閉合形架構及び框構の解法（一）

瀬戸　政章

內容

閉合形架構及框構は皆れも靜力學上不可定構造物に屬するもので、其の構造型態の複雜なるものに對しては其の解法も亦煩雜を來すのである。筆者は是等の閉合形架構は其の解法に當り如何なる方式に依るべきかを論じ、合はせて實際的構造物の解法を記述して設計者が直ちに應用出來る公式を誘導紹介せんとするものである。

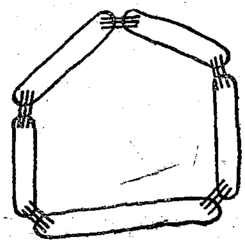
§A　最小働の法則に依る法

一般に２部材を剛結せしむるには３個の繋鉀を必要とするから、n個の部材を剛結するには、必要なる繋鉀數をmとせば

$$m = 3(n-1)$$

故に構造物が$3(n-1)$より多き繋鉀數を有する場合、其の過剩丈の不靜定未知量を有する事になる。即ち

$$m-3(n-1)=\gamma$$



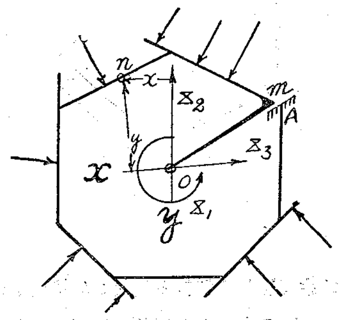
第　1　圖

なる場合構造物は r 次の不靜定構造であるといふのであつて、第1圖の場合は

$$15-3(5-1)=3$$

であるから3次の不靜定構造であつて、一般に一つの閉合形架構は凡て3次の不靜定構造である。此の3個の不靜定未知量は構造物の任意點に於ける彎曲率、剪力及び軸應力に相應するものであつて、之等を誘導する爲めに次の如き方法を試みる。

今一つの閉合架構が任意の荷重を受ける場合を考へるに、其の任意の點 A を切り離し A に働いてゐた力を自由端 m に働かしめると、其の應力の狀態には何等の變りはない。其處で mo を剛結して A に働くべき力を O に働かしめて、此の時の3個の未知量を X_1, X_2 及び X_3 とする。今便宜上 X_2, X_3 は互ひに直角に働くものと假定し、其の方向を任意とする。又任意點 n に働く彎曲率、剪力及び軸應力を夫々 M, S, N とし、不靜定未知量を考へない場合の單純なる構造物としての彎曲率、剪力及軸應力を夫々 M_o, S_o, N_o とし更に X_1, X_2, X_3 の未知量に依つて起るものを夫々 M'', S'', N'' とせば



第　2　圖

$$M=M''+M_o \quad S=S''+S_o \quad N=N''+N_o$$

である。而して一般の場合閉合架構に於て、彎曲率の影響に比して軸應力及び剪力の影響は不靜定の計算に於ては省略される場合が多いから、最小働の方程式に於て

$$W=\text{外力に因る內働}$$

M＝外力に因る彎曲率

E＝部材の彈性係數

I＝斷面二次率

X＝不靜定未知量

とするとき、

$$(1)\cdots\cdots\cdots\begin{cases}\dfrac{\partial W}{\partial X_1}=\displaystyle\int\frac{M}{EI}\ \frac{\partial M}{\partial X_1}ds=0\\[2ex]\dfrac{\partial W}{\partial X_2}=\displaystyle\int\frac{M}{EI}\ \frac{\partial M}{\partial X_2}ds=0\\[2ex]\dfrac{\partial W}{\partial X_3}=\displaystyle\int\frac{M}{EI}\ \frac{\partial M}{\partial X_3}ds=0\end{cases}$$

となし得る。

即ち(1)から X_1, X_2, X_3 を求めるのであつて、今任意點 n を任意直角座標について $(x\cdot y)$ とし、切離された突桁自由端0を座標原點に取り、單純彎曲率 M_o に便宜上負の符號を附して式を作ると、(x,y) なる點 n の彎曲率 M は、

$$M=X_1+X_2x+X_3y-M_o$$

となる。今(1)式に於て

$$\frac{1}{EI}=\frac{1}{EI_c}\ \frac{I_c}{I}=\frac{1}{EI_c}\cdot w$$

と置き、E は部材の材料に就き一定値とせば、

（1）より、

$$(1')\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases}\displaystyle\int Mw\cdot\frac{\partial M}{\partial X_1}ds=0\\[2mm]\displaystyle\int Mw\cdot\frac{\partial M}{\partial X_2}ds=0\\[2mm]\displaystyle\int Mw\cdot\frac{\partial M}{\partial X_3}ds=0\end{cases}$$

を得る。故に

$$\frac{\partial M}{\partial X_1}=1 \qquad \frac{\partial M}{\partial X_2}=x \qquad \frac{\partial M}{\partial X_3}=y$$

なる事から、之等を（1'）に代入して式を整理せば

$$X_1\int wds+X_2\int wxds+X_3\int wyds=\int M_o wds$$

$$X_1\int wxds+X_2\int wx^2ds+X_3\int wxyds=\int M_o wxds$$

$$X_1\int wyds+X_2\int wxyds+X_3\int wy^2ds=\int M_o wyds$$

であつて、今部材が單位長さに就いて wds なる長素荷重を有するものと考へ、此の彈性荷重の重心を切離された自由端 0 として座標原點に一致せしむれば

$$\int wxds=\int (wds)x=0$$

$$\int wyds=\int (wds)x=0$$

又 x, y 軸が共軛ならば積能率は零なるべきであつて

$$\int wxyds=\int (wds)xy=0$$

となる。

卽ち對稱軸を有する閉合形の重心は簡單に求められ而も x, y は直角座標であるから以上の假定は滿足され、此の時 X_1, X_2, X_3 は次の如くなる。

$$(2)\cdots\cdots\cdots\cdots \begin{cases} X_1=\dfrac{\int M_o wds}{\int wds} \\[2ex] X_2=\dfrac{\int M\ wxds}{\int wx^2ds} \\[2ex] X_2=\dfrac{\int M\ wyds}{\int wy^2ds} \end{cases}$$

我々が通常取扱ふ單一閉合形は、對照的な場合が多いから (2) 式を應用して足りる。此時 X_1 は自由端のモーメント、X_2, X_3 は夫々垂直、水平方向の反力を表はすから

$$M'=X_1,\qquad V'=X_2\qquad H'=X_3$$

と置く事が出來る。此時 y 軸に對して對照荷重であれば M_o も亦對照的であるから

$$\int M_o wxds=0 \qquad \therefore \quad X_2=0$$

又閉合形が x 軸に對して對照的で荷重も對照的であれば

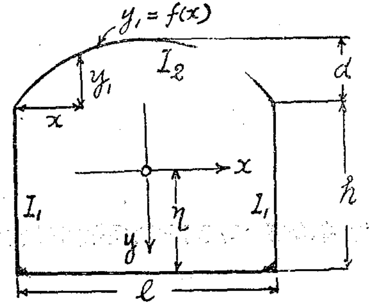
$$\int M_o wyds=0 \qquad \therefore \quad X_3=0$$

となる。

I. 弧形閉合架構が任意荷重を受ける場合

今第3圖に於て弧形が可成大であつて $ds \fallingdotseq dx$ と見做し得るものとし、

$$\frac{I_2}{I_1}\,\frac{h}{l}=k \qquad \frac{I_2}{I}=m$$



第　3　圖

と置く時、

$$\int wds=\frac{I_c}{I_2}(1+m+2k)l$$

$$\int wx^2ds=\frac{I_c\,l^3}{12I_2}(1+m+6\ )$$

$$\int wy^2ds=2\int_o^{\eta}\frac{I_c}{I_1}y^2dy+2\int_o^{h-\eta}\frac{I_c}{I_1}y^2dy+\int_o^{l}\frac{I_c}{I_1}\eta^2dx+\int_o^{l}\frac{I_c}{I_2}(h-\eta+y_1)dx$$

である。弧形が

$$y_1=\frac{4d}{l^2}(lx-x^2)$$

の如き拋物線とせば、

$$\int wy^2ds=\frac{2I_c}{3I_1}\eta^3+\frac{2I_c}{3I_1}(h-\eta)^3+\frac{I_c}{I}\eta^2l+\frac{I_c}{I_2}(h-\eta)^2l+\frac{2(h-\eta)I_c}{I_2}\int_o^l y_1dx+\int_o^l y_1^2dx$$

なる事から

$$\int wy^2ds=\frac{I_c}{3I_2}\left[h^2(2k+3)+3\eta^2(1+m+2k)-6h\eta(1+k)+4d(h-\eta)+\frac{8}{5}d^2\right]$$

然るに

$$\eta=\frac{\int wyds}{\int wds}=\frac{2\frac{I_c}{I_1}\ \frac{h^2}{2}+\int_o^l\frac{I_c}{I_2}(h+y_1)dx}{\frac{I_c}{I_2}l+\frac{I_c}{I}l+2\frac{I_c}{I_1}h}=\frac{3h+3kh+2d}{3(1+m+2k)}$$

なれば、η を上式に代入せば

$$\int wy^2ds=\frac{I_cl}{45I_2}\ \frac{[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60'd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)]}{(1+m+2k)}$$

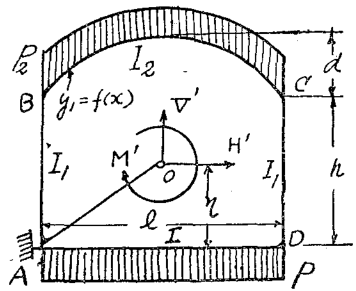
故に任意荷重に對しては次の如くなる。

$$\left\{M'=\frac{I_2}{I_c}\ \frac{\int M_owds}{(1+m+2k)l}\right.$$

$$(3)\cdots\cdots\cdots\begin{cases} V'=\dfrac{12I_2\int M_o wxds}{I_c l^3(1+m+6k)} \\[2ex] H'=\dfrac{45I_2(1+m+2k)\int M_o wyds}{I_c l\left[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)\right]} \end{cases}$$

Ⅱ. 弧形閉合架構が垂直等布荷重を受ける場合

此時は弧形及斷面が前のものと同一の場合として上下の垂直荷重が異なるものと考ふ。



第　4　圖

此時 k 及び m を前述と同樣とせば、

$$\int M_o wds=-\frac{I_c}{I_2}\ \frac{l^3}{12}(p_2+mp)$$

$$\int M_o wxds=0$$

$$\int M_o wyds=\int_o^l M_o w(h-\eta)dx+\int_o^l M_o wy_1dx-\int_o^l M_o w\eta dx$$

$$=\frac{I_c}{I_2}\ \frac{p_2l^3}{12}(h-\eta)+\frac{4d}{l^2}\int_o^l\frac{I_c}{I_2}\left(\frac{p_2lx}{2}-\frac{p_2x^2}{2}\right)(lx-x^2)dx-\frac{I_c}{I}\ \frac{Pl^3}{12}\eta$$

$$\eta=\frac{3h+3kh+2d}{3(1+m+2k)}$$

なれば

$$\int M_o wyds = \frac{I_c[P_2 l^3\{12d(1+m+2k)+5(3mh+3kh-2d)\}-5pl^3(3h+3kh+2d)m]}{180I_2(1+m+2k)}$$

故に(3)式より

$$(4)\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M' = -\dfrac{(p_2+mp)l^2}{12(1+m+2k)}, \qquad V'=0 \\ H' = \dfrac{p_2 l^2\{12d(1+m+2k)+5(3mh+3kh-2d)\}-5pl^2(3h+3kh+2d)m}{4[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)]} \end{cases}$$

を得る。然るに、

$$M_A = M'+H'\eta-\frac{V'}{2}l = M_D$$

$$M_B = M'-H'\eta-\frac{V'}{2}l = M_c$$

なるを以つて、各點の彎曲率は次の如くなる。

$$(5)\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M_A = -\dfrac{(p_2+mp)l^2}{12(1+m+2k)}+\dfrac{p_2 l^2\{12d(1+m+2k)+5(3mh+3kh-2d)\}-5pl^2(3kh+3h+2d)m}{4[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)]}\cdot\eta = M_D \\ M_B = -\dfrac{(p_2+mp)l^2}{12(1+m+2k)}-\dfrac{p_2 l^2\{12d(1+m+2k)+5(3mh+3kh-2d)\}-5pl^2(3kh+3h+2d)m}{4[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)]}(h-\eta) = M_c \\ \text{但し、} \quad \eta = \dfrac{3kh+3h+2d}{3(1+m+2k)}, \quad h-\eta = \dfrac{3kh+3mh-2d}{3(1+m+2k)} \end{cases}$$

上下等布荷重が等しい時は(5)式に於て $p_2=p$ と置き、又 $I_2=I$ なる場合は $m=1$ と置けば宜い。

Ⅲ. 弧形閉合架構が水平荷重を受ける場合

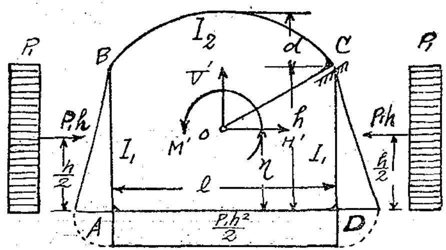
（a）水平等布荷重を受ける場合。

$$\int M_o w ds = \frac{I_c}{I_2}\ \frac{p_1h^2l(2k+3m)}{6}$$

$$\int M_o wx ds = 0$$

$$\int M_o wy ds = \frac{I_c}{I_1}\int_o^h p_1x^2(h-\eta-x)dx - \frac{I_c}{I}\ \frac{p_1h^2l}{2}\eta$$

$$= -\frac{p_1h^2l\{3kh(3+2k)+3mh(6+5k)+4d(2k+3m)\}I_c}{36(1+m+2k)I_2}$$



第五圖

故に（3）式を代入せば

$$(6)\cdots\cdots\begin{cases} M' = \dfrac{p_1h^2(2k+3m)}{6(1+m+2k)} \qquad V'=0 \\ H' = -\dfrac{5p_1h^2\{3kh(3+2k)+3mh(6+5k)+4d(2k+3m)\}}{4[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)]} \end{cases}$$

故に彎曲率は

$$(7)\cdots\cdots\begin{cases} M_A = \dfrac{p_1h^2(2k+3m)}{6(1+m+2k)} - \dfrac{p_1h^2}{2} \\ \qquad + \dfrac{5p_1h^2\{3kh(3+2k)+3mh(6+5k)+4d(2k+3m)\}(3kh+3h+2d)}{12[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)](1+m+2k)} = M_D \\ M_B = \dfrac{p_1h^2(2k+3m)}{6(1+m+2k)} \end{cases}$$

$$\left\{ \quad -\frac{5p_1h^2\{3kh(3+2k)+3mh(6+5k)+4d(2k+3m)\}(3kh+3mh-2d)}{12[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)](1+m+2k)}=M_c\right.$$

（６） 三角形分布水平荷重を受ける場合。

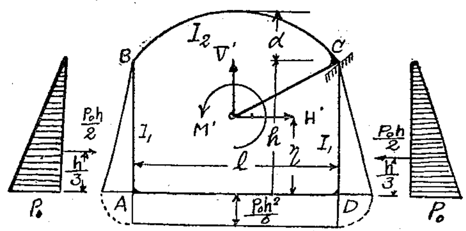
第６圖の場合は前と全く同樣にして

$$\int M_o w ds=\frac{p_o h^2 l(k+2m)I_c}{12I_2}$$

$$\int M_o wx ds=0$$

$$\int M_o wy ds=2\int_o^h \frac{p_o x^3}{6h}\ \frac{I_c}{I_1}(h-\eta-x)dx-\frac{I_c}{I}\ \frac{p_o h^2 l}{6}\eta$$

$$=-\frac{p_o h^2 l\{3kh(3k+4)+3mh(9k+10)+10d(k+2m)\ I_c}{180(1+m+2k)I_2}$$



第　　６　　圖

故に (3) 式より

$$(8)\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M'=\dfrac{p_o h^2(k+2m)}{12(1+m+2k)} \qquad V'=0 \\ H'=-\dfrac{p_o h\{3kh(3k+4)+3mh(9k+10)+10d(k+2m)\}}{4[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)]} \end{cases}$$

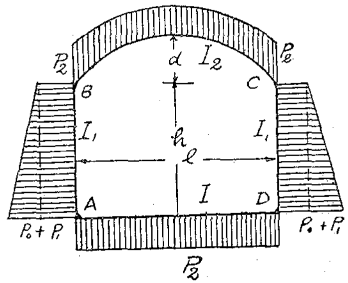
故に各點の彎曲率は次の如くなる。

$$\left\{ M_A=\frac{p_o h^2(k+2m)}{12(1+m+2k)}-\frac{p_o h^2}{6} \right.$$

$$
(9)\cdots\cdots\cdots\left\{
\begin{aligned}
&+\frac{p_o h^2\{3kh(3+4k)+3mh(9k+10)+10d(k+2m)\}(3kh+3h+2d)}{12[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)](1+m+2k)}=M_D\\
&M_B=\frac{p_o h^2(k+2m)}{12(1+m+2k)}\\
&\quad-\frac{p_o h^2\{3kh(3+4k)+3mh(9k+10)+10d(k+2m)\}(3kh+3mh-2d)}{12[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)](1+m+2k)}=M_C
\end{aligned}\right.
$$

IV. 弧形閉合架構が垂直水平荷重を受ける場合

第7圖の如き場合は勿論 II 及び III の場合を組合はせば宜しい。



第　7　圖

$$
(10)\cdots\cdots\cdots\left\{
\begin{aligned}
&M_A=-\frac{p_2 l^2(1+m)}{12(1+m+2k)}+\frac{p_1 h^2(2k+3m)}{6(1+m+2k)}\\
&\quad+\frac{p_o h^2(k+2m)}{12(1+m+2k)}-\left[\frac{p_1^2 h^2}{2}+\frac{p_o h^2}{6}\right]\\
&\quad+\frac{p_2 l^2\{15kh(1-m)+2d(1+m+12k)\}(3kh+3h+2d)}{12[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)](1+m+2k)}\\
&\quad+\frac{5p_1 h^2\{3kh(3+2k)+3mh(6+5k)+4d(2k+3m)\}(3kh+3h+2d)}{12[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)](1+m+2k)}\\
&\quad+\frac{p_o h^2\{3kh(3k+4)+3mh(9k+10)+10d(k+2m)\}(3kh+3h+2d)}{12[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)](1+m+2k)}=M_D
\end{aligned}\right.
$$

$$\left\{\begin{aligned} M_B = &-\frac{p_2 l^2(1+m)}{12(1+m+2k)}+\frac{p_1 h^2(2k+3m)}{6(1+m+2k)}+\frac{p_o h^2(k+2m)}{12(1+m+2k)} \\ &-\frac{p_2 l^2\{15kh(1-m)+2d(1+m+12k)(3kh+3mh-2d)}{12(15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k))(1+m+2k)} \\ &-\frac{5p_1 h^2\{3kh(3+2k)+3mh(6+5k)+4d(2k+3m)\}(3kh+3mh-2d)}{12[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)](1+m+2k)} \\ &-\frac{p_o h^2\{3kh(3k+4)+3mh(9k+10)+10d(k+2m)\}(3kh+3mh-2d)}{12[15h^2\{(2+k)k+(2k+3)m\}+60hd(m+k)+4d^2(1+6m+12k)](1+m+2k)}=M_c \end{aligned}\right.$$

となる。

V. 尖頂閉合架構が任意荷重を受ける場合

第八圖の場合に

$$\frac{I_2}{I}\ \frac{l}{S}=k_3 \qquad \frac{I_2}{I_1}\ \frac{h}{S}=k_1$$

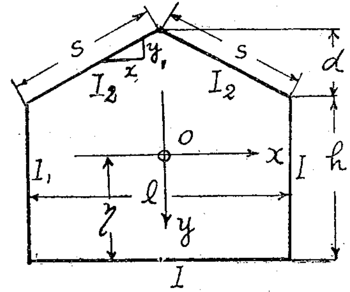
と置けば、

$$\int w ds=\frac{I_c}{I_2}\left\{\ 2(1+k_1)+k_3\right\}S$$

$$\int wx^2 ds=\frac{I_c}{2I_1}hl^2+\frac{I_c}{I}\ \frac{l^3}{12}+\frac{I_c}{I_2}+\frac{I_c}{I_2}\ \frac{2S^3}{3}$$

故に $2S \fallingdotseq l$ と見做せば

$$\int wx^2 ds=\frac{I_c l^2 S}{12I_2}(2+k_3+6k_1)$$



第　8　圖

$$\int wy^2 ds = 2\int_0^{\eta} \frac{I_c}{I_1} y^2 dy + 2\int_0^{h-\eta} \frac{I_c}{I_1} y^2 dy + \int_0^{l} \frac{I_c}{I} \eta^2 dx + \int_0^{l} \frac{I_c}{I_2} (h-\eta+y_1) dx$$

然るに、

$$y_1 = \frac{2d}{l} x$$

なるを以つて

$$\int wy^2 ds = \frac{I_c}{I_2} \ \frac{S}{3}\left[2k_1(h^2-3h\eta+3\eta^2)+3k_3\eta^2+\frac{3l}{S}\left\{(h-\eta)^2+d(h-\eta)+\frac{d^2}{3}\right\}\right]$$

此の時 $2S \fallingdotseq l$ と考へると、

$$\eta = \frac{\int wyds}{\int wds} = \frac{k_1 h + 2h + d}{2+2k_1+k_3}$$

なるを以つて

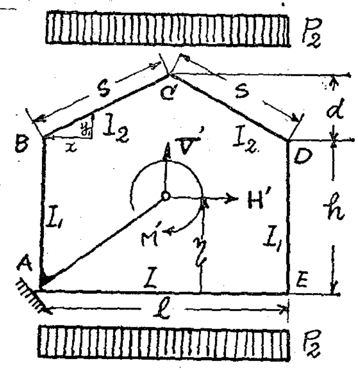
$$\int wy^2 ds = \frac{I_c S}{I_2 3} \ \frac{\{h^2(k_1^2+2k_1k_3+4k_1+6k_3)+6hd(k_1+k_3)+d^2(4k_1+2k_3+1)\}}{2+2k_1+k_3}$$

此等を (2) 式に代入して次の式を得る。

$$(11)\cdots\cdots\cdots\left\{\begin{aligned} M' &= \frac{I_2 \ \int M_o wds}{I_c S(2+2k_1+k_3)} \\ V' &= \frac{12 I_2 \ \int M_o wxds}{I_c l^2 S(2+k_3+6k_1)} \end{aligned}\right.$$

$$\left\{ H' = \frac{3I_2(2+2k_1+k_3)\int M_o wyds}{I_c S\{h^2(k_1^2+2k_1k_3+4k_1+6k_3)+6hd(k_1+k_3)+d^2(4k_1+k_3+1)\}} \right.$$

VI. 尖頂閉合架構が垂直荷重を受ける場合



第　9　圖

第九圖に於て

$$\frac{I_2}{I}\cdot\frac{l}{S}=k_3 \qquad \frac{I_2}{I_1}\cdot\frac{h}{S}=k_1$$

とせば孤形閉合架構の場合と同樣にして、

$$\int M_o wds = -\frac{I_c}{I_2}\left\{\frac{p_2l^2}{6}+\frac{pl^2}{12}k_3\right\}S$$

$$\int M_o wxds = 0$$

$$\int M_o wyds = 2\int_o^{\frac{l}{2}}\frac{I_c}{I_2}\left(\frac{p_2lx}{2}-\frac{p_2x^2}{2}\right)(h-\eta+y_1)dx-\int_o^l\frac{I_c}{I}\left(\frac{plx}{2}-\frac{px^2}{2}\right)\eta dx$$

又

$$y_1=\frac{2d}{l}x, \qquad \eta=\frac{k_1h+2h+d}{2+2k_1+k_3}$$

なるを以つて、

$$\int M_o wyds = \frac{I_c}{I_2}\left\{\frac{5p_2l^3}{96}d+\frac{k_1h+k_3h-d}{12(2+2k_1+k_3)}\cdot p_2l^3\right\}-\frac{I_c}{I}\cdot\frac{(k_1h+2h+d)pl^3}{12(2+2k_1+k_3)}$$

故に（11）式に代入して次式を得る。

$$(12)\cdots\cdots\begin{cases} M'=-\dfrac{l^2}{12}\dfrac{(2p_2+pk_3)}{(2+2k_1+k_3)}, \qquad V'=0 \\ H'=\dfrac{p_2l^2\{(2+2k_1+k_3)5d+8(k_1h+k_3h-d)\}-4pl^2(k_1h+2h+d)k_3}{16\{h^2(k_1^2+2k_1k_3+4k_1+6k_3)+6hd(k_1+k_3)+d^2(4k_1+2k_3+1)\}} \end{cases}$$

此時各點の彎曲率は次式を以つて表はされる。

$$(13)\cdots\cdots\begin{cases} M_A=M'+H'\eta=M_E \\ M_B=M'-H'(h-\eta)=M_D \\ M_C=M'-H'(h-\eta+d)+\dfrac{p_2l^2}{8} \end{cases}$$

Ⅶ. 尖頂閉合架構が水平荷重を受ける場合

(a)　水平等布荷重を受ける場合

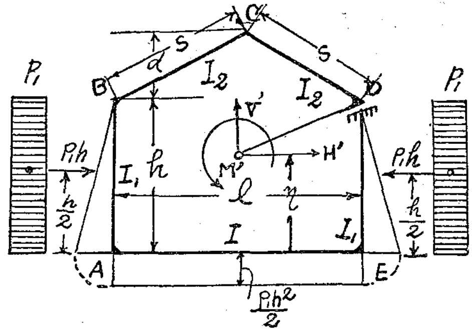
同様にして

$$\frac{I_2}{I_1}\frac{h}{S}=k_1 \qquad \frac{I_2}{I}\frac{l}{S}=k_3 \qquad \eta=\frac{k_1h+2h+d}{2+2k_1+k_3}$$

とせば、

$$\int M_o w ds=\frac{p_1h^2(2k_1+2k_3)I_cS}{6I_2}$$

$$\int M_o wxds=0$$



第 10 圖

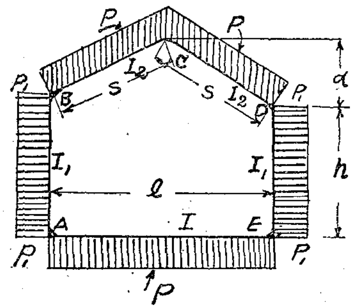
$$\int M_o wy ds = -\frac{p_1 h^2\{k_1 h(2k_1+5k_3-2)+(4h+2d)(2k_1+3k_3)\}I_c S}{12(2+2k_1+k_3)I_2}$$

なるを以つて、

$$(14)\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M'=\dfrac{p_1h^2(2k_1+2k_3)}{6(2+2k_1+k_3)} \qquad V'=0 \\ H'=-\dfrac{p_1h^2\{k_1h(2k_1+5k_3-2)+(4h+2d)(2k_1+2k_3)\}}{4\{h^2(k_1^2+2k_1k_3+4k_1+6k_3)+6hd(k_1+k_3)+d^2(4k_1+k_3+1)} \end{cases}$$

故に次の彎曲率の値が得られる。

$$(15)\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M_A=M'-H'\eta-\dfrac{p_1h^2}{2}=M_E \\ M_B=M'+H'(h-\eta)=M_D \\ M_C=M'+H'(h-\eta+d) \end{cases}$$



第 11 圖

VIII. 尖項閉合架構が水平垂直荷重を受ける場合

第十一圖の場合 VI と VII の場合の和を以つて表はし得るから、M_A、M_B、M_C、M_D、M_E は次の如くなる。

$$\begin{cases} M_A=-\dfrac{pl^2(2+k_3)}{12(2+2k_1+k_3)} \\ \qquad +\dfrac{pl^2\{4k_1h(2-k_3)+d(2+10k_1+k_3)\}(k_1h+2h+d)(k_1h+2h+d)}{16\{h^2(k_1^2+2k_1k_3+4k_1+6k_3)+6hd(k_1+k_3)+d^2(4k_1+2k_3+1)\}(2+2k_1+k_3)} \end{cases}$$

$$
(16)\cdots\cdots\cdots\left\{
\begin{aligned}
&+\frac{p_1h^2(2k_1+3k_3)}{6(2+2k_1+k_3)}-\frac{p_1h^2}{2}\\
&+\frac{p_1h^2\{k_1l(2k_1+5k_3-2)+2(2h+d)(2k_1+3k_3)\}(k_1h+2h+d)}{4\{h^2(k_1^2+2k_1k_3+4k_1+6k_3)+6hd(k_1+k_3)+d^2(4k_1+2k_3+1)\}(2+2k_1+k_3)}=M_E\\
M_B=&-\frac{pl^2(2+k_3)}{12(2+2k_1+k_3)}\\
&-\frac{pl^2\{4k_1h(2-k_3)+d(2+10k_1+k_3)\}(k_1h+k_3h-d)}{16\{h^2(k_1^2+2k_1k_3+4k_1+6k_3)+6hd(k_1+k_3)+d^2(4k_1+2k_3+1)\}(2+2k_1+k_3)}\\
&+\frac{p_1h^2(2k_1+3k_3)}{6(2+2k_1+k_3)}\\
&-\frac{p_1h^2\{k_1h(2k_1+5k_3-2)+2(2h+d)(2k_1+3k_3)\}(k_1h+k_3h-d)}{4\{h^2(k_1^2+2k_1k_3+4k_1+6k_3)+6hd(k_1+k_3)+d^2(4k_1+2k_3+1)\}(2+2k_1+k_3)}=M_D\\
M_C=&-\frac{pl^2(2+k_3)}{12(2+2k_1+k_3)}+\frac{pl^2}{8}\\
&-\frac{pl^2\{4k_1h(2-k_3)+d(2+10k_1+k_2)\}\{h(k_1+k_3)+d(1+k_3+2k_1)\}}{16\{h^2(k_1^2+2k_1k_3+4k_1+6k_3)+6hd(k_1+k_3)+d^2(4k_1+2k_3+1)\}(2+2k_1+k_3)}\\
&+\frac{p_1h^2(2k_1+3k_3)}{6(2+2k_1+k_3)}\\
&-\frac{p_1h^2\{k_1h(2k_1+5k_3-2)+2(2h+d)(2k_1+3k_3)\}\{h(k_1+k_3)+d(4k_3+2k_1)\}}{4\{h^2(k_1^2+2k_1k_3+4k_1+6k_3)+6hd(k_1+k_3)+d^2(4k_1+2k_3+1)\}(2+2k_1+k_3)}
\end{aligned}
\right.
$$

又三角形分布荷重に對しても同樣の方法に依り孤形の場合と同じく求める事が出來る。

Ⅸ. 矩形框構が任意荷重を受ける場合

第十二圖に於て

$$\frac{I_2}{I_1}\,\frac{h}{l}=k \qquad \frac{I_2}{I}=m$$

とせば

$$\eta=\frac{\int wyds}{\int wds}=\frac{(1+k)h}{1+m+2k}$$

であつて、

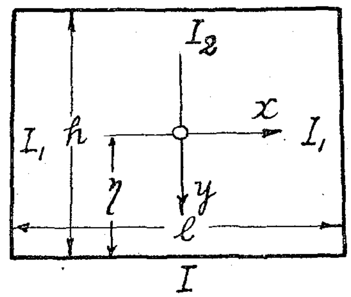
$$\int wds=\frac{I_c}{I_2}(1+m+2k)l$$

$$\int wx^2ds=\frac{I_cl^3}{12I_2}(1+m+6k)$$

$$\int wy^2ds=\frac{I_ch^2l}{3I_2}\left\{\frac{k(2+k)+m(2k+3)}{(1+m+2k)}\right\}$$

故に (2) 式より (17) を得る。

$$(17)\cdots\cdots\cdots\left\{\begin{aligned} M'&=\frac{I_2\int M_0wds}{I_c(1+m+2k)l} \\ V'&=\frac{12I_2\int M_0wxds}{I_cl^3(1+m+6k)}\end{aligned}\right.$$



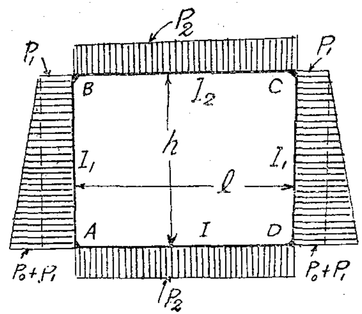
第　12　圖

$$H' = \frac{3I_2(1+m+2k)\int M_o wyds}{I_c h^2 l\{(2+k)k+(2k+3)m\}}$$

然るに（17）式は（3）に於て $d=0$ と置きたるものに全く等しく、（11）式に於て $k_1=2k_1$、$k_3=2n$、及び $2S \fallingdotseq l$ とし $d=0$ と置きたるものに全く等しき事に思を浮べるならば矩形框構の場合は孤形閉合架構並に尖頂閉合架構の場合から直ちに導かれる事を知るのである。

X. 矩形框構が水平垂直荷重を受ける場合

第十三圖の場合は（10）式に於て $d=0$ と置けば宜しい。



第　13　圖

$$(18)\cdots\cdots\cdots\left\{\begin{aligned}
M_A = &-\frac{p_2 l^2(1+m)}{12(1+m+2k)} + \frac{p_1 h^2(2k+3m)}{6(1+m+2k)} + \frac{p_o h^2(k+2m)}{12(1+m+2k)} \\
&+ \frac{p_2 l^2(1-m)(1+k)k}{4\{(2+k)k+(2k+3)m\}(1+m+2k)} \\
&+ \frac{p_1 h^2\{(3+2k)k+(6+5k)m\}(1+k)}{4\{(2+k)k+(2k+3)m\}(1+m+2k)} - \frac{p_1 h^2}{2} \\
&+ \frac{p_o h^2\{(3k+4)k+(9k+10)m\}(1+k)}{20\{(2+k)k+(2k+3)m\}(1+m+2k)} - \frac{p_o h^2}{6} = M_D \\
M_B = &-\frac{p_2 l^2(1+m)}{12(1+m+2k)} + \frac{p_1 h^2(2k+3m)}{6(1+m+2k)} + \frac{p_o h^2(k+2m)}{12(1+m+2k)} \\
&- \frac{p_2 l^2(1-m)(m+k)k}{4\{(2+k)k+(2k+3)m\}(1+m+2k)} - \frac{p_1 h^2\{(3+2k)k+(6+5k)m\}(1+k)}{4\{(2+k)k+(2k+3)m\}(1+m+2k)}
\end{aligned}\right.$$

$$-\frac{p_o h^2\{(3k+4)k+(9k+10)m\}(m+k)}{20\{(2+k)k+(2k+3)m\}(1+m+2k)}=M_C$$

若し此時 $I_2=I$ 卽ち $k=1$ ならば

$$(19)\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M_A=-\left\{\dfrac{p_2 l^2}{12(1+k)}+\dfrac{p_1 h^2 k}{12(1+k)}+\dfrac{p_o h^2(8+3k)}{60(k^2+4k+3)}\right\}=M_D \\ M_B=-\left\{\dfrac{p_2 l^2}{12(1+k)}+\dfrac{p_1 h^2 k}{12(1+k)}+\dfrac{p_o h^2(7+2k)}{60(k^2+4k+3)}\right\}=M_C \end{cases}$$

又 $p_o=0$ ならば此時は

$$(20)\cdots\cdots\cdots\cdots M_A=M_B=M_C=M_D=-\left\{\frac{p_2 l^2}{12(1+k)}+\frac{p_1 h^2 k}{12(1+k)}\right\}$$

又更に $p_2=p_1$ にして $h=l$ ならば k の値の如何に關せず

$$(21)\cdots\cdots\cdots\cdots M_A=M_B=M_C=M_D=-\frac{pl^2}{12}$$

となる。

又 (16) 式に於て $d=0$、$k_1=2k$、$k_3=2m$ と置けば (18) 式に於て $p_o=0$ と置きたるものと同一の結果を得るのである。又我々は (21) 式から互ひに直角なる二つの對照軸を有する閉合正多角形は等布荷重を受けたる場合の剛結點に於ける彎曲率の値は皆れも等布荷重を受けた兩端固定桁の固定端彎曲率に等しいものである事を知る事が出來る。

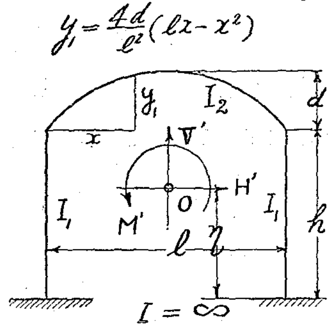
XI. 孤形固定脚架構が任意荷重を受ける場合

第十四圖の如き孤形固定脚架構は I の場合の特別な狀態卽ち $I=\infty$ の場合として考へる事が出來るのであつて此の時の M'、V'、H' は (3) 式に於て $m=0$ と置けば宜しい。故に、

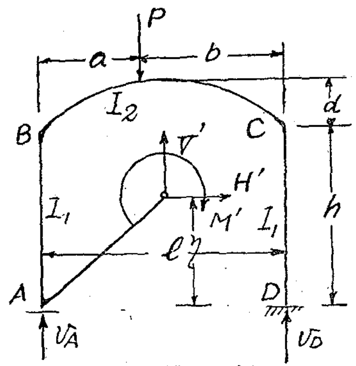
$$(22)\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M'=\dfrac{I_2}{I_c}\;\dfrac{\int M_o w ds}{(1+2k)l} \\[2ex] V'=\dfrac{12I_2\int M_o w x ds}{I_c l^3(1+6k)} \\[2ex] H'=\dfrac{45I_2(1+2k\int M_o w y ds}{I_c l[15h^2(2+k)k+60hdk+4d^2(1+12k)]} \end{cases}$$

で表はされる。

故に弧形固定脚架構が垂直等布荷重を受ける場合は (5) 式に於て $m=0$、水平荷重を對照的に受ける場合は (7) 及 (9) 式に於て $m=0$、と置けば宜しいのである。



第　14　圖



第　15　圖

XII. 孤形固定脚架構が非對照荷重を受ける場合

(a)　垂直荷重を受ける場合。

第十五圖の場合は (22) を用ふれば良いから前述の如く、

$$\frac{I_2}{I_1}\;\frac{h}{l}=k,\qquad \eta=\frac{3kh+3h+2d}{3(1+2k)}$$

と置けば、

$$\int M_o w ds = -\frac{P_{ab}}{2}\,\frac{I_c}{I_2}$$

$$\int M_o w x ds = \frac{P_{ab}(l-2a)I_c}{12I_2}$$

$$\int M_o w y ds = \frac{P_{ab}\{3khl^2+2d(al-a^2)(1+2k)\}I_c}{I_2 6(1+2k)l^2}$$

となるから（22）式より

$$(23)\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M' = -\dfrac{P_{ab}}{2(1+2k)l} \\ V' = \dfrac{P_{ab}(l-2a)}{l^3(1+6k)} \\ H' = \dfrac{15P_{ab}\{3khl^2+2d(al-a^2)(1+2k)\}}{2l^3\{15h^2(2+k)k+60hdk+4d^2(1+12k)\}} \end{cases}$$

故に任意の分布荷重を受ける場合は

$$P = ydx \qquad a = x \qquad b = (l-x)$$

と置けば宜しい。故に此の時は、

$$(24)\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M' = -\dfrac{\int yx(l-x)dx}{2(1+2k)l} \\ V' = \dfrac{\int yx(l-x)(l-2x)dx}{l^3(1+6k)} \end{cases}$$

$$H' = \frac{15\int yx(l-x)\{3khl^2+2d(xl-x^2)(1+2k)\}dx}{2l^3\{15h^2(2+k)k+60hdk+4d^2(1+12k)\}}$$

又 $y=p$ なる如き等布荷重なる場合 (24) 式に依つて求め得て全徑間に p が載荷される時は 0 から l 迄の定積分を施せば良いから

$$(25)\cdots\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M' = -\dfrac{pl^2}{12(1+2k)}, \qquad V'=0 \\ H' = \dfrac{pl^2\{15kh+2d(1+12k)\}}{4\{15h^2(2+k)k+60hdk+4d^2(1+12k)\}} \end{cases}$$

となる。(25)式から求められた各點の彎曲率は (5) 式に於て $m=0$ と置いたものと完全に一致することは勿論である。又集中荷重が多數かかれる場合は各集中荷重に依るものを加算せば宜しい。

(b)　水平荷重を受ける場合

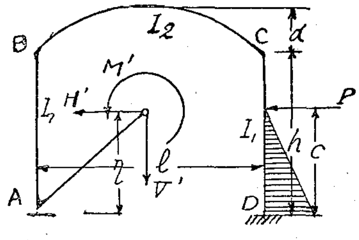
第十六圖の場合も同樣の考察から

$$\int M_o w ds = \frac{I_c}{I_1}\ \frac{pc^2}{2}$$

$$\int M_o w x ds = \frac{I_c}{I_1}\ \frac{plc^2}{4}$$

$$\int M_o w y ds = \frac{p_c{}^2\{3h(1+k)-c(1+2k)+2d\}I_c}{6(1+2k)I_1}$$

となるから



第 16 圖

$$(26)\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M' = \dfrac{pkc^2}{2h(1+2k)} \\[2mm] V' = \dfrac{3pkc^2}{h(1+6k)l} \\[2mm] H' = \dfrac{15pkc^2\{3h(1+k)-c(1+2k)+2d\}}{2h\{15h^2(2+k)k+60hdk+4d^2(1+12k)\}} \end{cases}$$

故に任意の分布荷重に對しては次の如くなる。

$$(27)\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M' = \dfrac{\int ykx^2\,dx}{2h(1+2k)} \\[2mm] V' = \dfrac{3\int ykx^2\,dx}{h(1+6k)l} \\[2mm] H' = \dfrac{15\int ykx^2\{3h(1+k)-x(1+2k)+2d\}dx}{2h\{15h^2(2+k)k+60hdk+4d^2(1+12k)\}} \end{cases}$$

從つて $y=p$ なる水平等荷重に對しては

$$(28)\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M' = \dfrac{ph^2k}{6(1+2k)}, \qquad V' = \dfrac{ph^2k}{l(1+6k)} \\[2mm] H' = \dfrac{5ph^2k\{3(3+2k)h+8d\}}{8\{15h^2(2+k)k+60hdk+4d^2(1+12k)\}} \end{cases}$$

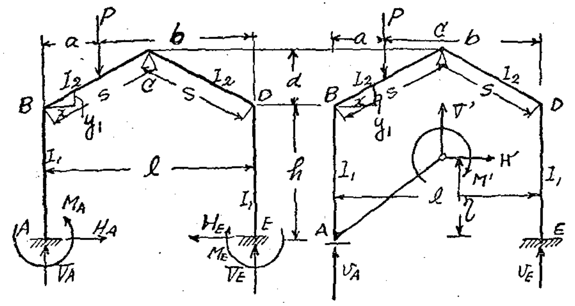
(6) 式に $m=0$ と置き $V'=0$ と考へたものと (28) 式とを比較せば (6) 式に於ける M' 及び H' の値は (28) 式のものゝ2倍になつてゐる事を知るであらう。卽ち弧形固定脚架構の各點の彎曲率は以上の M' V' H' を用ひて容易に求め

得るのである。

XII. 尖項固定脚架構が任意荷重を受ける場合

第十七圖の如き場合は（11）式に於て $k_3=0$ と置けば直ちに一般公式を誘導出來る。即ち、（29）$_1$ を得る。

$$(29)_1 \cdots\cdots \begin{cases} M'=\dfrac{I_2\int M_o w ds}{2I_c S(1+k_1)} \\ V'=\dfrac{6I_2\int M\ wxds}{I_c l^2 S(1+3k_1)} \\ H'=\dfrac{6I_2(1+k_1)\int Mowyds}{I_c S\{(hk_1+d)^2+4k_1(h^2+hd+d^2)\}}, \\ \eta=\dfrac{k_1 h+2h+d}{2(1+k_1)} \end{cases}$$



第　17　圖

從つて垂直水平等布荷重を受ける場合は、（12）乃至（16）式に $k_3=0$ と置き 第十七圖 は（29）$_2$ で表はさる。

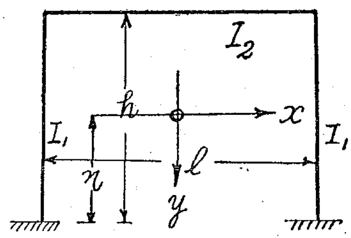
$$(29)_2 \cdots\cdots \begin{cases} M'=-\dfrac{Pab}{2l(1+k_1)}, \qquad \eta=\dfrac{K_1 h+2h+d}{2(1+k_1)} \\ V'=\dfrac{Pab(l-2x)}{l^3(1+3k_1)} \\ H'=\dfrac{Pa\{3b(k_1h-d)l+d(3l^2-4a^2)(1+k_1)\}}{l^2\{(hk_1+d)^2+4k_1(h^2+hd+d^2)\}} \end{cases}$$

XIV. 矩形固定脚架構が任意荷重を受ける場合

第十八圖の場合は (22) に於て $d=0$ と置くか又は、(29) 式に於て $d=0$、$k_1=2k$ $2S=l$ と置く事より

$$(30)\cdots\cdots\cdots\begin{cases} M'=\dfrac{I_2}{I_c}\,\dfrac{\int M_o w\,ls}{(1+2k)l} \\ V'=\dfrac{12I_2}{l^3I_c}\,\dfrac{\int M_o wxds}{(1+6k)} \\ H'=\dfrac{3I_2(1+2k)\int M_o wyds}{I_c h^2 l(2+k)k}, \qquad \eta=\dfrac{(1+k)}{1+2k},h \end{cases}$$

を得る。從つて矩形固定脚架構が對照荷重を受ける場合は (4) 式乃至 (10) 式に於て $m=0$、 $=0$ を代入するか、或は(12)乃至(16)式に於て $k_1=2k$、$d=0$ 及び $k_3=0$、$2S=l$ を代入して直ちに各種の場合を求められる。 (未完)



第 18 圖