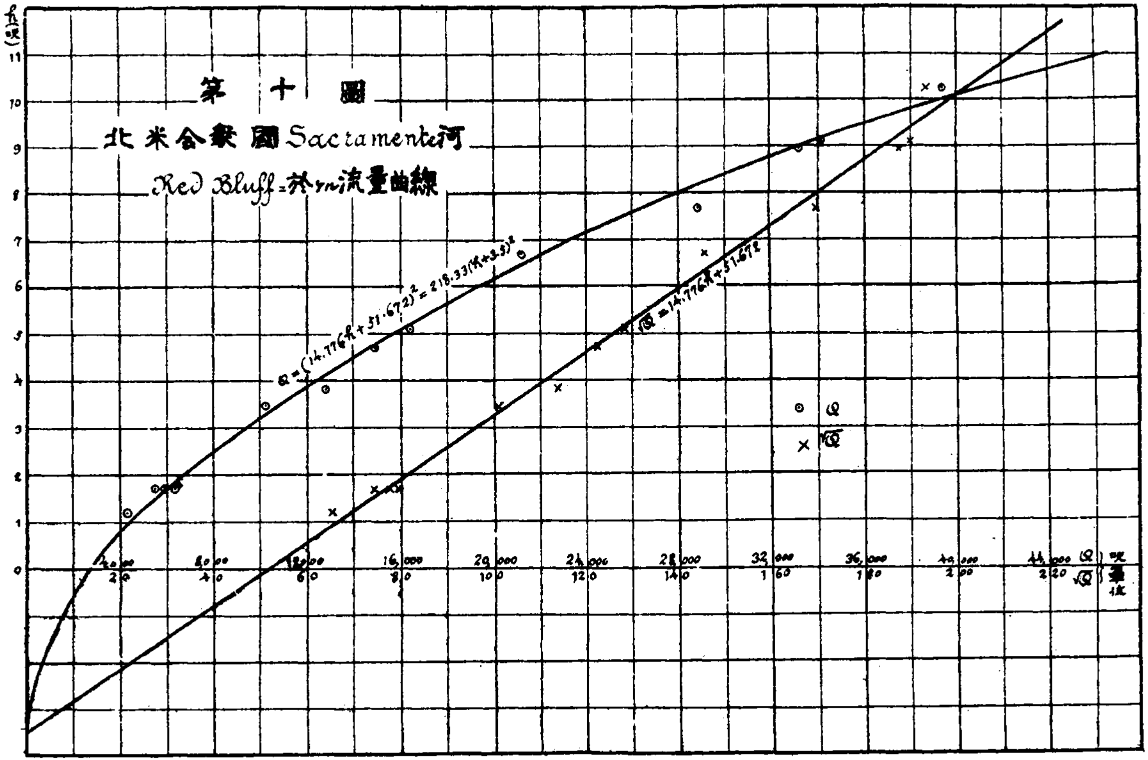
$$\triangle\sqrt{Q}=42.39-28.98=13.41;\qquad \triangle h=5.54-4.60=0.94$$

$$\therefore\ a=\frac{13.41}{0.94}=14.27$$

$$b=28.98-14.27\times4.60=-36.66$$

故に高水部に對する流量曲線は


第八圖
北米合衆國 Kiskiminetas 河
Avonmore ニ於ケル流量曲線
⊙ Q
× √Q
Q=(10.402h−3.553)²=108.2(h−0.34)²
√Q=10.402h−3.553
Q=(23h−28.75)²=529(h−1.25)²
√Q=23h−28.75
低中部界限線


第十圖
北米合衆國Sacramento河
Red Bluffニ於ケル流量曲線
Q=(14.776h+51.672)²=218.33(h+3.5)²
√Q=14.776h+51.672
Q
√Q
尺 呎
4,000 8,000 12,000 16,000 20,000 24,000 28,000 32,000 36,000 40,000 44,000
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

$$\sqrt{Q} = 14.27\,h - 36.66$$

$$Q = (14.27\,h - 36.66)^2 = 203.633(h - 2.569)^2$$

本例に於ては低水部及び高水部に屬すべき實測流量の結果は各一個宛あるを以て夫れに多少の誤差ある限り各部流量曲線の與ふる流量にも亦仝樣に誤差あるべし、誤差を成る可く排除せんが爲めには實測の結果は多々益可なるは云ふ迄もなきことなり假りに本例に於て低水部又は高水部に屬すべき實測流量の結果が二個以上ありたりとせば其流量曲線の算出は如何にすべきやの問題生ずべし

若し低水部と中水部又は中水部と高水部との區別線明劃ならざる時換言すれば其遷移の狀況徐々なる場合には各部に於て最小二乘法に依りa及びbを算出すべし、此場合には低水部及び中水部の流量曲線は必らずしも水位一米の點にて交叉せず、仝樣に中水部及び高水部の夫れも水位四、六〇米の點に於て交叉するを必すべからずして恐らく多少變移すべし、此れは各部の區別明劃ならざる場合に於ては毫も實用に妨けあらず

若し夫れ各部の區別線明劃なる場合には例へば低水部及び中水部の流量曲線は必らず水位一米の點に於て交叉するを要するが故に此場合には低水部に屬する實測流量毎に前記の例の如く一々aを算出し凡てを平均したるものを以て最後のaとすべし、此計算法は數學上正當なりとす、而して最後のaを用ひてbを算出す高水部に屬するものに於ても仝樣にして見出す

(第二例)北米合衆國キスキミネタス(Kiskiminetas)河のアボンモーア(Avonmore)に於ける流量曲線

キスキミネタスはアレグニー(Allegheny)河の左支なり

材料は次表の如し、Water-Supply Paper, No. 243 (Washington, 1910)より取り水位の順に排列を更む(第八圖參照)

本例に於て最小二乘法に依る計算例を示す

第二表

No	h (呎)	$h'=h-1$	h'^2	Q (秒/立方呎)	$\sqrt{Q}$	$h'\sqrt{Q}$	計算せる $\sqrt{Q}$	仝上 Q	實測及計算流量の差	仝上の實測流量に對する百分率
1	1.61			68.5	8.28					
2	2.86	1.86	3.4596	628	25.06	46.6116	26.19	686	+58	9.2
3	2.89	1.89	3.5721	635	25.20	47.6280	26.51	703	+68	10.7
4	3.26	2.26	5.1076	975	31.24	70.6024	30.35	921	−55	5.6
5	4.36	3.36	11.2896	1,780	42.19	141.7584	41.79	1,746	−34	1.9
6	6.06	5.06	25.6036	3,770	61.40	310.6840	59.47	3,537	−233	6.2
7	7.17	6.17	38.0689	5,250	72.46	447.0782	71.02	5,044	−206	3.9
8	9.15	8.15	66.4225	8,600	92.74	755.8310	91.61	8,392	−208	2.4
9	9.79	8.79	77.2641	9,630	98.13	862.5627	98.27	9,657	+27	0.3
10	9.79	8.79	77.2641	9,400	96.95	852.1905	98.27	9,657	+257	2.7
11	9.85	8.85	78.3225	9,660	98.29	869.8665	98.89	9,779	+119	1.2
12	10.08	9.08	82.4464	9,880	99.40	902.5520	101.28	10,258	+378	3.8
13	10.26	9.26	85.7476	11,000	104.88	971.1888	103.15	10,640	−360	3.3
14	10.32	9.32	86.8624	10,500	102.47	955.0204	103.78	10,770	+270	2.6
15	10.74	9.74	94.8676	11,500	107.24	1,044.5176	108.15	11,696	+195	1.7
16	12.35	11.35	128.8225	15,700	125.30	1,422.1550	124.89	15,598	−102	0.6
17	12.81	11.81	139.4761	17,000	130.38	1,539.7878	129.67	16,814	−186	1.1
18	13.64	12.64	159.7696	19,200	138.56	1,751.3984	138.31	19,130	−70	0.4
合計		128.38	1,164.3668		1,451.89	12,991.4333				57.6
平均										3.4

以上の例に於ても橫斷面圖を與へあらざるを以て詳細は知るに由なしと雖も各水位に對する水面幅及斷面積を與へあり、之を見るに水位一、六一呎の時水面幅は一八五呎斷面積は一九九平方呎にして水位二、八六呎の時は夫れ〳〵三八二呎及び五〇八平方呎、又最高水位なる一三、六四呎の時は四二九呎及び五、二八〇平方呎なり、水位其中間にある場合には水面幅及び斷面積も其中間に變化せり、即ち水位二、八六呎より一三、六四呎に上るも水面幅は割合に增加せず、故に此場合には高水部に屬するものなきを知る、然るに水位が一、六一呎に下るに及びては水面幅は急激に減少するより見れば水位一、六一呎と二、八六呎との間に中低兩部の界限あるを推定するに足る、依りて No. 1 は低水部に屬するものとして之を略し其他のものを以て係數を算出せんとす

數の計算に大なる數を取扱ふは餘計の勞力を要するを以て先づ暫く $h'=h-1$ とし h の代りに h' を以て計算す、其理由は後に說明すべし而して此場合の流量曲線の方程式を次の如くす

$$\sqrt{Q}=ah'+b' \qquad \cdots\cdots(15)$$

計算の徑路は第二表の如くにしてノルマル、イクエーション(Normal equations)は左の如し

$$12{,}991.4333=1{,}164.3668a+128.38b'$$

$$1{,}451.89=128.38a+17b'$$

此等より a 及び b' を計算すれば次の如し

$$a=10.402 \qquad b'=6.849$$

故に流量曲線の方程式は

$$\sqrt{Q}=10.402\,h'+6.849$$

又は

$$\sqrt{Q}=10.402(h-1)+6.849=10.402h-3.553$$

従て $b=-3.553$ となる

$$Q=(10.402\,h-3.553)^2=108.2\,(h-0.34)^2$$

此等より計算せる$\sqrt{Q}$及びQ　其實測流量との差並に其差の實測流量に對する百分比は第二表中に擧ぐるが如くにして差の平均は三,四パーセントなり

次に低水部に對する流量曲線は今假りに低水部と中水部との界限は水位二呎の點にありとすれば第一例に於けるが如く容易に見出すことを得べし即ち次の如し

$$\sqrt{Q}=23h-28.75$$

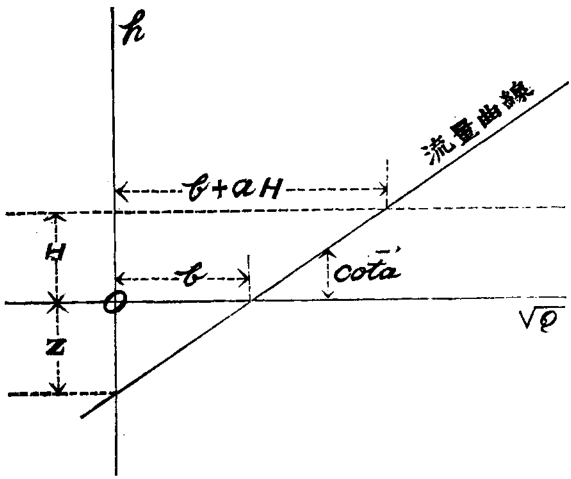
$$Q=(23h-28.75)^2=529(h-1.25)^2$$

以上本例に於ける流量曲線の單位は凡て呎なり

次に一般にhの代りにh'を以て計算することの數學上正當なることを證明せん

先づ幾何學上より解説を試みんとす

第九圖



第九圖に於けるが如く流量曲線の座標の軸は普通量水標の零點と一致す今假りに座標の横軸をH(本例の場合にはH=−1)丈け平行に移動せしむるも曲線の性質は少しも變化せず流量曲線の場合に於ては座標の横軸をH丈け移動せしむるは假りに量水標の零點をH丈け移動せしむることゝなる即ち前のhなる水位は後に$h'=h+H$なる水位と全様なり此くの如くするも曲線の性質に變化なきによりh

の代りにh'を用ひて計算するも流量曲線の性質を決定すべきaなる係數には異動なきなり但しbなる係數は水位零なる時に起る流量の平方根なるを以て量水標の零點に異動あればbにも異動を生じ前にbなりしもの後には$b'=b\pm a\mathrm{H}$となる

最小二乘法に依る計算に大なる數を取扱ふは勞力一層多きを以て成るべく小なる數として計算するを得策とす、本例に於ては$\mathrm{H}=一$とし、hの代りにh'を用ひて計算したり、而して後にhに還元せば始めよりhを用ひて計算したるものと同一のa及びbの價値を得

同様の理由に依り座標の縱軸を移動するも曲線の性質に變化なきにより$\sqrt{Q}$にある常數Xを加減して計算するもaは同一の價を得、但しbは$b'=b\pm\mathrm{X}$に變化す

同様に座標の縱横軸共に移動して計算するもaには變化なきこと明かなり

故に吾人は一般に最小二乘法に依る計算に於ては縱距及横距に各ある常數を加減し計算に都合よき數となしたる上係數を算出することを得

次に代數學上より解說せん

流量曲線の方程式$\sqrt{Q}=ah+b$に於て最小二乘法に依りa及びbを算出せんとするに其ノルマル、イクエーションは次の如し

$$\Sigma h\sqrt{Q}=a\Sigma h^2+b\Sigma h \quad\cdots\cdots(16)$$

$$\Sigma\sqrt{Q}=a\Sigma h+b\Sigma 1 \quad\cdots\cdots(17)$$

之を解すれば

$$a=\frac{\dfrac{\Sigma h\sqrt{Q}}{\Sigma h}-\dfrac{\Sigma\sqrt{Q}}{\Sigma 1}}{\dfrac{\Sigma h^2}{\Sigma h}-\dfrac{\Sigma h}{\Sigma 1}} \quad\cdots\cdots(18)$$

今 $h'=h-\mathrm{H}$ とすれば　$h=h'+\mathrm{H}$　但しHは常數

$$\Sigma h\sqrt{Q}=\Sigma h'\sqrt{Q}+\mathrm{H}\Sigma\sqrt{Q}$$

$$\Sigma h=\Sigma h'+\mathrm{H}\Sigma 1$$

$$\Sigma h^2=\Sigma h'^2+2\mathrm{H}\Sigma h'+\mathrm{H}^2\Sigma 1$$

此等の價を(18)に入るれば

$$a=\frac{\dfrac{\Sigma h'\sqrt{Q}+\mathrm{H}\Sigma\sqrt{Q}}{\Sigma h'+\mathrm{H}\Sigma 1}-\dfrac{\Sigma\sqrt{Q}}{\Sigma 1}}{\dfrac{\Sigma h'^2+2\mathrm{H}\Sigma h'+\mathrm{H}^2\Sigma 1}{\Sigma h'+\mathrm{H}\Sigma 1}-\dfrac{\Sigma h'+\mathrm{H}\Sigma 1}{\Sigma 1}}=\frac{\Sigma 1\Sigma h'\sqrt{Q}-\Sigma h'\Sigma\sqrt{Q}}{\Sigma 1\Sigma h'^2-(\Sigma h')^2}$$

$$=\frac{\dfrac{\Sigma h'\sqrt{Q}}{\Sigma h'}-\dfrac{\Sigma\sqrt{Q}}{\Sigma 1}}{\dfrac{\Sigma h'^2}{\Sigma h'}-\dfrac{\Sigma h'}{\Sigma 1}}\quad\cdots\cdots\cdots(19)$$

即ち a は h の代りに h' を用ゆるも同一の結果に到達することを知る

次に(17)より

$$b=\frac{\Sigma\sqrt{Q}}{\Sigma 1}-a\frac{\Sigma h}{\Sigma 1}\quad\cdots\cdots\cdots(20)$$

之に h の代りに h' を入るれば

$$b=\frac{\Sigma\sqrt{Q}}{\Sigma 1}-a\left(\frac{\Sigma h'}{\Sigma 1}+\mathrm{H}\right)=\frac{\Sigma\sqrt{Q}}{\Sigma 1}-a\frac{\Sigma h'}{\Sigma 1}-a\mathrm{H}=b'-a\mathrm{H}\quad\cdots\cdots\cdots(21)$$

又は

$$b'=b+a\mathrm{H}$$

即ち b は h の代りに h' を用ひて計算すれば h を用ひたる時よりも $a\mathrm{H}$ 丈ケの差を生ずることを知る

次に　$\sqrt{Q}=x;\quad x'=x-X;\quad x=x'+X$ とすれば

$$\Sigma hx=\Sigma hx'+X\Sigma h$$

$$\Sigma x=\Sigma x'+X\Sigma 1$$

但しXはある常數とす

之を(18)に入るれば

$$a=\frac{\dfrac{\Sigma hx'+X\Sigma h}{\Sigma h}-\dfrac{\Sigma x'+X\Sigma 1}{\Sigma 1}}{\dfrac{\Sigma h^2}{\Sigma h}-\dfrac{\Sigma h}{\Sigma 1}}=\frac{\dfrac{\Sigma hx'}{\Sigma h}-\dfrac{\Sigma x'}{\Sigma 1}}{\dfrac{\Sigma h^2}{\Sigma h}-\dfrac{\Sigma h}{\Sigma 1}}\cdots\cdots\cdots(22)$$

即ちxの代りにx'を用ひて計算するもaの價は變化せざるを知る

又　$x'=ah+b'$……(23)とすれば

(20)より

$$b=\frac{\Sigma x'+X\Sigma 1}{\Sigma 1}-a\frac{\Sigma h}{\Sigma 1}=\frac{\Sigma x'}{\Sigma 1}-a\frac{\Sigma h}{\Sigma 1}+X=b'+X\cdots\cdots\cdots(24)$$

又は

$$b'=b-X$$

即ちxを用ひて計算すればbはb'に變化し兩者の差Xなるを知るなり

同樣の方法によりh及びxの代りにh'及びx'を用ひて計算する時はaの價は變化せずして

$$b'=b+aH-X$$

とかることを證明することを得べし

以上證明せし方法は最小二乘法に依る係數の算出の塲合に勞力を省略する爲め一般に適用の塲合多かるべしと思はる、例へば流速器の係數算出に於けるが如し

(第三例)北米合衆國サクラメント(Sacramento)河かるレッド、ブルッフ(Red Bluff)に於ける流量曲線

サクラメント河はカリホルニヤ(California)州にあり

材料はWater-Supply Papers, No. 251, pp. 155 & 156より取り次表の如し但し水位の順に配列を更む尚本計算に用ひたる材料は一九〇七及び一九〇八兩年の實測に係るもののみにして其數十三個あるも此外に一九〇二年以降よりの結果ありて總數五十八個に達す

本例に於ても横斷面の形狀不明なるも全書中に與へられある水面幅及び斷面積を見るに最低水位一、二〇呎の時は各四九七呎及び三、四三〇平方呎にして最高水位一〇、二〇呎の時は各五五五呎及び八、〇六〇平方呎あり而して其中間の水位に對しては幅及び斷面積は多少の出入ありと雖も概ね水位に比例して前兩者の中間に在り故に本實測の範圍内に於ては高水部及び低水部に屬すべしと見做すべきものなし故に凡て中水部に屬するものと推定す計算の結果は次表の如し(第十圖參照)

第三表

No.	h(呎)	Q(秒/立方呎)	$\sqrt{Q}$	計算せる$\sqrt{Q}$	仝上 Q	實測及計算流量の差	仝上の實測流量に對する百分差
1	1.20	4,230	65.04	69.4	4,816	+ 586	13.9
2	1.70	5,950	77.14	76.8	5,898	− 52	0.9
3	1.70	5,570	74.63	76.8	5,898	+ 328	5.9
4	1.70	6,270	79.18	76.8	5,898	− 372	5.9
5	3.47	10,200	101.00	103.0	10,609	+ 409	4.0
6	3.80	12,800	113.14	107.8	11,621	−1,179	9.2
7	4.70	14,900	122.07	121.1	14,665	− 235	1.6
8	5.10	16,400	128.06	127.0	16,129	− 271	1.7
9	6.70	21,200	145.60	150.7	22,710	+1,510	7.1
10	7.65	28,800	169.71	164.7	27,126	−1,674	5.8
11	8.95	35,200	187.62	183.9	33,819	−1,381	3.9

12	9.10	36,100	190.00	186.2	34,670	−1,430	4.0
13	10.20	37,400	193.39	202.4	40,966	+3,566	9.5
平均							5.6

流量曲線は次の如し

$$\sqrt{Q} = 14.776\,h + 51.672$$

$$Q = (14.776\,h + 51.672)^2 = 218.33(h + 3.5)^2$$

以上の式の單位は呎なり

此方程式にて計算せる$\sqrt{Q}$及びQ　夫れと實測流量との差並に其差の實測流量に對する百分率は前表に於けるが如く差の平均は五.六パーセントなり

(第四例)北海道千歳川に於ける流量曲線

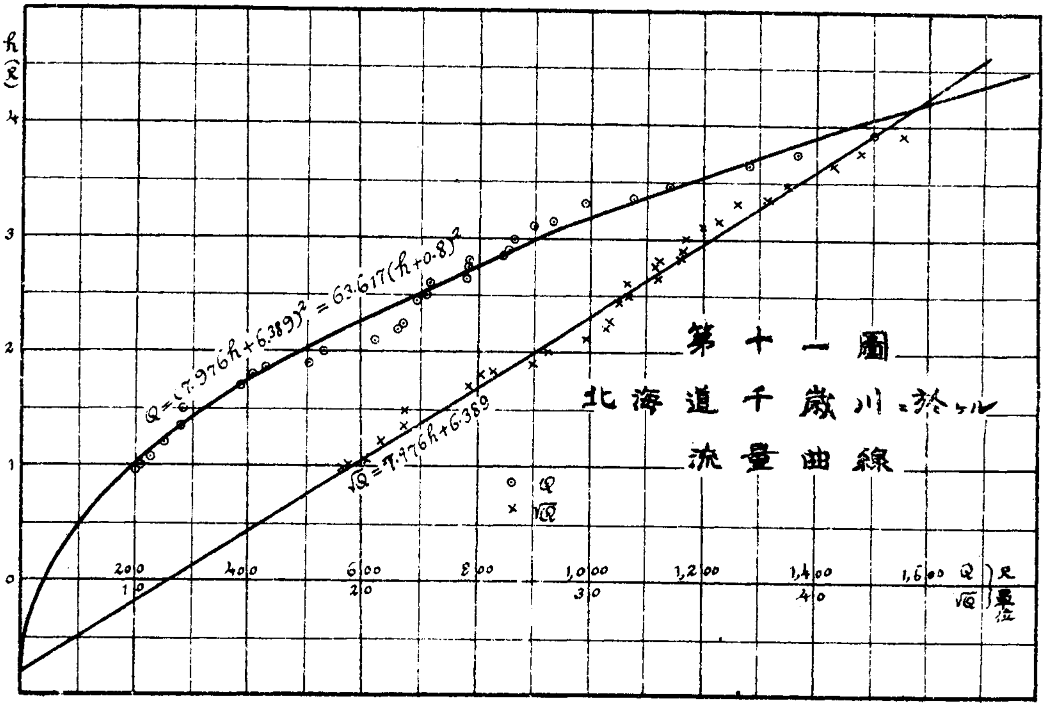
材料は工學會誌第三三七卷工學士濱田東稻君北海道千歳川水力電氣工事土木部工事概要より取る本例に於ても横斷面の形狀不明なるも表より察すれば實測の範圍内に在りては高中低三部の區別を認むる能はず故に一括して計算す其結果次の如し(第十一圖參照)

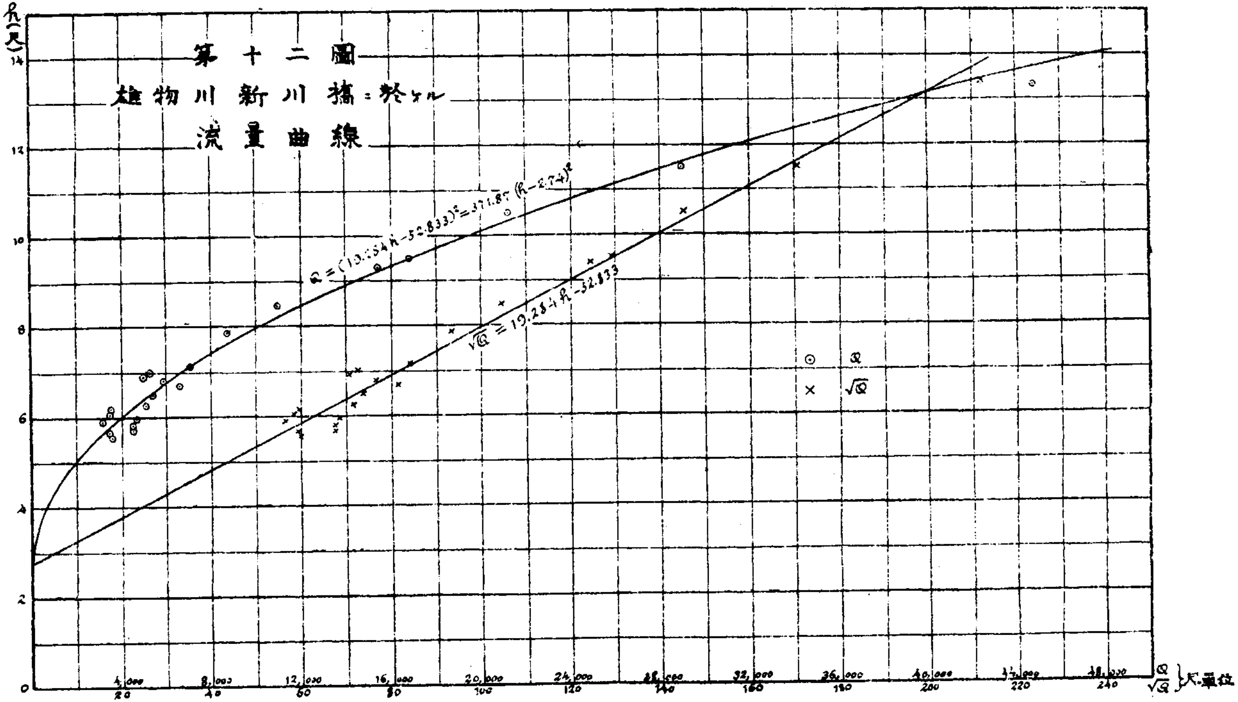
水位は支笏湖量水標の示す水位なり

第四表

No	h (尺)	Q(秒/立方尺)	$\sqrt{Q}$	計算せる$\sqrt{Q}$	仝上 Q	計算及實測流量の差	仝上の實測流量に對する百分率
1	0.98	200	14.14	14.21	202	+2	1.0
2	1.00	205	14.32	14.37	206	+1	0.5
3	1.07	227	15.07	14.93	222	−5	2.2
4	1.20	248	15.75	15.96	256	+8	3.2

No	h (尺)	Q(秒1尺方立)	$\sqrt{Q}$	計算せる$\sqrt{Q}$	仝上　Q	計算及實測流量の差	仝上の實測流量に對する百分率
5	1.35	280	15.73	17.16	295	+15	5.4
6	1.50	281	16.76	18.36	338	+57	20.3
7	1.70	387	19.67	19.95	396	+ 9	2.4
8	1.80	405	20.12	20.75	428	+23	5.7
9	1.85	432	20.78	21.15	445	+13	3.0
10	1.90	505	22.47	21.55	462	−43	8.5
11	2.00	530	23.02	22.34	499	−31	5.8
12	2.10	620	24.90	23.15	534	−86	13.9
13	2.20	660	25.69	23.94	571	−89	13.5
14	2.25	667	25.83	24.34	590	−77	11.5
15	2.45	694	26.34	25.94	671	−23	3.3
16	2.50	710	26.65	26.34	692	−18	2.5
17	2.60	712	26.68	27.14	734	+22	3.1
18	2.65	780	27.93	27.54	756	−24	3.1
19	2.75	781	27.95	28.33	801	+20	2,6
20	2.80	784	28.00	28.73	824	+40	5.1
21	2.85	844	29.05	29.13	847	+ 3	0.4
22	2.90	852	29.19	29.53	870	+18	2.1
23	3.00	862	29.36	30.32	919	+57	6.6
24	3.10	900	30.00	31.13	967	+67	7.4
25	3.15	934	30.56	31.53	992	+58	6.2
26	3.30	991	31.48	32.72	1,069	+78	7.9
27	3.35	1,075	32.79	33.12	1,096	+21	1.9
28	3.45	1,140	33.76	33.92	1,149	+ 9	0.8
29	3.65	1,280	35.78	35.52	1,260	−20	1.6


第十一圖
北海道千歳川ニ於ケル
流量曲線
$Q=(7.976h+6.389)^2=63.617(h+0.8)^2$
$\sqrt{Q}=7.976h+6.389$
⊙ Q
× √Q
h (尺)
200 400 600 800 1,000 1,200 1,400 1,600 Q
10 20 30 40 √Q
尺 單位


第十二圖
雄物川新川橋ニ於ケル
流量曲線
$Q=(19.284h-52.833)^2=371.87(h-2.74)^2$
$\sqrt{Q}=19.284h-52.833$
⊙ Q
× $\sqrt{Q}$
h（尺）
0 2 4 6 8 10 12 14
4,000 8,000 12,000 16,000 20,000 24,000 28,000 32,000 36,000 40,000 44,000 48,000
20 40 60 80 100 120 140 160 180 200 220 240
Q
$\sqrt{Q}$
尺ノ單位

30	3.75	1,368	36.99	36.31	1,318	−50	3.7
31	3.90	1,498	38.91	37.51	1,406	−92	6.1
平均							5.2

流量曲線は次の如し

$$\sqrt{Q}=7.976\,h+6.389$$

$$Q=(7.976\,h+6.389)^2=63.617(h+0.8)^2$$

以上の式の單位は尺なり

此に依りて計算したる$\sqrt{Q}$及びQ　其れと實測流量との差並に其差の實測流量に對する百分比は前表の通りにして差の百分比の平均は五.二パーセントなり

(第五例)雄物川新川橋に於ける流量曲線

材料は雄物川流末工事調査報告書(明治三十三年秋田縣)に據る

本例に於ても横斷面の形狀不明なるも實測の範圍内に在りては高中低三部の區別なきが如し故に一括して計算す其結果は次の如し(第十二圖參照)

第五表

No	h(尺)	Q(秒/立方尺)	$\sqrt{Q}$	計算せる$\sqrt{Q}$	仝上 Q	計算及實測流量の差	仝上の實測流量に對する百分比
1	5.55	3,600	60.00	54.17	2,934	− 666	18.5
2	5.65	3,500	59.16	56.10	3,147	− 353	10.1
3	5.70	4,500	67.08	57.06	3,256	−1,244	27.6
4	5.80	4,500	67.08	58.99	3,480	−1,020	22.7
5	5.90	3,200	56.57	60.92	3,711	+ 511	16.0

No	h (尺)	Q(秒/立方尺)	$\sqrt{Q}$	計算せる$\sqrt{Q}$	仝上 Q	計算及實測流量の差	仝上の實測流量に對する百分比
6	5.95	4,700	68.56	61.89	3,830	− 870	18.5
7	6.05	3,400	58.31	63.81	4,072	+ 672	19.8
8	6.15	3,500	59.16	65.74	4.322	+ 822	23.5
9	6.25	5,100	71.41	67.67	4.579	− 521	10.2
10	6.50	5,400	73.48	72.49	5,255	− 145	2.7
11	6.70	6,600	81.24	76.35	5,829	− 771	11.7
12	6.80	5,900	76.81	78.27	6,126	+ 226	3.8
13	6.90	5,000	70.71	80.20	6,432	+1,432	28.6
14	7.00	5,300	72.80	82.15	6,749	+1,449	27.3
15	7.10	7,100	84.26	84.06	7,066	− 34	0.5
16	7.85	8,700	93.27	98.52	9,706	+1,006	11.6
17	8.45	11,000	104.88	110.09	12,120	+1,120	10.2
18	9.30	15,400	124.10	126.47	15,995	+ 595	3.9
19	9.50	16,800	129.61	130.33	16,986	+ 186	1.1
20	10.40	21,200	145.60	147.68	21,809	+ 609	2.9
21	11.50	21,000	170.29	168.89	28,524	− 476	1.6
22	13.30	44,800	211.66	203.59	41,449	−3,351	7.5
平均							12.7

流量曲線は次の如し

$$\sqrt{Q}=19.284\ h-52.833$$

$$Q=(19.284\ h-52.833)^2=371.87(h-2.74)^2$$

両式の單位は尺なり

此に依り計算したる $\sqrt{Q}$ 及び Q 計算流量と實測流量との差並に其差の後者に對する百分比は前表に於けるが如くにして差の平均は一二、七パーセントなり

以上の數例に依りて之を見るに(13)の形式の流量曲線の與ふる結果は實測流量に比し雄物川のものを除き約五パーセント内外の誤差を生ずることを知る

a の價は高低兩部のものを除き中水部のものにありては呎單位にて千歳川の約七、九八を最小とし雄物川の約一九三を最大とす、此れは元より一定の範圍を有するものにあらず（後葉參照）又 b も量水標零點の位置により一定ならず、更に同一の横斷面に於て低中高の三部を比較すれば a の價は中水部のもの最小にして低水部のもの次に大となり高水部のもの最大なるべし、a は直線の横軸となす角度の大小を決定するものにして即ち其角度のコタンゼントなり、故に中水部の直線は傾斜最も小（縱軸に對して云ふ）にして低水部のもの次に傾斜大となり高水部のもの傾斜最も大なり、又第一例中に述たるが如く $\frac{d\sqrt{Q}}{dh}=a$ なるに依り a は水位に對する流量の增加率を示すものにして中水部に於ては其增加率最も小、低水部に於ては之に次きて大となり高水部に於て增加率最も大なりとす、次に b は中水部のもの最大にして低水部のもの之に次ぎ高水部のもの最小となる

a 及び b は共に絕對數にあらずして單位に依り其價を異にす、今米單位より呎又は尺單位に換算せんとするには次の如くす

呎に換算するには b に $(3.28)^{\frac{3}{2}}=5.94$ を、a に $\sqrt{3.28}=1.81$ を各乘ずべし

尺に換算するには以上の乘ずべき數は夫れ〲 5.99 及び 1.82 となる

凡そ流量曲線を抽出するに其材料となるべき實測流量の數は多々益可なるは勿論なりと雖も其上に望ましきは各種の水位に對する流量なりとす、尚同時に實測せる流量に對する水位高低差(Range)の大なるを可とす、何となれば其差の小なる時は之を圖上に入るゝ時ある狹き範圍内に密集すべく

之より流量曲線を抽出するの際實測の少しの誤差も其曲線の方向を著しく偏位(Deflect)せしむるの恐れあり、之に反して水位の高低差の大なる時は實測の結果を圖上に入るゝ時細長き連鎖を得べく從て之れより抽出すべき曲線の方向は實測の誤差に影響せらるゝこと割合に少なければなり

以上の條件に適合せる材料より抽出せる流量曲線にして實測流量との差の少なきもの即ち圖上にて見る時實測の結果の曲線と相距ること遠からざるもの程其曲線は信用し得べきなり故に一般に低水部及び高水部に對する流量曲線は信用し得べき程度(Reliability)中水部に對するものよりも遙かに少なきものとす、之れ其材料となるべき實測の結果甚だ少なきのみならず其實測も亦甚だ難きを以て誤差の多きは免れざる所なるを以てなり

一の河川に於て多年月に亙り流量の實測ある時は流れの條件の同一なる時例へば下流に堰あれば其開閉の程度同一なる場合のもののみに付て一の流量曲線を算出せざるべからず、普通の場所にありては流れの條件は左程頻繁に變化するものにあらず、割合に固定せるものと見做し得べきが故に流量の實測あれば流量曲線を算出し得べきを普通とするも唯海に注ぐ川の河口に在りては水位は潮汐の干滿に左右せられ其現象複雜なるを以て流量曲線は殆んど見出す能はず

流量曲線の適用し得べき程度(Applicability)に就ては先づ空間的と時間的とに分つべし、空間的に適用し得べき程度に就きては低水部に對する流量曲線は低水部にのみ適用し得べく中水部のものは全部にのみ又高水部のものは流水の堤防を漲溢する迄は適用し得るなり、而して一般に其流量曲線算出の基礎となりし實測流量の範圍を超へて尚以上の制限迄は適用し得べしと雖も場合に依りては以上に述べし信用し得べき程度は多少減少せざるべからず

次に時間的に適用し得べき程度に就きては一つの流量曲線を抽出すれば其曲線は抽出の基礎となりし實測流量と同じ流れの條件の時にのみ適用し得べし例へば河川に於ける堰堤の築造、浚渫、制水

工放水路の新設、堤防の新設又は變更等は何れも流れの條件を變更するものなるを以て其施工以前の流量曲線は最早施工後に適用し得べからず、又可動堰の上流に於ける流量曲線は堰のある開き方の時押出せるものは他の開き方の時には最早適用すること能はず、又支川に於て本川増水の爲め流量の湛へらるゝ如き處に於ける流量曲線は其湛水時間内には最早適用すること能はず、又流氷等の爲めに流水の妨けられたる時には其以前の流量曲線を適用すること能はざるが如し

河川の形狀(Configuration)又は河川に施工せられたる工事は如何に流量曲線に影響すべきやを考究するは興味ある問題あるも今之を一々例證すべき材料を有せざるを以て次に(13)の形式の流量曲線に就き豫報的に此問題に關する二三の推定說を擧げて此論を終らむ

此に關しても空間的と時間的とに區別すべし空間的の影響に就きては次の如し

一、大河に在りては小河に於けるよりもaの價大なり

二、上流急勾配にして下流緩勾配の處に在りてはaの價小なり

三、上流緩勾配にして下流急勾配の處にてはaの價大なり

四、狹搾部の上流にてはaの價小なり

五、河口(湖に注ぐ川の如き)に在りてはaの價大なり

六、平たく廣き橫斷面に於ては狹く深き橫斷面に於けるよりもaの價大なり

七、一の橫斷面に於ては低水部及び高水部のもの中水部のものよりaの價大なり

時間的の影響に就きては次の如し

八、堰堤の築造はbを減少しaを增加す

九、浚渫はbを增加しaを減少す

十、堤防の新設はaを減少す

十一、川の擴築はaを増加す
十二、放水路の新設は其上流にてはaを増加し下流にてはaを減少す
十三、下流の可動堰を開く時はbを増加しaを減少す、之れに反して堰を閉づる時はbを減少しaを増加す
十四、本川出水の爲めに洪水せられたる支川又は流氷等に妨げられたる時はbを減少しaを増加す

…（終）…

歐洲電氣事業の一斑と地中配電線路の概要に就て（承四七八頁）

工學士　福中佐太郎君

彼のリユーカン大發電所の十四萬五千馬力の工事は今方に其竣成に忙しくして、近く其運轉を開始するに至るべくノツトツデン硝石工場は本年中を以てスフエールグオス下流に二萬馬力の發電所を建設し、其他グロンメン河域ヴアンマには七八萬馬力の大發電所建設中にて、チツセフオス三萬千五百馬力の發電所亦、八萬乃至十萬馬力の増設計畫中である、この電力は硝石、硫酸アンモニア、シアニミードカーバイド若くは鐵鑛亞鉛鑛の精煉其他フエロシリカ、セルロイド及紙料等に用ひられる千九百十年には、窒素化合物製造のみにて、十七八萬馬力の電氣が使用せられ、兩三年を出でずして三十萬馬力は之に用ひらるべしといふ

瑞典國立發電所のトロルヘツタンは目下其擴張工事中にて本年中には竣成すべし、同國政府は尚ルーレ、エルフ河流のポルユスに於て五萬馬力發電所建設を企て、最初三萬七千五百馬力の設備を成すことゝし、該發電所に達する五十四キロメーターの鐵道延長線路費等を併せ、二千百五十萬クローネの工費支出をば、昨年議會の協賛を經て、今其着手の運にかつて居る、本發電所は地下五十メータ