BESTIMMUNG DER WASSERMENGENKURVE.

H. Kimishima.

Wenn man als Wassermengenkurve die allgemeine parabolische Kurve $n^{\underline{ter}}$ Ordnung

$$Q=P(h+z)^n * \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

zugrunde legt, so bedeutet Q die Abflussmenge entsprechend einem Wasserstand h, waehrend der Wert von z und die Konstanten P und n aus einer Reihe von Wassermengenmessungen bei moeglichst verschiedenen Wasserstaenden bestimmt werden sollen. Nimmt man die Logarithmen der beiden Seiten der Gl. (1)

$$\log Q=\log P+n \log (h+z), \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

so kann man log Q als eine Funktion von P, n und z annehmen, und wir erhalten demnach

$$F(P,n,z)=\log P+n \log(h+z), \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

oder

$$F(P,n,z)-\log Q=O. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

Versteht man unter (P), (n) und (z) Naeherungswerte von P, n und z, und unter p, ν und ζ deren Verbesserungen, also p, ν, δ sehr klein verglichen mit P, n, z;

$$\left.\begin{aligned} P &= (P) + p \\ n &= (n) + \nu \\ z &= (z) + \zeta \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

so kann man mit Hilfe des Taylorschen Satzes die obige Funktion F entwickeln wie folgend:

$$\begin{aligned} F(P,n,z) &= F[(P)+p,(n)+\nu,(z)+\zeta] \\ &= F[(P),(n),(z)]+\frac{\partial F}{\partial P}p+\frac{\partial F}{\partial n}\nu+\frac{\partial F}{\partial z}\zeta \\ &= \log(Q)+ap+b\nu+c\zeta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6) \end{aligned}$$

* Handbuch der Ingenieurwissenschaft, der Wasserbau s 298.

worin

$$a = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{1}{P} \log e, \qquad \log e = 0{,}434\ 294$$

$$b = \frac{\partial F}{\partial n} = \log(h+z),$$

und

$$c = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{n}{h+z} \log z.$$

Die Fehler-gleichung ist dann in der Regel

$$v = ap + b\nu + c\zeta + l \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7)$$

worin

$$l = \log(Q) - \log Q.$$

Laeszt sich jedoch der Wert z auf irgend eine Weise ausfindig machen, so wird die obige Funktion einfach:

$$F(P,n) = F[(P),(n)] + ap + b\nu \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (6^a)$$

und ebenso wird die Fehler-gleichung einfacher als (7)

$$v = ap + b\nu + l \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7^a)$$

Nach den in der Naehe eines Pegels ausgefuehrten Messungen wurde nun gefunden, dasz der Flusz bei

−0,36	Meter	am	Pegel	84,00cbm.
−0,10	"	"	"	105,00 "
+0,33	"	"	"	158,00 "
+0,46	"	"	"	163,00 "
+0,62	"	"	"	190,00 "
+0,87	"	"	"	228,00 "

Wassermenge fuehrt. Ferner Konnten im Fluss Fahrzeuge von 1,5 Meter Tiefgang bei niedrigstem Wasserstand −0,49 Meter oben gerade noch schwimmen. Deshalb kennen wir in diesem Falle

$$z = 1{,}50 + 0{,}49 = 1^m{,}99$$

und

$$h = -0^m{,}36$$

$$Q = 84{,}00 \text{ cbm.},$$

welche als Naeherungswerte

$$(n) = 2, \qquad (P) = 32$$

ergeben.

Und weiter

$$a=\frac{0{,}434\ 294}{32}=0{,}013\ 572$$

Nr.	h m	h+z m	b	log(Q)	Q	logQ	l
1	−0,36	1,63	0,21 219	1,92 953	84cbm	1,92 428	0,00 525
2	−0,10	1,89	0,27 646	2,05 807	105	2,02 119	0,03 688
3	+0,33	2,32	0,36 549	2,23 613	158	2,19 866	0,03 747
4	0,46	2,45	0,38 917	2,28 349	163	2,21 219	0,07 130
5	0,62	2,61	0,41 664	2,33 843	190	2,27 875	0,05 968
6	0,87	2,86	0,45 637	2,41 789	228	2,35 793	0,05 996

sodasz erhaelt man die Fehlergleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} V_1=0{,}013\ 572\ p+0{,}21\ 219\ \nu+0{,}00\ 525 \\ V_2=0{,}013\ 572\ p+0{,}36\ 549\ \nu+0{,}03\ 688 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (\ 8\ )$$

Setzt man

$$\frac{p}{10}=p'$$

dann

$$\left.\begin{array}{l} V_1=0{,}13\ 572\ p'+0{,}21\ 219\nu+0{,}00\ 525 \\ V_2=0{,}13\ 572\ p'+0{,}36\ 549\nu+0{,}03\ 688 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ (\ 8^a\ )$$

und die Normal Gleichungen werden bei den Prinzip der Kleinsten Quadraten wie folgendes:-

$$\left.\begin{array}{l} [aa]p'+[ab]\nu+[al]=0 \\ [ab]p'+[bb]\nu+[bl]=0 \end{array}\right\} \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots (\ 9\ )$$

Nun mit den obigen Erfolgnissen

	aa	bb	ab	al	bl
1	0,01 842	0,04 502	0,02 880	0,00 071	0,00 111
2	"	0,07 643	0,03 752	0,00 501	0,01 020
3	"	0,13 358	0,04 960	0,00 509	0,01 370

4	"		0,15 145	0,05 282	0,00 968	0,02 775
5	"		0,17 359	0,05 655	0,00 810	0,02 487
6	"		0,20 827	0,06 194	0,00 814	0,02 736
Summe		0,11 052	0,78 834	0,28 723	0,03 673	0,10 499

und

$$0{,}11\ 052\ p' + 0{,}28\ 723\ \nu + 0{,}03\ 673 = 0$$
$$0{,}28\ 723\ p' + 0{,}78\ 834\ \nu + 0{,}10\ 499 = 0$$

woraus

$$p' = -\frac{\begin{vmatrix} 0{,}03\ 673 & 0{,}28\ 723 \\ 0{,}10\ 499 & 0{,}78\ 834 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}11\ 052 & 0{,}28\ 723 \\ 0{,}28\ 723 & 0{,}78\ 834 \end{vmatrix}} = 0{,}25\ 940,$$

$$\nu = -\frac{\begin{vmatrix} 0{,}11\ 052 & 0{,}03\ 673 \\ 0{,}28\ 723 & 0{,}10\ 499 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0{,}11\ 052 & 0{,}28\ 723 \\ 0{,}28\ 723 & 0{,}78\ 834 \end{vmatrix}} = -0{,}22\ 769.$$

Deswegen, da $p = 10\ p' = 2{,}59\ 40$,

$$P = 32 + 2{,}59 = 34{,}59$$

und $n = 2 - 0{,}228 = 1{,}772.$

Wenn die verbesserungswerte sehr klein sind, sind die ausgefundene Werte P und n ganz genuegend, aber wenn es nicht der Fall ist kann man wie vorher noch naehere Werte ausfinden; so erhaelt man als Naeherungswerte

$$(P_1) = 34{,}59$$
$$(n_1) = 1{,}772$$

und wie vorher

$$a = \frac{0{,}43\ 4249}{34{,}59} = 0{,}012\ 555,$$

$[aa] = 0{,}09\ 456 \qquad [al_1] = -0{,}00\ 114$

$[bb] = 0{,}79\ 035 \qquad [bl_1] = -0{,}00\ 324$

$[ab] = 0{,}26\ 571$

Aus den Normal Gleichungen

$$0{,}09\ 456 P'_1 + 0{,}26\ 571 \nu_1 - 0{,}00\ 114 = 0$$

$$0{,}26\ 571\ P'_1 + 0{,}79\ 035\nu_1 - 0{,}00\ 324 = 0$$

erhaelt man

$$P'_1 = +0{,}00\ 097,$$
$$\nu_1 = +0{,}00\ 395$$

sodasz

$$P = 34{,}59 + 0{,}0097 = 34{,}60$$
$$n = 1{,}772 + 0{,}004 = 1{,}776$$

Wir haben als die Wahrscheinlichste Formel der Wassermengenkurve

$$\underline{Q = 34{,}60(h+z)1{,}776}$$

Nennt man m der mittler Gewichteinheitsfehler

$$m = \pm 0{,}02$$

woraus erhaelt man die mittle Fehler m_p und m_n fuer P und n:

$$m_p = \pm 2{,}5$$
$$m_n = \pm 0{,}098$$

In der obigen Bestimmung ist ein Wasserstand z, bei dem die Wassermenge gleich Null sein muesste; diese Annahme mag aber imaginaer sein. Wenn man die folgende quadratische Gleichungsform Ψ

$$Q = a + bh + ch^2 \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (10)$$

zugrunde legt und damit auf die Bedingung verzichlet, dasz die Wassermenge in einer bestimmter Hoehe gleich Null sein muesse, so koennen wir wie folgend die wahrscheinlichsten Werte von a,b und c ausfinden. Wieder wie vorher bezeichnen wir (a),(b),(c), als
Naeherungswerte von a,b,c und α,β,γ als deren Verbesserungen, dann

$$\begin{aligned} Q &= F(a,b,c) \\ &= F[(a)+\alpha,\ \ (b)+\beta,\ \ (c)+\gamma], \\ &= F[(a),(b),(c)] + \frac{\partial F}{\partial a}\alpha + \frac{\partial F}{\partial b}\beta + \frac{\partial F}{\partial c}\gamma \cdots \cdots \cdots \cdots (11) \end{aligned}$$

Wenn man hier, ∂a

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial b} = h, \quad \text{und} \quad \frac{\partial F}{\partial c} = h^2,$$

$(Q) - Q = l$ einsetzt, so erhaelt man als allgemeine Fehlergleichung

$$v = \alpha + h\beta + h^2\gamma + l \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (12)$$

Aus einer graphischen Darstellung von Wassermengen und Pegelstaenden

Ψ Handbuch der Ingenieurwissenschaft, der Wasserbau s 299.

haven wir in dem vorigen Beispiel

$(a)=115$ wenn $h=0$

Ferner $Q=105$ cbm. bei $h=-0,^{m}10$

$Q=190$ " " $h=0,^{m}62$

welche ergeben

$(b)=100$

und $(c)=30$

Bei der Prinzip der kleinsten Quadraten, werden die entsprechenden Normalgleichungen wie folgend:

$$\left.\begin{aligned} k\alpha+[h]\beta+[h^2]\gamma-[1]=0 \\ [h]\alpha+[h^2]\beta+[h^3]\gamma-[h1]=0 \\ [h^2]\alpha+[h^3]\beta+[h^4]\gamma-[h^21]=0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

$k=$ die Anzahl der Wassermengenmessungen

$=6$

Nun aus

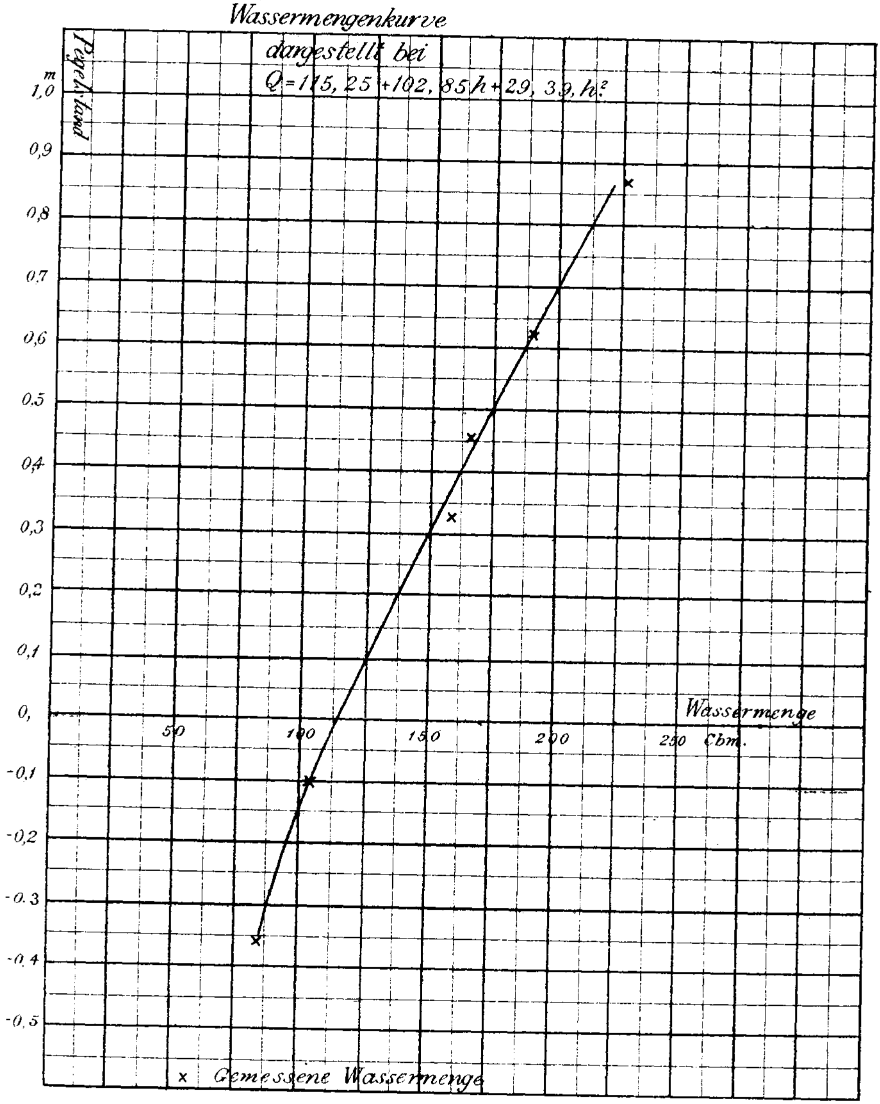
$(Q)=115+100h+30\ h^2$

Nr.	h	h^2	(Q)	l
1	$-0,^{m}36$	0,12 96	$82,^{cb}888^{m}$	+1,112
2	−0,10	0,01 00	105, 300	+0,300
3	$+0,^{m}33$	0,10 89	151, 267	−6,733
4	0,46	0,21 16	167, 348	+4,348
5	0,62	0,38 44	188, 552	−1,468
6	0,87	0,75 69	224, 707	−3,293
Summe	1,82	1,60 14		−5,734

Nr.	h^3	h^4	h1	$h^2$1
1	−0,04 666	0,01 680	−0,40 032	+0,14 411
2	−0,00 100	0,00 010	−0,03 000	0,00 300
3	+0,03 594	0,01 186	−2,22 189	−0,73 322
4	0,09 734	0,04 478	+2,00 008	0,92 004
5	0,23 833	0,14 776	−0,91 016	−0,56 429
6	0,65 850	0,57 290	−2,86 491	−2,49 247
Summe	0,98 245	0,79 420	−4,42 720	−2,72 283

Es sind also:

$$6\alpha+1,82\ 000\beta+1,60\ 140\gamma-5,73\ 400=0$$



Wassermengenkurve
dargestellt bei
Q=115,25+102,85h+29,39h²
Pegelstand
m
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,
-0,1
-0,2
-0,3
-0,4
-0,5
50
100
150
200
250 Cbm.
Wassermenge
× Gemessene Wassermenge

$$1{,}82\ 000\alpha + 1{,}60\ 140\beta + 0{,}98\ 245\gamma - 4{,}42\ 720 = 0$$
$$1{,}60\ 140\alpha + 0{,}98\ 245\beta + 0{,}79\ 420\gamma - 2{,}72\ 283 = 0$$

welche ergeben

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} 5{,}73\ 400 & 1{,}82\ 000 & 1{,}60\ 140 \\ 4{,}42\ 720 & 1{,}60\ 140 & 0{,}98\ 245 \\ 2{,}72\ 283 & 0{,}98\ 245 & 0{,}79\ 420 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 1{,}82\ 000 & 1{,}60\ 140 \\ 1{,}82\ 000 & 1{,}60\ 140 & 0{,}98\ 245 \\ 1{,}60\ 140 & 0{,}98\ 245 & 0{,}79\ 420 \end{vmatrix}} = 0{,}25\ 347$$

$$\beta = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 5{,}73\ 400 & 1{,}60\ 140 \\ 1{,}82\ 000 & 4{,}42\ 720 & 0{,}98\ 245 \\ 1{,}60\ 140 & 2{,}72\ 282 & 0{,}79\ 420 \end{vmatrix}}{''} = 2{,}84\ 859$$

und

$$\gamma = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1{,}82\ 000 & 5{,}73\ 400 \\ 1{,}82\ 000 & 1{,}60\ 140 & 4{,}42\ 720 \\ 1{,}60\ 140 & 0{,}98\ 245 & 2{,}72\ 282 \end{vmatrix}}{''} = -\,0{,}60\ 651$$

Deshalb

$$a = (a) + \alpha = 115 + 0{,}25 = 115{,}25,$$
$$b = (b) + \beta = 100 + 2{,}85 = 102{,}85,$$
$$c = (c) + \gamma = 30 - 0{,}61 = 29{,}39.$$

Schlieszlich ist die Wassermengenkurve

$$\underline{Q = 115{,}25 + 102{,}85h + 29{,}39h^2}$$