閉合形架構及び框構の解法（三）

瀬　戸　　政　章

I. 任意の矩形框構が任意の荷重を受ける場合

第26圖の框構は部材の斷面は凡て相異なり構造物は任意の荷重を受けるものと考ふ。但し此の場合構造物は偶力率を伴ふ事なく飽く迄靜力學的平衡を保つ場合である。此の時構造が多少の變形をして $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ の撓角と d_1 及び d_2 の撓度を起したと考へると、今

$$\mu_1 = -3R_1 = -\frac{3d_1}{h}, \qquad \mu_2 = -3R_2 = -\frac{3d_2}{l}$$

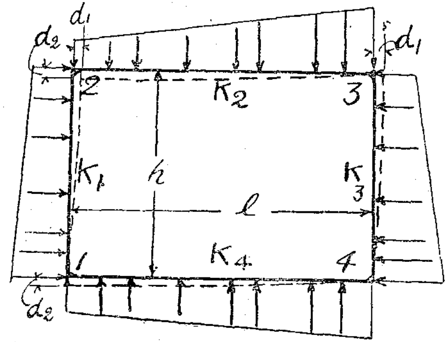
とし更に剛度を便宜上

$$\frac{I_1}{h}\frac{h}{I_1} = k_1 \quad \frac{I_2}{l}\frac{h}{I_1} = k_2 \quad \frac{I_3}{h}\frac{h}{I_1} = k_3 \quad \frac{I_4}{l}\frac{h}{I_1} = k_4$$

と置き次の如き事を規約するものとする。

$$\frac{C_{\alpha\beta}}{2E} = P_{\alpha\beta}$$

$\rho_x = 2$（點 x に集まる部材の k の總和）



第　26　圖

$$X = \frac{2}{3}\text{（平行移動を生ずる}k\text{の總和）}$$

$$q = -\frac{Qh}{6E},\quad \text{但し、}Q=\text{頂部の水平剪力}$$

$$h = Q\text{の働く高さ}$$

又撓角撓度式の平衡條件として次の二式を與へ得る。

$$(38)\cdots\cdots\cdots\cdots \begin{cases} \Sigma M_A = 0 \\ \Sigma (M_{\gamma R} + M_{R\gamma}) + Qh = 0 \end{cases}$$

即ち A 點のモーメントの總和は零である事及び移動を生ずる部材の兩端のモーメントの總和に頂部に働く剪力に依るモーメントを加へたるものは零に等しい事である。

以上の規約及條件から次の如くなる。即ち、

$$M_{14} = 2Ek_4(2\varphi_1 + \varphi_4 + \mu_2) + C_{14}$$

$$M_{12} = 2Ek_1(2\varphi_1 + \varphi_2 + \mu_1) - C_{12}$$

$$M_{21} = 2Ek_1(2\varphi_2 + \varphi_1 + \mu_1) + C_{21}$$

$$M_{23} = 2Ek_2(2\varphi_2 + \varphi_3 + \mu_2) - C_{23}$$

$$M_{32} = 2Ek_2(2\varphi_3 + \varphi_2 + \mu_2) + C_{32}$$

$$M_{34} = 2Ek_3(2\varphi_3 + \varphi_4 + \mu_1) - C_{34}$$

$$M_{43} = 2Ek_3(2\varphi_4 + \varphi_3 + \mu_1) + C_{43}$$

$$M_{41} = 2Ek_4(2\varphi_4 + \varphi_1 + \mu_2) - C_{41}$$

の諸式を得る。(38) 式に依り節點平衡條件式から、

$$\Sigma M_1 = 0, \cdots\cdots\cdots \varphi_1\rho_1 + \varphi_2 k_1 + \varphi_4 k_4 + \mu_1 k_1 + \mu_2 k_4 = P_{12} - P_{14} \cdots\cdots\cdots (1)'$$

$$\Sigma M_2 = 0, \cdots\cdots\cdots \varphi_1 k_1 + \varphi_2\rho_2 + \varphi_3 k_2 + \mu_1 k_1 + \mu_2 k_2 = P_{23} - P_{21} \cdots\cdots\cdots (2)'$$

$$\Sigma M_3 = 0, \cdots\cdots\cdots \varphi_2 k_2 + \varphi_3\rho_3 + \varphi_4 k_3 + \mu_1 k_3 + \mu_2 k_2 = P_{34} - P_{32} \cdots\cdots\cdots (3)'$$

$$\Sigma M_4 = 0, \cdots\cdots\cdots \varphi_3 k_3 + \varphi_4\rho_4 + \varphi_5 k_4 + \mu_1 k_3 + \mu_2 k_4 = P_{41} - P_{43} \cdots\cdots\cdots (4)'$$

又層としての平衡條件式からは、

$$M_{-2} + M_{21} + M_{34} + M_{43} + Q_1 h = 0$$

$$M_{23} + M_{32} + M_{41} + M_{14} + Q_2 l = 0$$

尙 S_0 を部材が受ける單純なる桁としての最大剪力とし部材に關する Suffix を附して表はすものとせば、

$$Q_1 = S_{021} - S_{034}, \qquad Q_2 = S_{014} - S_{023}$$

故に層の平衡條件から

$$\varphi_1 k_1 + \varphi_2 k_1 + \varphi_3 k_3 + \varphi_4 k_3 + X_1\mu_1 = \frac{1}{3}\left[(P_{12} + P_{34}) - (P_{21} + P_{43})\right] + q_1 \cdots\cdots\cdots (5')$$

$$\varphi_2 k_2 + \varphi_3 k_2 + \varphi_1 k_4 + \varphi_4 k_4 + X_2\mu_2 = \frac{1}{3}\left[(P_{23} + P_{41}) - (P_{32} + P_{14})\right] + q_2 \cdots\cdots\cdots (6')$$

を得る。今是等を作表して示せば次表を得る。但し、

$$A=\frac{1}{3}\Big[P_{12}+P_{34})-(P_{21}+P_{43})\Big]+q_1,\qquad q_1=\frac{(S_{034}-S_{021})h}{6E},$$

$$B=\frac{1}{3}\Big[P_{23}+P_{41})-(P_{32}+P_{14})\Big]+q_2,\qquad q_2=\frac{(S_{023}-S_{014})l}{6E},$$

$$X_1=\frac{2}{3}(k_1+k_3),\qquad \rho_1=2(k_1+k_4)\qquad \rho_3=2(k_2+k_3)$$

$$X_2=\frac{2}{3}(k_2+k_4),\qquad \rho_2=2(k_1+k_2)\qquad \rho_4=2(k_3+k_4)$$

第　1　表

番號	方程式左邊						方程式右邊
	φ_1	φ_2	φ_3	φ_4	μ_1	μ_2	
(1)′	ρ_1	k_1			k_1	k_4	$P_{12}-P_{14}$
(2)′	k_1	ρ_2	k_2		k_1	k_2	$P_{23}-P_{21}$
(3)′		k_2	ρ_3	k_3	k_3	k_2	$P_{34}-P_{32}$
(4)′			k_3	ρ_4	k_3	k_4	$P_{41}-P_{43}$
(5)′	k_1	k_1	k_3	k_3	X_1		$A+q_1$
(6)′	k_4	k_2	k_2	k_4		X_2	$B+q_2$

故に對稱的荷重ならば、

$$A=B=0,\qquad q_1-q_2=0$$

又對稱荷重にして對稱的構造ならば、

$$\varphi_1=-\varphi_4,\qquad \varphi_2=-\varphi_3,\qquad \mu_1=0,\qquad \mu_2=0,\qquad k_1=k_3$$

此時の未知量方程式は第２表の如くなる。

第　2　表

番號	左邊 φ_1	左邊 φ_2	右邊
(1)′	ρ_1'	k_1	$P_{12}-P_{14}$
(2′)	k_1	ρ_2'	$P_{23}-P_{21}$

玆に、$\rho_1'=2(k_1+k_4)-k_4$

$\rho_2'=2(k_1+k_2)-k_2$

である。

更に框構が二つの對稱物を有する場合は、

$$\varphi_1=-\varphi_4=-\varphi_2=\varphi_3\qquad k_1=k_3\qquad k_2=k_4$$

なるを以つて第３表を得。

玆に、$\rho_1''=2(k_1+k_4)-(k_4+k_1)=k_1+k_4$ である。

II　對稱軸を有する框構にして撓度を生ずる場合

第 27 圖 に於ては $\overline{D'A'}$ は對稱軸となり $D'A'$ 點が剛結なる場合，鉸結なる場合を問は撓角 φ は零である。此時便宜上剛度 k を比を以つて表はして

$$\frac{I_1}{h_3}\,\frac{h_3}{I_1}=k_1\,,\qquad \frac{I_2}{l_2}\,\frac{h_3}{I_1}=k_2\,,$$

$$\frac{I_3}{h_2}\,\frac{h_3}{I_1}=k_3\,,\qquad \frac{I_4}{l_1}\,\frac{h_3}{I_1}=k_4\,,$$

$$\frac{I_5}{l_3}\,\frac{h_3}{I}=k_5\ ,\qquad \frac{l_3}{l_1}=n_1$$

$$\frac{l_2}{l_1}=n_2\qquad\qquad \frac{h_3}{h_2}=n_3$$

と置けば方程式は次の如くである。

$$M_{A'A}=2Ek_5\,(\varphi_A+\mu_1)-C_{A'A}$$

$$M_{AA'}=2Ek_5\,(2\varphi_A+\mu_1)+C_{AA'}$$

$$M_{AB}=2Ek_1\,(2\varphi_A+\varphi_B+\mu_3)-C_{AB}$$

$$M_{BA}=2Ek_1\,(2\varphi_B+\varphi_A+\mu_3)+C_{BA}$$

$$M_{BC}=2Ek_2\,(2\varphi_B+\varphi_C+\mu_2)-C_{BC}$$

$$M_{CB}=2Ek_2\,(2\varphi_C+\varphi_B+\mu_2)+C_{CB}$$

$$M_{CD}=2Ek_3\,(2\varphi_C+\varphi_D+\mu_3')-C_{CD}$$

$$M_{DC}=2Ek_3\,(2\varphi_D+\varphi_C+\mu_3')+C_{DC}$$

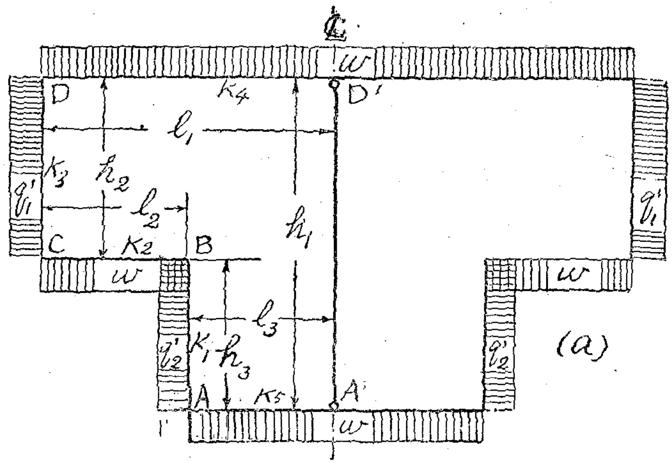
$$M_{DD'}=2Ek_4\,(2\varphi_D+\mu_1')-C_{DD'}$$

$$M_{D'D}=2Ek_4\,(\varphi_D+\mu_1')+C_{D'D}$$

以上に於て撓度を d で表はせば、

第 3 表

番號	左邊 (φ_1)	右邊
(1′)	φ_1''	$P_{12}-P_{14}$



第 27 圖

$$\mu_1 = -\frac{3d_1}{l_3} = -\frac{3d_1}{n_1 l_1}, \quad \mu_2 = -\frac{3d_2}{l_2} = -\frac{3d_2}{n_2 l_1},$$

$$\mu_3 = -\frac{3d_3}{h_3} = -\frac{3d_3}{n_3 h_2}, \quad \mu_3' = +\frac{3d_3}{h_2}, \quad \mu_1' = -\frac{3(d_1+d_2)}{l_1}$$

なる關係を得る。從つて、

$$\mu_3' = -n_3\mu_3 \qquad \mu_1' = n_1\mu_1 + n_2\mu_2$$

なる事が判る。故に此等の μ_3' 及 μ_1' を撓角撓度式に代入して $\Sigma M = 0$ の條件を用ふれば $\varphi_A\ \varphi_B\ \varphi_C\ \varphi_D$ の4個の未知量を含む4個の節點方程式

$$\varphi_A\rho_A + \varphi_B k_1 + \mu_1 k_5 + \mu_3 k_1 = P_{AB} - P_{AA'} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1')$$

$$\varphi_A k_1 + \varphi_B\rho_B + \varphi_C k_2 + \mu_2 k_2 + \mu_3 k_1 = P_{BC} - P_{BA} \cdots\cdots\cdots (2')$$

$$\varphi_B k_2 + \varphi_C\rho_C + \varphi_D k_3 + \mu_2 k_2 - \mu_3 n_3 k_3 = P_{CD} - P_{CB} \cdots\cdots (3')$$

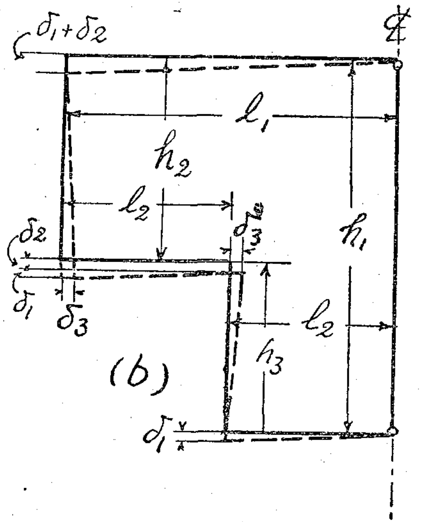
$$\varphi_C k_3 + \varphi_D\rho_D - \mu_\infty k_3 n_3 + \mu_1 k_4 n_1 + \mu_2 k_4 n_2 = P_{DD'} - P_{D'C} \ (4')$$

を得る。

又層の平衡條件に對しては、

$$n_1(M_{DD'} + M_{D'D}) + M_{AA'} + M_{A'A} + Q_1\ l_3 = 0$$

$$n_2(M_{DD'} + M_{D'D}) + M_{BC} + M_{CB} + Q_2\ l_2 = 0$$



第　28　圖

$$-n_3(M_{CD}+M_{DC})+M_{AB}+M_{BA}+Q_3h_3=0$$

を與へ得るから是等の條件から、

$$\varphi_A k_5+\varphi_D n_1 k_4+\frac{2}{3}(k_5+n_1^2k_4)\mu_1+\frac{2}{3}n_1 n_2 k_4\mu_2=\frac{(S_{OAA'}-S_{ODD'})\,l_3}{6E} \cdots\cdots\cdots\cdots (5)'$$

$$\varphi_B k_2+\varphi_C k_2+\varphi_D n_2 k_4+\frac{2}{3}(k_2+n_2^2k_4)\mu_2+\frac{2}{3}n_1 n_2 k_4\mu_1=\frac{(S_{OCB}-S_{ODD'})\,l_2}{6E} \cdots (6)'$$

$$\varphi_A k_1+\varphi_B k_1-\varphi_C n_3 k_3-\varphi_D n_4 k_3+\frac{2}{3}(k_1+k_3n_3^2)\mu_3=-\frac{(S_{OBA}+S_{OCD})h_3}{6E} \cdots\cdots\cdots (7)'$$

故に今、

$$\overline{X}_1=\frac{2}{3}(k_5+n_1^2k_4),\quad \overline{X}'=\frac{2}{3}n_1 n_2 k_4,\quad \overline{X}_2=\frac{2}{3}(k_2+n_2^2k_4)$$

$$\overline{X}_3=\frac{2}{3}(k_1+n_3^2k_3)$$

$$q_1=\frac{(S_{OAA'}-S_{ODD'})\,l_3}{6E}=\frac{l_3}{6E}\left(\frac{wl_3}{2}-\frac{wl_1}{2}\right)=-\frac{wl_2l_3}{12E}$$

$$q_2=\frac{(S_{OCB}-S_{ODD'})\,l_2}{6E}=\frac{l_2}{6E}\left(\frac{wl_2}{2}-\frac{wl_1}{2}\right)=-\frac{wl_2l_3}{12E}$$

$$q_3=-\frac{(S_{OBA}+S_{OCD})\,h_3}{6E}=-\frac{h_3}{6E}\left(\frac{q_2'h_3}{2}+\frac{q_1'h_2}{2}\right)=-\frac{q_2'h_3^2+q_1'h_2h_3}{12E}$$

と置けば第４表を得る。但し（a）（b）（c）は等布荷重ならざる場合に用ひるものなり。

$$(a)=\frac{1}{3}\left[P_{DD'}-P_{D'D})n_1+(P_{A'A}-P_{AA'})\right]$$

$$(b)=\frac{1}{3}\left[P_{DD}-P_{D'D})n_2+(P_{BC}-P_{CB})\right]$$

$$(c)=\frac{1}{3}\left[P_{DC}-P_{CD})n_3+(P_{AB}-P_{BA})\right]$$

第 4 表

番號	方程式左邊							方程式右邊
	φ_A	φ_B	φ_C	φ_D	μ_1	μ_2	μ_3	
(1)	ρ_A	k_1			k_5		k_1	$P_{AB}-P_{AA'}$
(2)	k_1	ρ_B	k_2			k_2	k_1	$P_{BC}-P_{BA}$
(3)		k_2	ρ_C	k_3		k_2	$-n_3k_3$	$P_{CD}-P_{CB}$
(4)			k_3	ρ_D	n_1k_4	n_2k_4	$-n_3k_3$	$P_{DD'}-P_{DC}$
(5)	k_5			n_1k_4	$\overline{X_1}$	$\overline{X'}$		$q_1+(a)$
(6)		k_2	k_2	n_2k_4	$\overline{X'}$	$\overline{X_2}$		$q_2+(b)$
(7)	k_1	k_1	$-n_3k_3$	$-n_3k_3$			$\overline{X_3}$	$q_3+(c)$

故に φ 及 μ の 7 個の未知量を求めて原式に代入せば各剛節點の彎曲率を算出する事が出來る。

Ⅲ. 矩形框構が對稱荷重を受ける場合

(a) 垂直對稱荷重を受ける場合

今第29圖に於て、

$$\frac{k}{k_1}=n,\qquad \frac{k}{k_2}=m$$

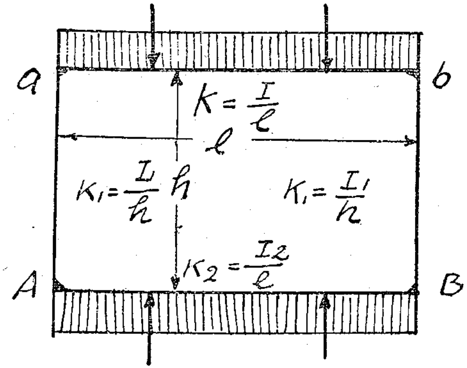
と置けば $\varphi_A=-\varphi_B$, $\varphi_a=-\varphi_b$ なる關係があるから、

$$M_{ab}=2Ek(\varphi_a)-C_{ab} \cdots\cdots\cdots(a)$$

$$m\,M_{AB}=2Ek(\varphi_A)+m\,C_{AB} \cdots\cdots\cdots(b)$$

$$n\,M_{aA}=2Ek(2\varphi_a++\varphi_A) \cdots\cdots\cdots(c)$$

$$n\,M_{Aa}=2Ek(2\varphi_A+\varphi_a) \cdots\cdots\cdots(d)$$



第　29　圖

の4式を得る。然るに $M_{ab}=-M_{aA}$, $M_{bB}=-M_{ba}$ なれば

2 (a)+(b)−(c) を作れば、

$$(2+n)M_{ab}+mM_{AB}=-2C_{ab}+mC_{AB} \cdots\cdots\cdots(e)$$

又　2(b)+(a)−(d) を作れば、

$$(2m+n)M_{AB}+M_{ab}=2m\,C_{AB}-C_{ab} \cdots\cdots\cdots(f)$$

の二式を得て是より M_{AB}, M_{ab} を求むれば、

$$(39)\cdots\cdots\begin{cases} M_{AB}=\dfrac{C_{AB}(3+2n)m-n\,C_{ab}}{\{(2+n)n+(3+2n)m\}}=-M_{Aa} \\ M_{ab}=\dfrac{mn\,C_{AB}-C_{ab}(3n+2n)}{\{(2+n)n+(3+2n)m\}}=-M_{aA} \end{cases}$$

（b） 水平對稱荷重を受ける場合。同様な考へから、

$$M_{ab}=2\,Ek\,(\varphi_A) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

$$n\ M_{aA}=2\,Ek\,(2\,\varphi_a+\varphi_A)+n\,C_{aA}\cdots\cdots (b)$$

$$n\ M_{Aa}=2\,Ek\,(2\,\varphi_A+\varphi_a)-n\,C_{Aa}\cdots\cdots (c)$$

$$m\ M_{AB}=2\,Ek\,(\varphi_A) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (d)$$

2（a）+（d）−（b）を作れば、

$$(n+2)\,M_{ab}+m\,M_{AB}=-n\,C_{aA} \quad\cdots\cdots (e)$$

2（d）+（a）−（c）を作れば、

$$(2\,m+n)\,M_{AB}+M_{ab}=n\,C_{Aa} \quad\cdots\cdots\cdots (f)$$

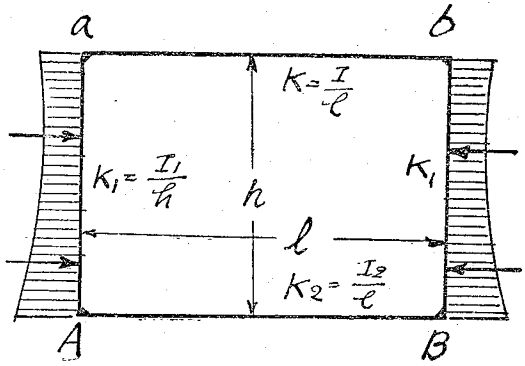
（e）（f）より M_{AB}, M_{ab} を作れば、

$$(40)\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M_{AB}=\dfrac{C_{Aa}\,(2+n)\,n+n\,C_{aA}}{\{(2+n)n+(3+2n)m\}}=-M_{Aa} \\ M_{ab}=-\dfrac{C_{aA}\,(2n+n)\,n+mn\,C_{Aa}}{\{(2+n)n+(3+2n)m\}}=-M_{aA} \end{cases}$$

（c） 垂直水平荷重を受ける場合

(39) と (40) 式の總和を以つて表はし得るから、

$$\Big\{ M_{AB}=\frac{C_{AB}(3+2n)m-nC_{ab}+C_{Aa}(2+n)n+nC_{aA}}{\{(2+n)n+(3+2n)m\}}=-M_{Aa}$$



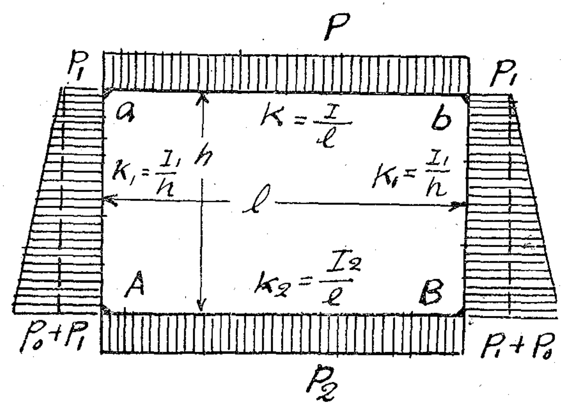
第　30　圖

$$(41)\left\{\begin{aligned} M_{ab} &= \frac{mnC_{AB}-C_{ab}(3m+2n)-C_{aA}(2m+n)n-mnC_{Aa}}{\{(2+n)n+(3+2n)m\}} \\ &= -M_{aA} \end{aligned}\right.$$

第 31 圖の如き場合は荷重項は夫々、

$$C_{AB}=\frac{p_2 l^2}{12},\quad C_{ab}=\frac{pl^2}{12},\quad C_{AB}=\frac{p_1h^2}{12}+\frac{p_0h^2}{20},$$

$$C_{aA}=\frac{p_1h^2}{12}+\frac{p_0h^2}{30}$$



第　31　圖

となるから、

$$(42)\cdots\left\{\begin{aligned} M_{AB} &= \frac{p_2 l^2(3+2n)m-npl^2}{12\{(2+n)n+(3+2n)m\}} \\ &\quad +\frac{p_1h^2(3+n)n}{12\{(2+n)n+(3+2n)m\}}+\frac{p_0h^2(8+3n)n}{60\{(2+n)n+(3+2n)m\}} \\ M_{ab} &= \frac{mnp_2l^2-pl^2(3m+2n)}{12\{(2+n)n+(3+2n)m\}} \\ &\quad -\frac{p_1h^2(3m+n)n}{12\{(2+n)n+(3+2n)m\}}-\frac{p_0h^2(7m+2n)n}{60\{(2+n)n+(3+2n)m\}} \end{aligned}\right.$$

を得る。(42)式に於て $p_2=p$ であり $m=1$ なる時は、

$$(43)\cdots\cdots\cdots\cdots\left\{\begin{aligned} M_{AB} &= +\left\{\frac{p_2 l^2}{12(1+n)}+\frac{p_1h^2n}{12(1+n)}+\frac{p_0h^2(8+3n)n}{60(n^2+4n+3)}\right\}=-M_{Aa} \\ M_{ab} &= -\left\{\frac{p_2 l^2}{12(1+n)}+\frac{p_1h^2n}{12(1+n)}+\frac{p_0h^2(7+2n)n}{60(n^2+4n+3)}\right\}=-M_{aA} \end{aligned}\right.$$

となる。筆者が最小働の法則に依りて求めた (19) 式と (43) 式とは全く同一であつて符號の異なるは只假定の相違に過ぎない。從つて (43) 式に於て $p_2=P$ と置いたるものは (18) 式と同一であり、(43) 式から (20) 及 (21) 式も導き得る事は當然である。又第2表より (42) 及 (43) 式を求め得る。

Ⅳ. 對稱二徑間框構が等布荷重を受ける場合

第 32 圖に於ては構造物は二個の對稱軸を有するから $\mu=0,\ \varphi_E=\varphi_{E'}=0,\ \varphi_A=-\varphi_{A'}$ である。

今 $\dfrac{I_2}{l}\Big/\dfrac{I_1}{h}=k$ とせば、E を略し、

$$M_{AE}=2k(2\varphi_A)+C_{AE}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(a)$$

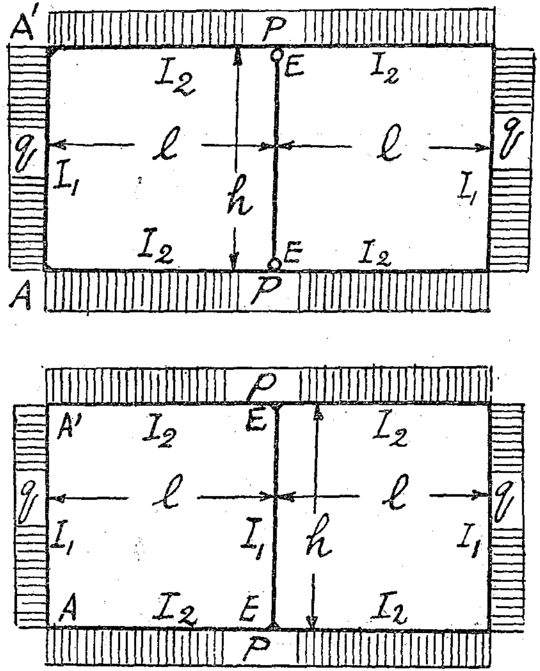
$$M_{AA'}=2(\varphi_A)-C_{AA'}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(b)$$

$$M_{EA}=2k(\varphi_A)-C_{EA}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(c)$$

$\Sigma M_A=0$ より

$$\varphi_A=\frac{P_{AA'}-P_{AE}}{(1+2k)}\qquad 但し\ P_{\alpha\beta}=\frac{C_{\alpha\beta}}{2}\ とす。$$

故に、



第 32 圖

$$M_{AE}=\frac{4P_{AA'}+2P_{AE}}{(1+2k)}$$

$$M_{EA}=\frac{2P_{AA'}k-2(1+3k)P_{AE}}{(1+2k)}$$

然るに、

$$P_{AA'}=\frac{C_{AA'}}{2}=\frac{qh^2}{24}\qquad P_{AE}=\frac{C_{AE}}{2}=\frac{Pl^2}{24}$$

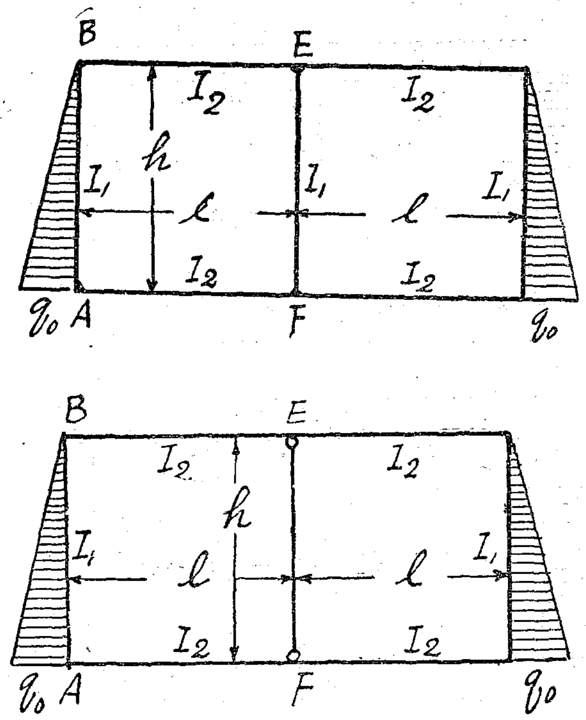
なるを以つて $P_{AA'}$, P_{AE} を φ_A に代入して、

$$(44)\cdots\cdots\cdots\cdots\left\{\begin{aligned}M_A&=-\frac{2qh^2k+pl^2}{12(1+2k)}=M_{A'}\\M_E&=\frac{qh^2k-(1+3k)pl^2}{12(1+2k)}=M_{E'}\end{aligned}\right.$$

を得る。EE' は剛結或は鉸結でも同樣である。

V.　對稱二徑間框構が對稱的荷重を受けて且つ μ の存在する場合

第 33 圖の場合は左右に同大異方向の撓度を生ずるから、未知量は φ_A, φ_B 及 μ の 3 個であつて、此時も $E\ F$ は剛結たると鉸結たるとを問はず對稱軸線上に在るを以つて



第 33 圖

$\varphi_E = \varphi_F = 0$ である。

同様に $k_2 / k_1 = k$ と置けば、

$$M_{AF} = 2k\,(2\varphi_A + \mu) \cdots\cdots\cdots (a)$$

$$M_{AB} = 2\,(2p_A + \varphi_B) - C_{AB} \cdots\cdots\cdots (b)$$

$$M_{BA} = 2\,(2\varphi_B + \varphi_A) + C_{BA} \cdots\cdots\cdots (c)$$

$$M_{BE} = 2k\,(2\varphi_B + \mu) \cdots\cdots\cdots (d)$$

$$M_{FA} = 2k\,(\varphi_A + \mu) \cdots\cdots\cdots (e)$$

$$M_{EB} = 2k\,(\varphi_B + \mu) \cdots\cdots\cdots (f)$$

故に $\Sigma M = 0$ の條件より、

$\Sigma M_{A=0}$ より、 $\varphi_A(2+2k) + \varphi_B + \mu k = P_{AB} \cdots\cdots (1)'$

$\Sigma M_{B=0}$ より、 $\varphi_B(2+2k) + \varphi_A + \mu k = -P_{BA} \cdots (2)'$

$\Sigma(M_{\gamma R} + M_{R\gamma}) = 0$ より、$\varphi_A k + \varphi_B k + \frac{4}{3}\mu k = 0 \cdots\cdots (3)'$

卽ち第5表を得る。

第5表より未知量 φ_A φ_B 及び μ を求むれば、

$$\varphi_A = + \frac{(5k+8)\,P_{AB} + (4-3k)\,P_{BA}}{2(1+2k)(6+k)}$$

$$\varphi_B = -\frac{(5k+8)P_{BA}+(4-3k)P_{AB}}{2(1+2k)(6+k)}$$

$$\mu = \frac{3(P_{BA}-P_{BA})}{2(6+k)}$$

是等の値を原式（1）′（2）′（3）′に代入して、

$$M_{AF} = \frac{P_{AB}(4k+13)k+P_{BA}\,11k}{(1+2k)(6+k)}$$

$$M_{FA} = \frac{P_{AB}(5-k)k+P_{BA}(3k+7)k}{(1+2k)(6+k)}$$

$$M_{BE} = -\frac{(4k+13)k\,P_{BA}+P_{AB}\,11k}{(1+2k)(6+k)}$$

$$M_{EB} = -\frac{(5-k)k\,P_{BA}+(7+3k)\,kP_{AB}}{(1+2k)(6+k)}$$

故に　$P_{AB}=\frac{q_0h^2}{40}$,　$P_{BA}=\frac{q_0h^2}{60}$　を代入して、

$$(45)\cdots\cdots\left\{\begin{aligned} M_A &= -\frac{q_0h^2(12k+61)k}{120(1+2k)(6+k)} \\ M_F &= +\frac{q_0h^2(3k+29)k}{120(1+2k)(6+k)} \\ M_B &= -\frac{q_0h^2(8k+59)k}{120(1+2k)(6+k)} \\ M_E &= +\frac{q_0h^2(7k+31)k}{120(1+2k)(6+k)} \end{aligned}\right.$$

第 5 表

番號	左邊			右邊
	φ_A	φ_B	μ	
（1）′	$2(1+k)$	1	k	P_{AB}
（2）′	1	$2(1+k)$	k	$-P_{BA}$
（3）′	k	k	$\frac{4}{3}k$	0

VI. 中間鉸結三徑間對稱的框構

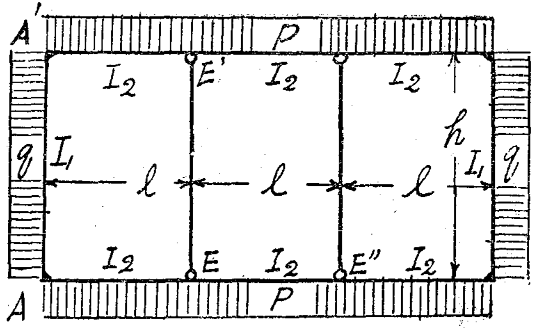
第34圖で未知量は φ_A 及 φ_E の二個である。$\varphi_E=-\varphi_{E''}$，$\varphi_A=-\varphi_{A'}$

$$M_{EE''}=2k(\varphi_E)+C_{EE'} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

$$M_{EA}=2k(2\varphi_E+\varphi_A)-C_{EA} \quad \cdots\cdots\cdots (b)$$

$$M_{AE}=2k(2\varphi_A+\varphi_E)+C_{AE} \quad \cdots\cdots\cdots (c)$$

$$M_{AA'}=2(\varphi_A)-C_{AA} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (d)$$



第　34　圖

故に $\Sigma M_E=0$，及び $\Sigma M_A=0$ より、

第　6　表

番號	左邊		右　邊
	φ_E	φ_A	
(1)′	$3k$	k	0
(2)′	k	$2k+1$	$P_{AA'}-P_{AE}$

第6表より

$$\varphi_A=\frac{3(P_{AA'}-P_{AE})}{(5k+3)}$$

$$\varphi_B=-\frac{(P_{AA'}-P_{AE})}{(5k+3)}$$

故に原式に $\varphi_A\ \varphi_B$ を代入して $P_{AA}=\frac{qh^2}{24}$，$P_{AE}=\frac{pl^2}{24}$ と置き、

$$(46)\cdots\cdots\cdots\cdots\left\{\begin{array}{l} M_A=-\dfrac{3pl^2+5qh^2k}{12(5k+3)}=M_{A'} \\ M_E=-\dfrac{3(2k+1)pl^2-qh^2k}{12(5k+3)}=M_{E'} \end{array}\right.$$

を得る。

Ⅶ. 中間剛結壁三徑間對稱的框構

此の場合は $\overline{EE'}$ 壁に彎曲率を生ずるから、

$$M_{EE'}=2(\varphi_E)\cdots\cdots(a)$$

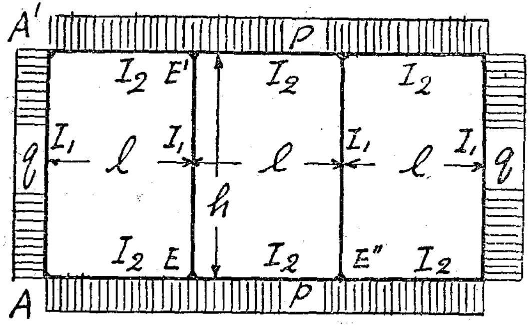
$$M_{EE''}=2k(\varphi_E)+C_{EE'}\cdots\cdots(b)$$

$$M_{EA}=2k(2\varphi_E+\varphi_A)+C_{EA}\cdots\cdots(c)$$

$$M_{AE}=2k(2\varphi_A+\varphi_E)+C_{AE}\cdots\cdots(d)$$

$$M_{AA}=2(\varphi_A)-(C_{AA'})\cdots\cdots(e)$$

の5式を得て $\Sigma M_E=0$　$\Sigma M_A=0$ より第7表を得る。



第　35　圖

第　7　表

番號	左邊 φ_E	左邊 φ_A	右邊
(1)'	$3k+1$	k	0
(2)	k	$2k+1$	$P_{AA}-P_{AE}$

第7表より、

$$\varphi_A=\frac{(3k+1)(P_{AA'}-P_{AE})}{(5k^2+5k+1)},$$

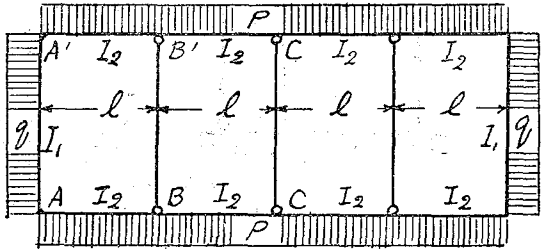
$$\varphi_B=\frac{k(P_{AA'}-P_{AE}}{(5k^2+5k+1)},$$

を得て原式に代入せば、同様に $P_{AA'}=\frac{qh^2}{24}$, $P_{AE}=\frac{pl^2}{24}$ なれば、

$$
(47)\cdots\cdots\cdots
\begin{cases}
M_A = -\dfrac{pl^2(3k+1)+(5+2)qh^2k}{12(5k^2+5k+1)} = M_{A'} \\
M_{EA} = -\dfrac{pl^2(6k^2+6k+1)-(k+1)qh^2k}{12(5k^2+5k+1)} \\
M_{EE} = \dfrac{pl^2k-qh^2k}{12(5k^2+5k+1)} \\
M_{EE'} = -\dfrac{pl^2(6k^2+5h+1)-qh^2k}{12(5k^2+5k+1)}
\end{cases}
$$

を得る。

Ⅷ. 中間鉸結柱四徑間對稱的框構



第 36 圖

第 36 圖に於て $\varphi_C=\varphi_{C'}=0$,

故に未知量は φ_A 及び φ_B の 2 個である。此時、

$$M_{CB} = 2k(\varphi_B) - C_{CB} \cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$

$$M_{BC} = 2k(2\varphi_B) + C_{BC} \cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

$$M_{BA} = 2k(2\varphi_B+\varphi_A) - C_{BA} \cdots\cdots\cdots\cdots (c)$$

$$M_{AB} = 2k(2\varphi_A+\varphi_B) - C_{AB} \cdots\cdots\cdots\cdots (d)$$

$$M_{AA} = 2(\varphi_A) - C_{AA'} \cdots\cdots\cdots\cdots (e)$$

の 5 式を得て $\Sigma M=0$ を適用せば第 8 表を得る。

第 8 表

番號	左邊 φ_B	左邊 φ_A	右邊
(1)	$4k$	k	0
(2)	k	$2k+1$	$P_{AA'}-P_{AB}$

$$\therefore \quad \varphi_A=\frac{4(P_{AA'}-P_{AB})}{(7k+4)}$$

$$\varphi_B=-\frac{(P_{AA}-P_{AB})}{(7k+4)}$$

從つて φ_A, φ_B より $P_{AA'}=\dfrac{qh^2}{24}$, $P_{AB}=\dfrac{pl^2}{24}$ と置きて、

$$(48)\cdots\cdots\cdots\left\{\begin{aligned} M_A&=-\frac{4pl^2+7qh^2k}{12(7k+4)}=M_{A'}\\ M_B&=-\frac{2qh^2k-(9k+4)pl^2}{12(7k+4)}=M_{B'}\\ M_C&=-\frac{qh_2k+(6k+4)pl^2}{12(7k+4)}=M_{C'}\end{aligned}\right.$$

を得る。

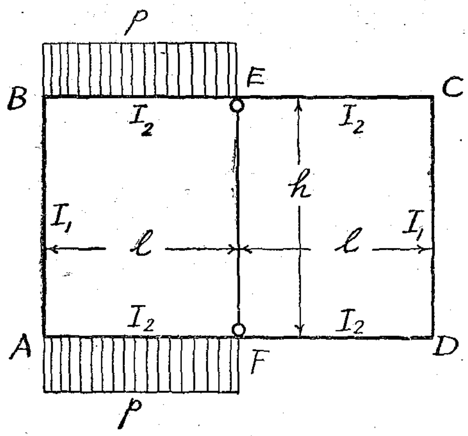
IX. 部分荷重を受ける二徑間對稱框構

第 37 圖のものは尙一つの對稱軸を有するから撓度は存在しない。此時 $\varphi_A=-\varphi_B$, $\varphi_C=-\varphi_D$ であるから、

$$M_{BE}=2k(2\varphi_B+\varphi_E)-C_{BE}$$

$$M_{BA}=2\varphi_B$$

$$M_{EB}=2k(2\varphi_E+\varphi_B)+C_{EB}$$



第 37 圖

$$M_{EC}=2k(2\varphi_E+\varphi_C)$$

$$M_{CE}=2k(2\varphi_C+\varphi_E)$$

$$M_{CD}=2\varphi_C$$

故に $\Sigma M_B=0$, $\Sigma M_E=0$, $\Sigma M_C=0$ より次表を得る。次に未知量 φ_B, φ_E 及 φ_C を求めれば、

第 9 表

番號	方程式左邊 φ_B	方程式左邊 φ_E	方程式左邊 φ_C	右邊
(1)	$2k+1$	k		P_{BE}
(2)	k	$4k$	k	$-P_{EB}$
(3)		k	$2k+1$	0

$$\varphi_B=\frac{P_{BE}(4+7k)+P_{EB}(1+2k)}{2(1+2k)(2+3k)},$$

$$\varphi_E=-\frac{P_{EB}(1+2k)+kP_{BE}}{2(2+3k)},$$

$$\varphi_C=\frac{P_{EB}(1+2k)+kP_{BE}}{2(1+2k)(2+3k)},$$

原式に代入せば、

$$M_{BE}=-\frac{P_{BE}(4+7k)+P_{EB}(1+2k)}{(1+2k)(2+3k)}$$

$$M_{EC}=-\frac{P_{EB}(1+2k)(2+3k)+P_{BE}(2+3k)k}{(1+2k)(2+3k)}$$

$$M_{CB}=\frac{P_{EB}(1+2k)+k\,P_{BE}}{(1+2k)(2+3k)}$$

從つて等布荷重なる場合は次の如くなる。

$$\left\{ M_B=-\frac{(5+9k)pl^2}{24(1+2k)(2+3k)}\right.$$

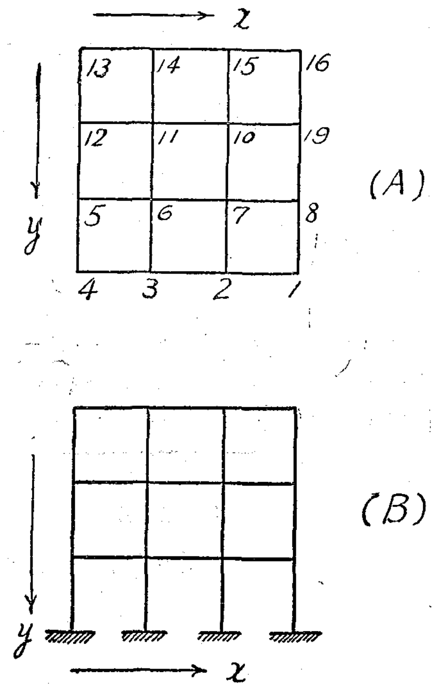
$$(49)\cdots\cdots\cdots\cdots\left\{\begin{aligned} M_E &= -\frac{(1+3k)pl^2}{24(1+2k)} \\ M_C &= \frac{(1+3k)pl^2}{24(1+2k)(2+3k)} \end{aligned}\right.$$

以上問題 Ⅳ より Ⅸ 迄に於て $k=\dfrac{I_2}{l}\,\dfrac{h}{I_1}$ であつて且最後に求めた彎曲率の値には實際に生ずる符號、即ち部材を内方に凸狀ならしむるものを正とし、部材を外方に凸狀とならしむるものを負としてある。

一般に斯かる矩形の多層多徑間の框構は各層に就き1個宛、各徑間に就き1個宛の撓度未知量を有し各節點に就き1個の撓角未知量を有するから複雜なるものに對しては未知量を解くのに聯立方程式を以つてする事が容易でなくなる。此の時は從つて各節點の彎曲率を一般式として求める事は困難であるから、荷重や部材の剛度に算定された或は假定された既知量を與へて、鷹部屋福平博士の所謂「機械的作表法並びにイテラチオン法」を應用する事が好ましい。

X. 複雜なる矩形框構

第38圖 (*A*) に示す如き複雜なる框構を解く場合に次の如き考察を以つて進まねばならない。



第　38　圖

（1） 任意の斷面と任意の荷重を有する場合框構は靜力學的平衡を必要とし、此時未知量は 16 個の φ と、x 方向に就き 3 個、y 方向に就き 3 個の μ を有するから 22 個の未知量を有する。若しも y 方向に移動が許されない第38圖 (B) の如き時は 16 個の φ と x 方向の 3 個の μ 丈となる。建築架構は框構の外廓の一邊が無限大の斷面二次率を有する場合に過ぎない。

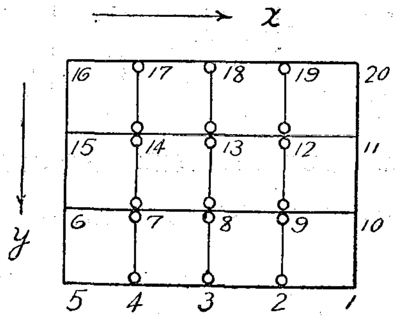
（2） 框構が一つの對稱軸を有する場合此の時未知量 φ は對稱軸線に對し同大異方向であるから半減して 8 個となり、且對稱軸の通る部材の移動は許されないから對稱軸の兩側に同大異方向の μ が 1 個宛存し結局未知量は 9 個である。

（3） 框構が二つの對稱軸を有する場合は未知量 φ は僅かに 4 個となり μ は存在しない。二つの對稱軸に對應する節點は凡て同大異方向の φ の値を取る。

又第39圖の如き場合も同樣であつて任意荷重を受けて任意の斷面を有する場合框構は偶力率を受ける事なく靜力學的に平衡する事を必要として、次の如く云へる。

（1） 一般の場合は 20 個の φ と 7 個の μ を有する。

（2） x 方向に卽ち左右が對稱的ならば對稱軸に對して φ は左右同大異方向であつて且對稱軸線の φ は零である。又左右に同大異方向の y 方向の撓角を生ずるから框構の半分に對して 8 個の φ と 2 個の μ を有する。



第 39 圖

（3）　更に y 方向卽ち上下が對稱的ならば更に φ は半減して μ は存せず僅かに 4 個の φ のみである。

（4）　鉸の頂部の彎曲率の値は零で水平材は彎曲モーメントが兩端に働いた場合の連續桁と同樣の取扱をなす。

§ 3.　架構及框構の剪力及軸應力

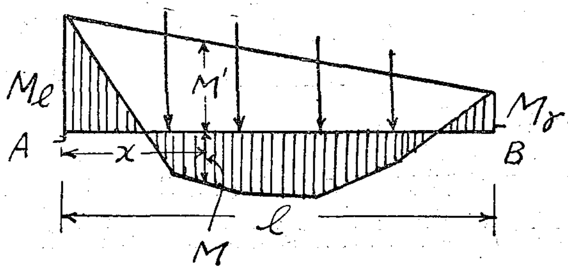
不靜定構造物とは各々剛結された點に端力率を與へた柱及び桁の集合體であつて部材の任意の彎曲率 M は單純なる桁として生ずる彎曲率 M_0 と端力率に依つて附加されたる彎曲率 M' の和に等しい。今一部材を取り出して考へると、第40圖を想像し得て此時は、

$$M = M' + M_0$$

$$M' = M' - \frac{M' - M_r}{l} x$$

であるから、

$$M = M_l - \frac{M_l - M_r}{l} x + M_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (a)$$



第　40　圖

である。然るに任意點の剪力 S は單桁としての剪力 S_0 と端力率に依つて附加される剪力 S' の和に等しい。故に、

$$S = S' + S_0$$

なる關係があり且剪力は任意の點の彎曲率を距離 x に就いて微分したものに等しいから、

$$\frac{dM}{dx} = -\frac{M_l - M_r}{l} + \frac{dM_0}{dx}$$

より直ちに、

$$S = -\frac{M_l - M_r}{l} + S_0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (b)$$

を得る。即ち端力率に依つて附加される剪力とは端力率の差を部材長 l で除したものに等しいのであつて、此の時剪力に方向の考へを入れて式を修正せば、

$$(50)\cdots\cdots\cdots\begin{cases} S_{AB} = \dfrac{M_{BA} - M_{AB}}{l} + S_0 \\ S_{BA} = \dfrac{M_{BA} - M_{AB}}{l} - S_0 \end{cases}$$

を得る。(50) 式に於て部材に中間荷重なき場合は勿論 $S_0 = 0$ である。

従つて隣接の剛結部材が直角に取付ける場合は端部の剪力は直ちに隣接部材の軸應力として働く事になる。直角ならざる場合は其の分力が軸應力として働くのである。故に先に述べた種々の框構の中間鉸結柱及剛結壁の受ける軸應力を(50)式より容易に求め得る。