桁に於ける荷重、剪力、彎曲力率、撓角及撓度の表示法及其簡易化に就て（一）

石　川　時　信

内　容　梗　概

本文は桁に於ける連續荷重、剪力、彎曲力率、撓角、及び撓度の表示法を出來るだけ簡單にし、其の加減乘除及積分法に對して新說を試みたるものにして、若し桁が其の斷面一樣ならずして變斷面を有する場合等ありとも常に適確に問題を解決し、且つ平易迅速に計算を遂行せしめんとせるものなり。

桁の兩端に於ける剪力、彎曲力率、撓角又は變位或は撓度は積分常數或は不靜定未知量と稱へられて、モールの定理に依れば其の一般的求め方は既に明白であり、且つラーメンの理論に於ては可成り其の求め方は一般的に簡明視されてゐるに係らず、一つの單桁又は固定桁に數個の集中荷重又は不連續荷重載る場合は、其の解法動もすれば面倒視され、所謂積分常數の取方及表式の方法に常に疑義を生じ、此の種桁の問題に關し多少の質疑ある事珍しからず。

本文は桁に於ける剪力、彎曲力率、撓角及び撓度の連續性に着眼し、其の表示法を最簡明ならしめ、以て其等質疑の起る事を少なからしめ、且つ平易迅速に問題を解決せしむる事を期したり。

目　次

序

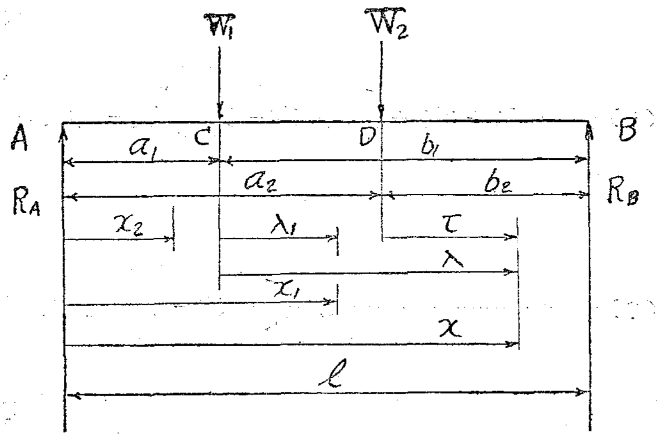
今單桁 $A\ B$ に數個の集中荷重 $W_1\ W_2 \cdots\cdots W_n$ 等が載り、其れが彎曲せる狀態を凝視するに、事實其の桁は圓滑なる曲線を成せるを認む。亦其の曲線が水平線と爲す角、即ち撓角も急變する事なく、徐々に變化し、始め右廻りなりしものが遂に左廻りとなりて止むを知る。斯く其の曲線が圓滑にして、且つ撓角の急變せざるは、之れを數學的に云へば、桁の任意の點に於て或る常數値の減加さるる事なしと謂ふを得べし。即ち撓角と撓度とは何れも彎曲力率の積分より生れるものにして、其の最左端に於けるものは積分常數なりと考へられ、其の常數値は桁の任意の點に添加さる事なきを知りたり、若し其れ有るは即ち或る既知量なる事を察知したり。

吾々は觀察に依りて旣に單桁に於ける撓角は或る與えられたる荷重に對しては、左端に於て或一定値を有し、徐々に變

化し、其右端に到りて、又或一定値に達して止むを知りたるを以て、之れを數學的に取扱ふ際も、左端に於ける撓角は之を定値として取扱ふ方妥當なるも、假りに、之れを二、三の或特定値に依りて現はし、後に其の數種の特定値の等しくなる事を證明する事に依りて、一層其の觀念の確定に努めんとす。

次に述べんとする解說は實に迂遠なるものなれども、從來單桁の撓度を求むる際には、其の載荷狀態に應じて桁を幾つかの區間に分ちて計算を行ひたる慣習あるため、わざわざ其の慣習に倣ひて幾分なりとも從來の方法と關聯を取りつゝ進みたり。

即ち、本來よりせば、第一章概說中に於ける C_1、C_3 及 C_5 の如きは始めより $C_1 = C_3 = C_5$ として進みたる方、寧ろモールの定理に依りて妥當とす。



第　一　圖

第一章　概　說

次に揭ぐる第一圖の如く單桁 AB が W_1, W_2 なる2個の集中荷重を受くる時は、DB の區間に x 點を取れば x 點の彎曲力率は、

$$M = R_A x - W_1 (x - a_1) - W_2 (x - a_2) \quad \cdots\cdots (1)$$

なり。然るに、モールの定理に依る時は、桁の彈性係數を E、慣性能率を I とすれば、x 點の撓角及撓度は次の如し。

「$1/_{EI}$ 倍されたる彎曲力率圖を荷重と考へたる時のその點の剪力は撓角に等し」……………（2）

「$1/_{EI}$ 倍されたる彎曲力率圖を荷重と考へたる時のその點の彎曲力率は撓度に等し」……………（2a）

從つて $D\ B$ 區間に於ては撓角及撓度は（1），（2）より、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x x\,dx - W_1\int_{a_1}^x (x-a_1)\,dx - W_2\int_{a_2}^x (x-a_2)\,dx \right] + C_1 \quad \cdots\cdots(3)$$

但し C_1 は A 端に於ける撓角を意味す。又

$$y = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x\int_0^x x\,dx^2 - W_1\int_{a_1}^x\int_{a_1}^x (x-a_1)\,dx^2 - W_2\int_{a_2}^x\int_{a_2}^x (x-a_2)\,dx^2 \right] + C_1x + C_2 \quad \cdots\cdots(4)$$

但し C_2 は A 端に於ける撓度を意味し此の場合零なり。

（3）及（4）式は其の積分を行へば、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2EI}\left[R_A x^2 - W_1(x-a_1)^2 - W_2(x-a_2)^2 \right] + C_1 \quad \cdots\cdots(3a)$$

$$y = \frac{1}{6EI}\left[R_A x^3 - W_1(x-a_1)^3 - W_2(x-a_2)^3 \right] + C_1x + C_2 \quad \cdots\cdots(4a)$$

D 點に於ては $x=a_2$ なる故に (3a) 及 (4a) 式は、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2EI}\left[R_A a_2^2 - W_1(a_2-a_1)^2 \right] + C_1 \cdots\cdots (3b)$$

$$y = \frac{1}{6EI}\left[R_A a_2^3 - W_1(a_2-a_1)^3 \right] + C_1 a_2 + C_2 \cdots\cdots (4b)$$

以上 (3a) 及 (4a) 式より夫々 (3b) 及 (4b) 式に移り行く際を見るに (3a) 及 (4a) 式中に於ける $W_2(x-a_2)^2$ 及 $W_2(x-a_2)^3$ なる項は (3b) 及 (4b) 式に常數値を與ふる事なし。換言すれば $W_2(x-a_2)^2$ 及 $W_2(x-a_2)^3$ は各 D 點に於ては零にして D 點より右方に於て遞增する處の連續函數なるを以て (3a) 及 (4a) 式中に於ける常數 C_1 及 C_2 の値は夫々 (3b) 及 (4b) 式中に於ける常數 C_1 及 C_2 の値に等し。尙簡單に言ひ表はせば C_1 及 C_2 の値は $D\,B$ 區間の何れの點に於ても不變である。

同樣にして今 $C\,D$ 區間に於ける撓角及撓度の式を、

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{EI}\left[R_A \int_0^{x_1} x_1\,dx_1 - W_1 \int_{a_1}^{x_1} (x_1-a_1)\,dx_1 \right] + C_3 \cdots\cdots (5)$$

$$y_1 = \frac{1}{EI}\left[R_A \int_0^{x_1}\int_0^{x_1} x_1\,dx_1^2 - W_1 \int_{a_1}^{x_1}\int_{a_1}^{x_1} (x_1-a_1)\,dx_1^2 \right] + C_3 x_1 + C_4 \cdots\cdots (6)$$

とすれば、C_3 及 C_4 の値は CD 區間の何れの點に於ても不變なり。又同じく AC 區間に於ける撓角及撓度の式を夫々

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^{x_2} x_2\,dx_2\right] + C_5 \quad \cdots\cdots (7)$$

$$y_2 = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^{x_2}\int_0^{x_2} x_2\,dx_2^2\right] + C_5 x_2 + C_6 \quad \cdots\cdots (8)$$

とすれば C_5 及 C_6 の値は AC 區間の何れの點に於ても不變なり。今（5）乃至（8）式の積分法を行ひ (3x) 及 (4x) 式と組み次の如く配列す。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2EI}\left[R_A x_2^2 - W_1(x_2-a_1)^2 - W_2(x-a_2)^2\right] + C_1 \quad \cdots\cdots (3a)$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{2EI}\left[R_A x_1^2 - W_1(x-a_1)^2\right] + C_3 \quad \cdots\cdots (5a)$$

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{1}{2EI}\left[R_A x_2^2\right] + C_5 \quad \cdots\cdots (7a)$$

$$y = \frac{1}{6EI}\left[R_A x^3 - W_1(x-a_1)^3 - W_2(x-a_2)^3\right] + C_1 x + C_2 \quad \cdots\cdots (4a)$$

$$y_1 = \frac{1}{6\,EI}\left[R_A x_1^3 - W_1\,(x_1 - a)^3\right] + C_3\,x_1 + C_4 \cdots\cdots (6a)$$

$$y_2 = \frac{1}{6\,EI}\left[R_A x_2^3\right] + C_5\,x_2 + C_6 \cdots\cdots (8a)$$

以上（$3a$）乃至（$8a$）式を見るに（$3a$）式より $W_2(x-a_2)^2$ の項を取り除きたるものは（$5a$）式と同形となり、又（$5a$）式より $(x_1-a_1)^2$ の項を取りたるものは（$7a$）式と同形となる如き關係あり。且つ x，x_1，x_2 等は各文字は異るも何れも左端 A 端（第一圖參照）よりの距離を表はすものなるを以て（$5a$）及（$6a$）式に $x_1=a_2$ を代入したるものと（$3b$）及（$4b$）式とを組みて次の如く配列して見れば、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\,EI}\left[R_A\,a_2^2 - W_1\,(a_2 - a_1)^2\right] + C_1 \cdots\cdots (3b)$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{2\,EI}\left[R_A\,a_2^2 - W_1\,(a_2 - a)^2\right] + C_3 \cdots\cdots (5b)$$

$$y = \frac{1}{6\,EI}\left[R_A\,a_2^3 - W_1\,(a_2 - a_1)^3\right] + C_1\,a_2 + C_2 \cdots\cdots (4b)$$

$$y_1 = \frac{1}{6\,EI}\left[R_A\,a_2^3 - W_1\,(a_2 - a_1)^3\right] + C_3\,a_2 + C_4 \cdots\cdots (6b)$$

（$3b$）及（$5b$）式は共に D 點（第一圖參照）に於ける撓角を表はし、且つ E, I は $A\,B$ 全長に亙りて一定なるを以て

$$(3b) = (5b) \qquad \therefore\ C_1 = C_3 \cdots\cdots (9)$$

又（$4b$）及（$6b$）式に於ても同様に D 點の撓度より、

$$(4b) = (6b) \qquad \cdots\cdots (10)$$

然るに（9）式に於ては $C_3 = C_1$ なるを以て、

$$C_2 = C_4 \qquad \cdots\cdots (11)$$

同様の事を（$5a$）乃至（$8a$）式に對して行へば、

$$\left.\begin{aligned} C_3 &= C_5 \\ C_4 &= C_6 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (12)$$

を得るは明なる事にして、從つて、

$$\left.\begin{aligned} C_1 = C_3 = C_5 \ (&= C \text{ とす}) \\ C_2 = C_4 = C_6 &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots (13)$$

但し A 端の變位を零とす。

（13）式中 C は即ち A 端に於ける撓角にして、AC, CD, DB の各區間に對する撓角及撓度の表式中に於ては常に一定なるべきものなるを知る。依つて今（3）乃至（8）式に（13）式を代入する時は各區間に於ける撓角及撓度の表式は次の如くなる。

DB 區間に對しては、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x x\,dx - W_1\int_{a_1}^x (x-a_1)\,dx - W_2\int_{a_2}^x (x-a_2)\,dx \right] + C \quad\cdots\cdots(3c)$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x\int_0^x x\,dx^2 - W_1\int_{a_1}^x\int_{a_1}^x (x-a_1)\,dx^2 - W_2\int_{a_2}^x\int_{a_2}^x (x-a_2)\,dx^2 \right] + Cx \quad\cdots\cdots(4c)$$

$C\ D$ 區間に對しては、

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^{x_1} x_1\,dx_1 - W_1\int_{a_1}^{x_1} (x_1-a_1)\,dx_1 \right] + C \quad\cdots\cdots(5c)$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^{x_1}\int_0^{x_1} x_1\,dx_1^2 - W_1\int_{a_1}^{x_1}\int_{a_1}^{x_1} (x_1-a_1)\,dx_1^2 \right] + Cx_1 \quad\cdots\cdots(6c)$$

$A\ C$ 區間に對しては、

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^{x_2} x_2\,dx_2 \right] + C \quad\cdots\cdots(7c)$$

$$y_2 = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^{x_2}\int_0^{x_2} x_2\,dx_2^2 \right] + Cx_2 \quad\cdots\cdots(8c)$$

今 (3c) 及 (4c) 式に於て $x-a_1=\lambda$, $x-a_2=\tau$ として積分變數の變換を行ふときは、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x x\,dx - W_1\int_0^\lambda \lambda\,d\lambda - W_2\int_0^\tau \tau\,d\tau \right] + C \quad \cdots\cdots (3d)$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x\int_0^x x\,dx^2 - W_1\int_0^\lambda\int_0^\lambda \lambda\,d\lambda^2 - W_2\int_0^\tau\int_0^\tau \tau\,d\tau^2 \right] + Cx \quad \cdots\cdots (4d)$$

同樣の形式を以て（5ｂ）乃至（8ｂ）式の積分變數を變換する時は、

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^{x_1} x_1\,dx_1 - W_1\int_0^{\lambda_1} \lambda_1\,d\lambda_1 \right] + C \quad \cdots\cdots (5d)$$

$$y_1 = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^{x_1}\int_0^{x_1} x_1\,dx_1^2 - W_1\int_0^{\lambda_1}\int_0^{\lambda_1} \lambda_1\,d\lambda_1^2 \right] Cx_1 \quad \cdots\cdots (6d)$$

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^{x_2} x_2\,dx_2 \right] + C \quad \cdots\cdots (7d)$$

$$y_2 = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^{x_2}\int_0^{x_2} x_2\,dx_2^2 \right] + Cx_2 \quad \cdots\cdots (8d)$$

以上（3d）乃至（8d）式を見るに x, x_1, x_2, λ, λ_1, τ 等は夫々 R_A, W_1 及 W_2 より右方へ計りたる距離にして、Suffix の有無に係らず、其の量は常に反力又は荷重の作用點を夫々の原點とし、夫々の原點より右方距離を表はしてゐる

を以て、Suffix は之れを省略するも、取扱上に誤りを來さしむる恐れ無し。依つて今其の Suffix を省略する時は、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x x\ dx - W_1\int_0^\lambda \lambda\ d\lambda - W_2\int_0^\tau \tau\ d\tau \right] + C \cdots\cdots (3e)$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x\int_0^x x\ dx^2 - W_1\int_0^\lambda\int_0^\lambda \lambda\ d\lambda^2 - W_2\int_0^\tau\int_0^\tau \tau\ d\tau^2 \right] + Cx \cdots\cdots (4e)$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x x\ dx - W_1\int_0^\lambda \lambda\ d\lambda \right] + C \cdots\cdots (5e)$$

$$y_1 = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x\int_0^x x\ dx^2 - W_1\int_0^\lambda\int_0^\lambda \lambda\ d\lambda^2 \right] + Cx \cdots\cdots 6e)$$

$$\frac{dy_2}{dx_2} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x x\ dx \right] + C \cdots\cdots (7e)$$

$$y_2 = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x\int_0^x x\ dx^2 \right] + Cx \cdots\cdots (8e)$$

以上 (3e) 乃至 (8e) 式を見るに $\{(3e), (4e)\}$, $\{(5e), (6e)\}$, $\{(7e), (8e)\}$ 式は其の右邊は形の上に於て整然と區別あるを以て、其の左邊の文字に特に Suffix を付せずとも、其等の式は單桁 AB 上の何れの區間の撓角又は撓度

を表はしてゐるかを察知するに容易なり。尙詳言せば DB 區間に於ては W_2 の項あるに依りて、又 CD 區間に於ては W_2 の項を欠き W_1 の項あるに依り、又 AC 區間に於ては W_1 及 W_2 の兩項を欠けるに依りて、何れの式は何れの區間の撓角又は撓度を表はしてゐるものなるやを察知するに充分なり。依つて以後は其の左邊に於ける文字上の區別は之れを省略し、單に右邊の形に依りてのみ其の表式を區別す。然らば、

DB 區間に對しては、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x x\,dx - W_1\int_0^\lambda \lambda\,d\lambda - W_2\int_0^\tau \tau\,d\tau\right] + C \cdots\cdots (3f)$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x\int_0^x x\,dx^2 - W_1\int_0^\lambda\int_0^\lambda \lambda\,d\lambda^2 - W_2\int_0^\tau\int_0^\tau \tau\,d\tau^2\right] + Cx \cdots\cdots (4f)$$

CD 區間に對しては、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x x\,dx - W_1\int_0^\lambda \lambda\,d\lambda\right] + C \cdots\cdots (5f)$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x\int_2^x x\,dx^2 - W_1\int_0^\lambda\int_0^\lambda \lambda\,d\lambda^2\right] Cx \cdots\cdots (6f)$$

AC 區間に對しては、

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x x\,dx\right] + C \cdots\cdots (7f)$$

$$y = \frac{1}{EI}\left[R_A\int_0^x\int_0^x x\,dx^2\right] Cx \cdots\cdots (8f)$$

以上 (3*f*) 乃至 (8*f*) 式を以て、集中荷重 W_1 及 W_2 を受けたる單桁の撓角及撓度を表はす一般式とす。卽、考ふべき點より右方に存在する荷重は表式中に表はれず。但し R_A なる A 點の反力中には W_1 W_2 なる項を含むも其は W_1 W_2 其のものにあらずして W_1 W_2 のために生ずる反力の一部分なり。

而して (3*f*) 乃至 (8*f*) 式は（1),（2）に述べたるモールの定理を最も簡單に表はす事、（3）乃至（8）式と比較して明なり。

試みに今 W_1 W_2 なる2個の集中荷重を受けたる單桁の撓度を求めんとせば、先づ (4*f*) 式に於て $x=l$, $\lambda=b_1$, $\tau=b_2$ なる時 $y=o$ として左端に於ける撓角 C を求め、

$$C = -\frac{1}{6EIl}(R_A l^3 - W_1 b_1^3 - W_2 b_2^3) \cdots\cdots (14)$$

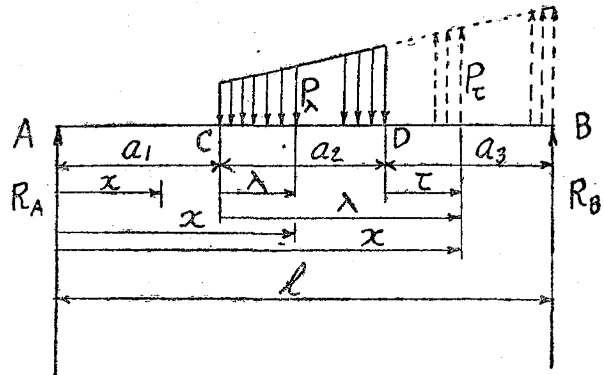
本式を (4*f*), (6*f*) 及 (8*f*) に代入すれば、任意の點の撓度は求めらる。

又若し W_1 W_2 $W_3 \cdots\cdots W_n$ なる數個の集中荷重を受けたる單桁に於ては C の値は常に、

$$C = -\frac{1}{6EIl}(R_A l^3 - W_1 b_1^3 - W_2 b_2^3 - W_3 b_3^3 \cdots\cdots W_n b_n^3) \cdots\cdots (15)$$

にて表はさる。

同様の意味に於て、次の第二圖に示すが如く、P_λ なる



第 二 圖

連續荷重が單桁の一部分に作用する時は P_λ を DB の區間に P_τ を以て延長せしめて、

$$C = -\frac{1}{EIl}\left[\frac{1}{6}R_A l^3 - \int_0^{(l_2+a_3)}\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda} P_\lambda\, d\lambda^4 + \int_0^{a_3}\int_0^{\tau}\int_0^{\tau}\int_0^{\tau} P_\tau\, d\tau^4\right] \quad \cdots\cdots(16)$$

とする事が出來る。但し $P_\lambda = f(\lambda)$, $P_\tau = \psi(\tau)$ の如く表示す。

以上 (14), (15) 及 (16) 式は何れも單桁 AB の A 端に於ける撓角 C の表式にして、モールの定理に依りて之れを數式に表はしたるものと同結果なれども、此の事たるや動々もすれば疑念を以て見らるる事あり。

蓋し（4）式及（6）式の如く荷重に關する項を積分の下限界に入れて積分せる例の少なきためあまりに簡單なる事柄の會釋に支障を來したるものなるべし。

又本章に於ける (3f) 乃至 (8f) の表式は（1）式を直ちに、

$$M = R_A x - W_1\lambda - W_2\tau \quad \cdots\cdots(17)$$

の如く表示せしむる事の便なるを立證す。

以上本章に於ては、(3f) 乃至 (8f) 式に依りて單桁に關する撓角及撓度の表式を與へ、(14) 式乃至 (16) 式に依りて其の一端に於ける撓角の一般式を與え、又 (17) 式に依りては、彎曲力率の表式を與えたり。