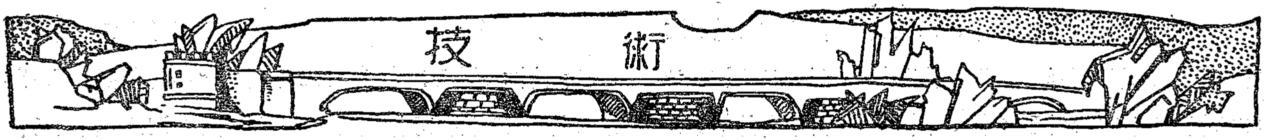


コンクリート鋪装版の解法（三）

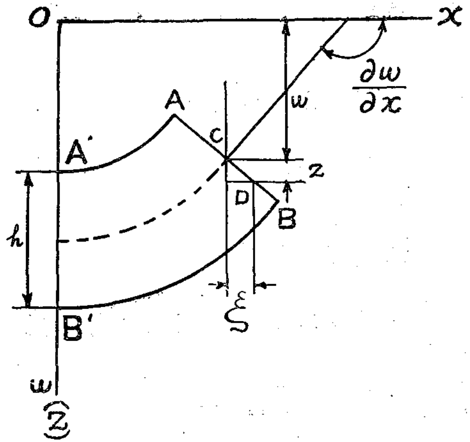
原口忠次郎

4. 彈床上の平版の一般方程式

普通の平版即ち四邊にて支持された版でさへ仲々その解法は六ケ敷いものであるが、彈床上の平版の解法はより面倒になつて來るのは當然である。彈床上の桁でさへも計算は煩雜だが平板となれば一層面倒となつて果して實際上に適するかさへ疑はれる位である。然しコンクリート鋪装版の發達に連れ、この問題も相當重要な役割となるのであつて、この問題が解決されない限り鋪装版の厚さの決定の如きも、その根據が甚だ薄弱となつて來ることは緒言に述べた通りである。

扨て彈床上の平板方程式は普通の平板の方程式と少し趣きを異にして居る。今其大略を記述して見やう。

平板の厚さが邊の長さに比し小さくて、その平板の曲りが小さい時にはその方程式は割合に簡単となつて來る。



第　一　圖

今第一圖の $A'ABB'$ を平板の一部とし AB 斷面が圖の如く曲りを生じたときのその斷面内の點 D の變位を、x 軸の方向を ξ とし y 軸（紙面に直角なる方向とす）の方向を η とすれば次の關係式が成立つ。

$$\left.\begin{aligned} \xi &= z\tan\left(\pi-\frac{\partial w}{\partial x}\right) = -z\tan\frac{\partial w}{\partial x} \doteqdot -z\frac{\partial w}{\partial x} \\ \text{同様に}\quad \eta &= -z\frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1)$$

又 x, y 軸方向の伸びを $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ とし、且つ γ_{xy} を之等の軸に沿ふた面に於ける伸びとすれば ξ, η との間には次の關係式が成り立つ。

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \xi}{\partial x} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial \eta}{\partial x} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

尙この外に σ_z 即ち平板の中央面に垂直なる應力が存在するも σ_x, σ_y 及び γ_{xy} に比較すると小さいから之は省略する。即ち $\sigma_z = 0$ とすると

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_x+v\varepsilon_y) = -\frac{Ez}{1-v^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-v^2}(\varepsilon_y+v\varepsilon_x) = -\frac{Ez}{1-v^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3)$$

又應剪力 (Shearing Stress) は次の關係がある。

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -2Gz\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}$$

E = 彈性率 (Young's modulus)

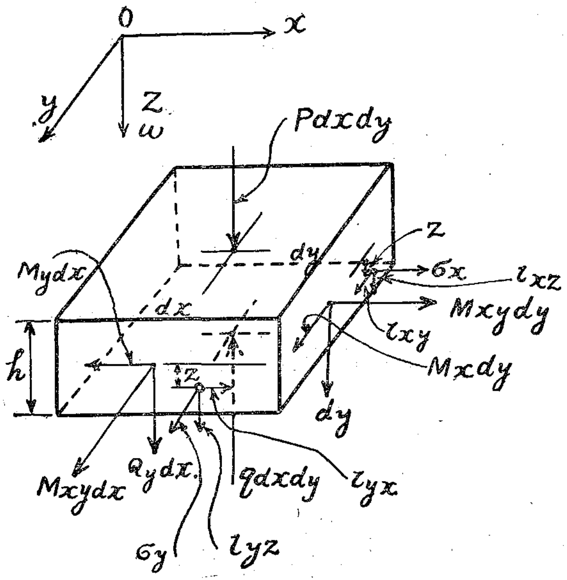
$G = \dfrac{E}{2\left(1+\dfrac{1}{v}\right)}$　v = ポイソン比

然して彎曲力率 M_x, M_y 及び應剪彎曲率 M_{xy} と σ_x, σ_y, τ_{xy} との間には次の關係がある。

$$M_x = \int \sigma_x z\,dz,\quad M_y = \sigma_y z\,dz.\quad M_{xy} = \int \tau_{xy} z\,dz \quad \cdots\cdots(4)$$

(4) 式へ (3) 式を入れて z を $-\dfrac{h}{2}$ より $\dfrac{h}{2}$ まで積分すると次の式が與へらるゝ。

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\ M_y &= -N\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\\ M_{xy} &= -(1-v)N\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\\ N &= \frac{Eh^3}{12(1-v^2)} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(5)$$



第　二　圖

今第二圖に示す如く彈床上の平版の極小部分 dx, dy, h を取つてそれの外力と内力との平衡狀態を考へる。$dx{\cdot}h$, $dy\,h$ の二面には M_x, M_y の外に剪力 Q_y と Q_x とが働く。その値は次の如きものである。

$$\left.\begin{aligned} Q_x &= \int \tau_{xz}\,dz \\ Q_y &= \int \tau_{yz}\,dx \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(6)$$

然して彎曲力率と剪力との關係は次式にて示さるゝ。

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y},\quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\cdots\cdots(7)$$

今（7）式に（5）式の關係を入れて整頓すると

$$\left.\begin{aligned} &Q_x = -N\frac{\partial \varDelta w}{\partial x},\quad Q_y = -N\frac{\partial \varDelta w}{\partial y} \\ &\text{但し}\quad \varDelta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(8)$$

外力は上部と下部より各々 $p\,dx\,dy$ と $q\,dx\,dy$ とが働くために是等の諸力と剪力とは平衡に保たねばならぬ。卽ち

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p - q = 0 \\ &q = cw \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(9)$$

（9）式に（8）式を入れると次式を得る。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\frac{c}{N}w = \frac{P}{N} \quad \cdots\cdots(10)$$

この p なる荷重が x, y の函數にて表はし得れば（10）式は次の如くなり、これが求める彈床上の平版の一般方程式である。

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\lambda^4 w = p(x, y) \\ &\lambda^4 = \frac{c}{N} \\ &\Delta\Delta w+\lambda^4 w = p(x, y) \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(11)$$

コンクリート平版に之等の式を適用するときには、コンクリートの v の値は殆んど零と見ても差支へないから（5）式は次の如く簡單なる式となる。

$$\left.\begin{aligned} M_x &= -N\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ M_y &= -N\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ M_{xy} &= -N\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \\ N &= \frac{Eh^3}{12} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(12)$$

(11) 式に於て平版下部の反力がないときは $q = 0$ なるを以て次の如くなる。

$$\left.\begin{array}{ll} & \Delta\Delta w = p(x, y) \\ 即ち & \dfrac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\dfrac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \dfrac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y) \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(13)$$

(13) 式は四邊にて支持されたる平版の一般の方程式である。この (13) 式の解法は相當多くの人々に依つて求められてゐる。有位の參考書として次のものが擧げらるゝ。Love の Theory of elasticity. Nadai の Elastishe Platten. Marcus の Die Theorie elastischer Gewebe und ihre Anwendung auf die Berechnung biegsamer Platten. と Föppl の Drnag und Zwang などが皆立派な本であるし日本でも普通の平板の問題は近頃多く取扱はれる傾向になつて來る。就中山口博士の溫度の變化に依る平板の問題、稻田博士の靜水壓力を受くる平板の解法、井口博士の短形板の一般解法などは錚々たるものであるが彈床上の平板の解決は餘り見當らない。たゞ彈床上の圓板の等齋荷重の場合の解法として Ferd. Schleicher 著 Kreisplatten auf elastischer Unterlage. 1926. の本を見る丈である。これは圓板であるのでベツセル函數を用いて解いてある。

かくの如く彈床上の平板の一般解法としては少ないのであるがこれも矢張り普通の平板と同様に色々の解法がある筈である。(未完)

(追記) 二月號に石川某氏の御尋ねがあるが拙稿が完結してから御答したいと思つてゐる。