變斷面のラーメンに就て（五）

石川　時信

第二十　三徑間二構脚にして左右對稱構及集中荷重の場合

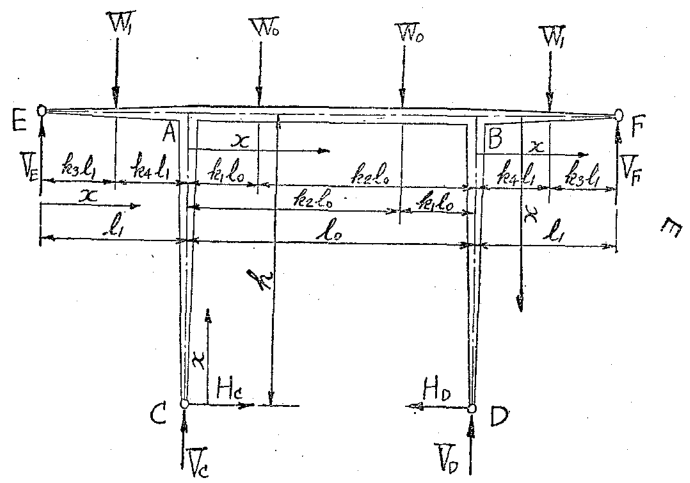
次に掲ぐる第二十八圖の如くに稍部材數多き場合は、基本式を適用する前に $\Sigma V = 0$ 又は $\Sigma H = 0$ 或は $\Sigma M = 0$ の條件を適宜考慮に入れて、未知數の數を少くして置いて然る後基本式を適用すれば、方程式の數が少くて足る便がある。

例へば未知數 V_E, V_C, V_L, 又は V_F の如きに對しては、豫め $\Sigma V = 0$ として置けば、荷重及結構の左右對稱の條件より、$V_E + V_C = W_1 + W_0$ であるから $V_C = W_1 + W_0 - V_E$ であるし、從つて $V_D = V_C = W_1 + W_0 - V_E$ であり、又 $V_F = V_E$ である。卽ち此の場合結局未知數は V_E 一個にて良く、基本式を立てる數が非常に減じられるが如き夫れである。

又構脚 BD に於て見ても、本 BD 部材に於ては其の一端が鉸であり、部材上に荷重を受けて居らざるが故に、其の部材の一端より他端に至るまでの間に於ては、曲モーメントは直線變化であり、從つて若し B 端に於て $M_{BD} = H_L h$ なる曲モーメント有りとせば、任意の點に於ける曲モーメントは、$M_{BD}(1 - x/h)$ となり $x = h$ に於て零となる譯であるべきである。

然るに一方 $\Sigma H = 0$ なる條件より、$H_C = -H_D$ である故に BD 部材上の任意の點に於ける曲モーメントは $M_{BD}(1-x/h) = M_{BD} - M_{BD}\,x/h = M_{BD} - H_D x = M_{BD} + H_C x$ の如くにして表はす事が出來るのも其一例である。斯く BD 部材に對して、$M_{BD} - H_C x$ の如き曲モーメント變化を與へたるのも、結局は D 端が鉸であるのを（間接に有要視して）$\Sigma M = 0$ なる條件の下に統一した事になつてゐる。

而して愈基本式を立つる前に、次に掲ぐる第二十九圖を參照せば、圖中撓角に正負の區別あるは、其の正負の通りに算出さるるのではなく、只其の正負の樣に相對的正負をなすべきであるといふ、相對的正負の意味である。即ち若し圖中正となれるものが、最後に負で算出された場合は豫め負で表はされたるものは、正で算出されるのである。



第二十八圖

斯くすれば EA 部材に對しては、

$$\theta_{EA} - \theta_{AE} = -\frac{1}{EI_{EA}}(V_E \beta_{EA1} + L_{EA1}) \cdots\cdots\cdots (117)$$

又 CA 部材に對しては、

$$\theta_{CA}-\theta_{AC} = -\frac{1}{EI_{CA}}(-H_C\beta_{CA1}) \cdots\cdots (118)$$

又 AB 部材に對しては

$$\theta_{AB}-\theta_{BA} = -\frac{1}{EI_{AB}}(M_{AB}\alpha_{AB1}+W_0\beta_{AB1}+L_{AB1}) \cdots\cdots (119)$$

又 BF 部材に對しては

$$\theta_{BF}-\theta_{FB} = -\frac{1}{EI_{BF}}(M_{BF}\alpha_{BF1}+W_1\beta_{BF1}-V_E\beta_{BF1}+L_{BF1}) \cdots\cdots (120)$$

$$\theta_{BF}l_1 = -\frac{1}{EI_{BF}}(M_{BF}\alpha_{BF2}+W\beta_{BF2}-V_E\beta_{BF2}+L_{BF2}) \cdots\cdots (121)$$

又 BD 部材に對しては、

$$\theta_{BD}+\theta_{DB} = -\frac{1}{EI_{BD}}(M_{BD}\alpha_{BD1}+H_C\beta_{BD1}) \cdots\cdots (122)$$

$$\theta_{BD}h = -\frac{1}{EI_{BD}}(M_{BD}\alpha_{BD2}+H_C\beta_{BD2}) \cdots\cdots (123)$$

然るに撓角に關する條件より、

$$\theta_{EA} = -\theta_{FB} \cdots\cdots (124)$$

$$\theta_{AE} = -\theta_{BF} \cdots\cdots(125)$$

$$\theta_{CA} = -\theta_{BD} \cdots\cdots(126)$$

$$\theta_{AC} = -\theta_{BD} \cdots\cdots(127)$$

$$\theta_{AB} = -\theta_{BA} \cdots\cdots(128)$$

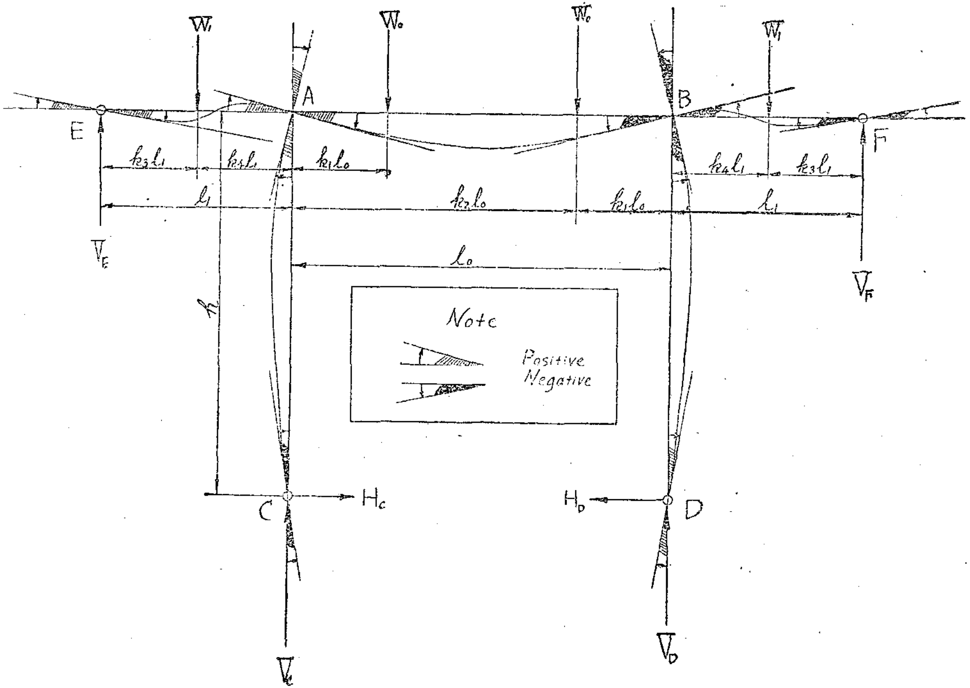
$$\theta_{AE} = \theta_{AC} \cdots\cdots\cdots(129)$$

$$\theta_{BF} = \theta_{BD} \cdots\cdots\cdots(130)$$

$$M_{AB} = M_{BA} \cdots\cdots(131)$$

$$M_{BA} = M_{BF} + M_{BD} \cdots(132)$$

以上 (117) 式より (132) 式までの 16 個の方程式中に於て未知數は $\theta_{EA}, \theta_{AE}, \theta_{CA}, \theta_{AC}, \theta_{AB}, \theta_{BA}, \theta_{BF}, \theta_{FB}, \theta_{BD}, \theta_{DB}, M_{BA}, M_{BD}, M_{BF}, M_{AB}, H_C$ 及 V_E の 16 個であるから、之等の



第二十九圖

方程式は解かるべく、其の道程も割合に簡單 して、其の結果は次の如くである。但し構節 A 及 B に於ては各部材は相等しき慣性能率を有し、又鋑 E, C, D 及 F に於ては各部材は相等しき慣性能率を有し、$I_{AB} = I_{BD} = I_{BF}$ 及 $I_{EA} = I_{CA}$ とし、$I_{AB}/I_{CA} = n$ とす。即ち、

$$V_E = \frac{\frac{1}{\alpha_{BF1}}\left(W_1\beta_{BF1}+L_{BF1}-nL_{EA1}\right)\left(\frac{h\alpha_{BF2}}{A_1}+\frac{2\alpha_{BF2}+l_1\alpha_{AB1}}{\alpha_{AB1}}\right)-\frac{h}{A_1}\left(W_1\beta_{BF2}+L_{BF2}\right)}{\frac{1}{\alpha_{BF1}}\left(n\beta_{EA1}+\beta_{BF1}\right)\left(\frac{h\alpha_{BF2}}{A_1}+\frac{2\alpha_{BF2}+l_1\alpha_{AB1}}{\alpha_{AB1}}\right)-\left(\frac{h}{A_1}\beta_{BF2}+\frac{2}{\alpha_{AB1}}\beta_{BF2}\right) - \frac{h}{A_1}\left(W_1\beta_{BF2}+L_{BF2}\right)-\frac{1}{\alpha_{AB1}}\left\{2(W_1\beta_{BF2}+L_{BF2})+l_1(W_0\beta_{AB1}+L_{AB1})\right\}} \cdots(133)$$

但し、(133) 式に於ては、

$$A_1 = \alpha_{BD2}-\frac{\alpha_{BD1}\beta_{BD2}}{\beta_{BD1}+n\beta_{CA1}} \cdots\cdots(134)$$

である。

又 V_E を除く他の未知數は、

$$M_{BF} = \frac{1}{\alpha_{BF1}}\left[V_E(n\beta_{EA1}+\beta_{BF1})-W_1\beta_{BF1}-L_{BF1}+nL_{AE1}\right] \cdots\cdots(135)$$

$$M_{BD} = -\frac{\frac{2}{l_1}\left(M_{BF}\alpha_{BF2}+W_1\beta_{BF2}-V_E\beta_{BF2}+L_{BF2}\right)+M_{BF}\alpha_{BF1}+W_0\beta_{AB1}+L_{AB1}}{\alpha_{AB1}} \cdots\cdots(136)$$

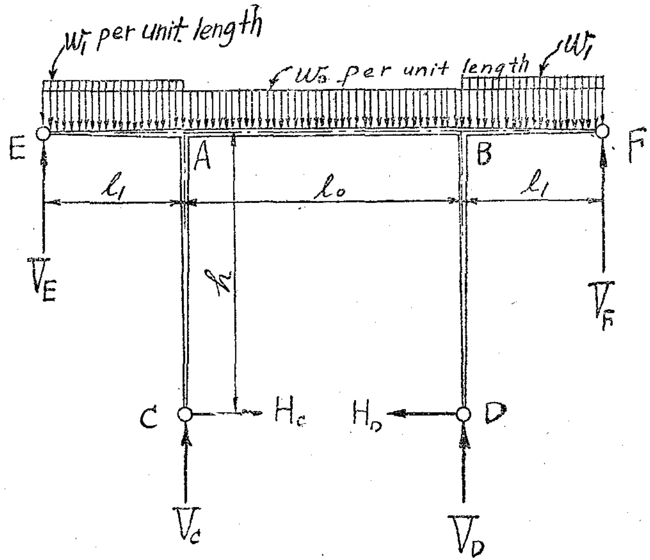
$$M_{AB} = M_{BA} = M_{BF} + M_{BD} \quad\cdots\cdots(137)$$

$$H_C = -H_D = -M_{BD}/h \quad\cdots\cdots(138)$$

の如くになる。

第二十一　三徑間二構脚にして左右對稱構及等布荷重の場合

次に掲ぐる第三十圖の如くに三徑間二構脚にして、結構及荷重が左右對稱の場合は、前記第二十節に述べたるものと大部分の形式を同じくし、只異る所は荷重が等布荷重となるだけである。從つて、其の節に得たる式中に於て、$W_1 = l_1 w_1$, $W_0 = w_0 l_0/2$ とすれば、本場合に對する値が得られる。但し $L_{BF1}, L_{EA1}, L_{BF2}, L_{AB1}$ 等は記號は前記第二十節のものと同じであるが、其の値は集中荷重の場合と等布荷重の場合とでは異るは勿論の事である。



第三十圖

第二十二　各部材定斷面を有する三徑間二構脚構

本節に於ては前記第二十節に述べし所の稍複雑なる變斷面ラーメンの公式が、果して計算の誤りなく作られしや否やを検するために、各部材が定斷面なる場合の式を計算して見て、次節に述ぶる所の同様のラーメンのカスチリアノの定理に依りて計算したる公式と一致する事を明示せんとす。

即ち、前記第二十八圖の V_E に對する公式（133）式は若し各部材定斷面にして、且つ各構節に於て各部材が相等しき慣性能率を有する時は、$n = 1$にして、

$$\left.\begin{aligned} \beta_{EA1} &= \frac{1}{2} l_1^2 \\ \beta_{CA1} &= \frac{1}{2} h^2 \\ \alpha_{AB1} &= l_0 \\ \beta_{AB1} &= \frac{1}{2} l_0^2 \\ \alpha_{BA1} &= l_0 \\ \beta_{BF1} &= \frac{1}{2} l_0^2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (139)$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{BF2} &= \frac{1}{2} l_0^2 \\ \beta_{BF2} &= \frac{1}{6} l_0^3 \\ \alpha_{BD1} &= h \\ \beta_{BD1} &= \frac{1}{2} h^2 \\ \alpha_{BD2} &= \frac{1}{2} h^2 \\ \beta_{BD2} &= \frac{1}{6} h^3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (140)$$

$$\left.\begin{aligned} L_{EA1} &= -\frac{1}{2} k_4^2 l_1^2 W_1 \\ L_{AB1} &= -\frac{1}{2} (k_2^2 + k_1^2) l_0^2 W_0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (141)$$

$$
\left.\begin{aligned}
L_{BF1} &= -\frac{1}{2}k_3^2 l_1^2 W_1 \\
L_{BF2} &= -\frac{1}{6}k_3^3 l_1^3 W_1
\end{aligned}\right\}
$$

なるを以て、(134) 式の A_1 も共に計算して、代入法を行へば、

$$
V_E = \frac{W_1\left\{k_4 l_1 + k_4^2 l_1^2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{h}+\frac{1}{l_0}\right) - k_4^3 l_1^2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{h}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{l_0}\right)\right\} - \frac{1}{2}W_0 l_0(1-k_1^2-k_2^2)}{\frac{l_1^2}{h}+\frac{2}{3}\cdot\frac{l_1^2}{l_0}+l_1} \quad \cdots\cdots\cdots(142)
$$

となりて次に掲ぐる所のカスチリアノの定理に依りて計算する所の式と全く一致してゐる事が知られるのである。

第二十三　カスチリアノの定理に依りて計算したる三徑間二構桝定斷面構

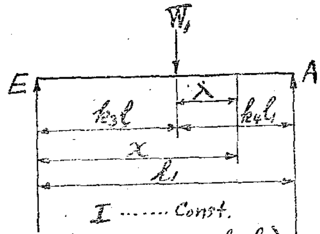
本節に於ては前節に述ぶる如く、前掲第二十八圖に示す構をカスリチリアノの定理に依りて計算し、前掲 (142) 式と一致せる事を明示せんとす。

而して計算の便宜上（7）式に掲げたる記號の外に次に掲ぐる記號を設け、且つ最初は各部材變斷面なりと假定して式を作る事とす。(第三十一圖參照)

$$
\left.\begin{aligned}
\gamma_{EA1} &= \int_0^{l_1}\frac{x^2}{f(x)}dx \\
L_{EAx1} &= \int_{(x-k_3 l_1)}^{l_1}(EA\ \text{部材上に在る荷重のみに依る直接の彎曲力率})\times(x)dx
\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(143)
$$

而して、其の記號の意味は一つの部材の働の式を作る際も、其の部材に起れる彎曲力率は之れを荷重のみに依るものと、原點に於ける反力に依るもの、及び原點に於けるもの、との三つに分ちて取扱ふといふ意味である。而して其の左樣にするのも、本文に前々より述ぶる所の基本式に於ける如くに、不靜定未知量と然らざるものとを分離せんがためである。

尚其外に働の式を作るには、荷重及結構が左右對稱であるから、EA 部に於けるものは BF 部材に於けるものに、又 CA 部材に於けるものは BD 部材に於けるものに全く等しきものとして取扱ふ。換言すれば其の一方に於けるものゝ二倍を以て、其の兩方に於けるものゝ和と同樣なるものとす。



$$L = -W_1(x - k_3 l),\quad x \geqq k_3 l$$
$$= -W_1 \lambda,\quad \lambda \geqq 0$$
$$L_x = -W_1 \lambda (k_3 l_1 + \lambda),\quad x \geqq 0$$
$$L_{EAx_1} = -W_1 \int_0^{\lambda} \lambda (k_3 l_1 + \lambda) d\lambda$$
$$= -W_1 k_4^2 l_1^3 \left(\frac{1}{2} k_3 + \frac{1}{3} k_4\right)$$

第三十一圖

斯くすれば EA 部材に對しては、曲モーメントは、

$$M = V_E x + L_{EA},\quad \frac{\partial M}{\partial V_E} = x,$$

$$\frac{\partial W}{\partial V_E} = \int_0^{l_1} \frac{M}{EI_{EA}} \cdot \frac{\partial M}{\partial V_E} dx = \frac{1}{EI_{EA}} \left[V_E \gamma_{E1} + L_{EAx1} \right] \cdots\cdots\cdots\cdots (144)$$

又 CA 部材に對しては、

$$M = -H_C x\ , \quad \frac{\sigma M}{\partial H_C} = -x\ ,$$

$$\frac{\partial W}{\partial H_C} = \int_o^h \frac{M}{EI_{CA}} \cdot \frac{\sigma M}{\partial H_C} dx = \frac{1}{EI_{CA}} \gamma_{CA1} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(145)$$

又 AB 部材に對しては、

$$M = V_E l_1 - W_1 k_4 l_1 - H_C h + W_0 x + L_{AB}\ ,$$

$$\frac{\partial M}{\partial V_E} = l_1 , \quad \frac{\partial M}{\partial H_C} = -h\ ,$$

$$\frac{\partial W}{\partial V_E} = \int_o^{l_0} \frac{M}{EI_{AB}} \cdot \frac{\partial M}{\partial V_E} dx = \frac{l_1}{EI_{AB}} \left[V_E l_1 \alpha_{AB1} - W_1 k_4 l_1 \alpha_{AB1} - H_C h \alpha_{AB1} + W_o \beta_{AB1} + L_{AB1} \right] \cdots\cdots(146)$$

$$\frac{\partial W}{\partial V_E} = \int_o^{l_1} \frac{M}{EI_{AB}} \cdot \frac{\partial M}{\partial H_C} dx = -\frac{h}{EI_{AB}} \left[V_E l_1 \alpha_{AB1} - W_1 k_4 l_1 \alpha_{AB1} - H_C h \alpha_{AB1} + W_o \beta_{AB1} + L_{AB1} \right] \cdots(147)$$

$$\frac{\partial W}{\partial V_E} = 0\ , \quad \frac{\partial W}{\partial V_C} = 0 \quad \text{より}$$

$$\left. \begin{aligned} & 2nV_E \gamma_{EA1} + 2nL_{EAx1} + l\left[V_E l_1 \alpha_{AB1} - W_1 k_4 l_1 \alpha_{AB1} - H_C h \alpha_{AB1} + W_o \beta_{AB1} + L_{AB1} \right] = 0 \\ & 2nH_C \gamma_{CA1} - h\left[V_E l_1 \alpha_{AB1} - W_1 k_4 l_1 \alpha_{AB1} - H_C h \alpha_{AB1} + W_{oBA1} + L_{AB1} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(148)$$

本式を解きて、

$$V_E = \frac{(h-B_1 l_1)(W_1 k_4 l_1 \alpha_{AB1} - W_o \beta_{AB1} - L_{AB1}) + 2B_1 n L_{EAx1}}{h l_1 \alpha_{AB1} - B_1(2n\gamma_{EA1} + l_1^2 \alpha_{AB1})} \quad \cdots\cdots(149)$$

但し

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= \frac{2n\gamma_{CA1} + h^2\alpha_{AB1}}{l_1 h \alpha_{AB1}} \\ n &= \frac{I_{AB}}{I_{EA}} = \frac{I_{AB}}{I_{CA}} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(150)$$

(149) 式は各部材變斷面の場合の一般式であるが、若し各部材が定斷面にして $n = 1$ なる場合は、

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{EA1} &= \frac{1}{3} l_1^3 \\ L_{EAx1} &= -W_1 k_4^2 l_1^3 \left(\frac{1}{3}k_3 + \frac{1}{3}k_4\right) \\ \alpha_{AB1} &= l_0 \\ \beta_{AB1} &= \frac{1}{2} l_0^2 \\ L_{AB1} &= -\frac{1}{2} W_0 l_0^2 (k_2^2 + k_1^2) \\ \gamma_{CA1} &= \frac{1}{3} h^3 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(151)$$

であるから、(150) 式より、

$$B_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{h^2}{l_1 l_0} + \frac{h}{l_1} \cdots\cdots\cdots (152)$$

從つて、(149) 式より、

$$V_E = \frac{W_1\left[k_4 l_1 + k_4^2 l_1^2\left(\frac{1}{l} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{h}\right) - l_1^2 k_4^3\left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{l_0} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{h}\right)\right] - \frac{1}{2} W_0 l_0 (1 - k_1^2 - k_2^3)}{\frac{2}{3} \cdot \frac{l_1^2}{l_0} + \frac{l_1^2}{h} + l_1} \cdots\cdots\cdots (153)$$

となつて、前節 (142) 式と一致するのである。

本節に於ては、V_E の外に尙 H_0 をも求むべきなれども、既に V_E を求むる際、カスチクアノの定理に依りて求めたるものと一致せる事を知りたるを以て、此處には H_0 の求め方は其の本旨に非ずとして略す事とせり。

以上本節を以て本章の終りとす。(未完)