

## コンクリート舗装版の解法 (三)

原口 忠次郎

### 3. 等布荷重を有する桁

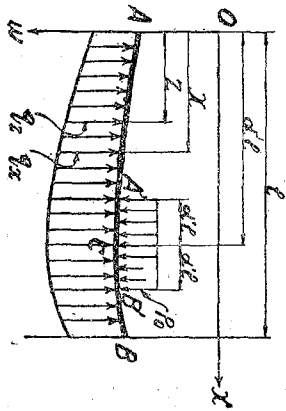
桁の或る部分に等布荷重を有する時の解法は少し面倒となつて来るので近似解法を先きにし一般解法を後廻しとする。

#### (A) 近似解法

第七圖の桁  $AB$  上の  $A'B'$  間に  $p$ 。なる等布荷重が載荷されたるとき其反力  $q_x$  が (1) 式を満足するものとして、その  $w_x$  が拋物線を取るものとすれば拋物線の一般式は次式を以て示さるゝ。

$$w_x = a + bx + gx^2 \dots\dots\dots (37)$$

第七圖に於て桁  $AB$  を二部分  $AO$  と  $OB$  間に區分して考へる。



第七圖

(1) 桁 AC 間

點  $x$  の彎曲力率  $M_x$  は (27) 式を見出したのと同じ方法によりて、

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_0^x q_x(x-z) dz \\
 &= \int_0^x w_x(x-z) dz \\
 &= \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{6} bx^3 + \frac{1}{12} gx^4 \dots\dots\dots (38)
 \end{aligned}$$

(2) 式より  $EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_x$  であるから、

$$EI \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{1}{2} ax^2 - \frac{1}{6} bx^3 - \frac{1}{12} gx^4 \dots\dots\dots (39)$$

(39) 式を二度積分すると次の二式が得らるゝ。

$$EI \frac{dw}{dx} = A_1 - \frac{1}{6} ax^3 - \frac{1}{24} bx^4 - \frac{1}{60} gx^5 \dots\dots\dots (40)$$

$$EI w = A_2 + A_3 x - \frac{1}{24} ax^4 - \frac{1}{120} bx^5 - \frac{1}{360} gx^6 \dots\dots\dots (41)$$

(2) 桁 CB 間

桁  $CB$  間の  $x$  点にて彎曲力率  $M_x$  は (38) 式と、荷重よりの彎曲力率の和であるから

$$M_x = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{6}bx^3 + \frac{1}{12}gx^4 - 2\alpha'lp_0(x-\alpha l)$$

これを (40), (41) 式を求めたのと同様に二度積分すると、

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{2}ax^2 - \frac{1}{6}bx^3 - \frac{1}{12}gx^4 + 2\alpha'lp_0x - 2\alpha l^2 p_0 \alpha$$

$$EI \frac{dw}{dx} = B_1 - 2\alpha'lp_0 \alpha x + \alpha'lp_0 \alpha x^2 - \frac{1}{6}ax^3 - \frac{1}{24}bx^4 - \frac{1}{60}gx^5 \dots\dots\dots(42)$$

$$EI w = B_2 + B_3 x - \alpha' \alpha l^2 p_0 x^2 + \frac{1}{3} \alpha' lp_0 \alpha x^3 - \frac{1}{24} ax^4 - \frac{1}{120} bx^5 - \frac{1}{360} gx^6 \dots\dots\dots(43)$$

(40), (41), (42), 及び (43) 式は  $A_1, A_2, B_1$  及び  $B_2$  の任意常数を有するから、これらを定めるために点  $A$  及び点  $B$  の沈下  $w$  を求める。

[41式]  $_{x=0} =$  点  $A$  の沈下  $= w_a$

[43式]  $_{x=l} =$  点  $B$  の沈下  $= w_b$

即ち  $EI w_a = A_2 \dots\dots\dots(44)$

$$EI w_b = B_2 + B_3 l - \alpha' \alpha l^2 p_0 l^2 + \frac{1}{3} \alpha' lp_0 \alpha l^3 - \frac{1}{24} al^4 - \frac{1}{120} bl^5 - \frac{1}{360} gl^6 \dots\dots\dots(45)$$

拋物線  $AB$  と  $CB$  は互に連続であるから次の二つの条件式が求められる。即ち點  $C$  に於ては其傾斜角と沈下とは拵  
 $AC$  又は  $CB$  何れの式より見出すも、夫等は常に等しくなければならぬ。

$$[40式]_{x=al} = [42式]_{x=al}$$

$$[41式]_{x=al} = [43式]_{x=al}$$

依つて次式が生れる。

$$A_1 = B_1 - \alpha^2 \alpha^2 l^3 p_0 \dots\dots\dots (46)$$

$$A_2 + A_1 \alpha l = B_2 + B_1 \alpha l - \frac{2}{3} \alpha^2 \alpha^3 l^4 p_0 \dots\dots\dots (47)$$

(44), (45), (46) 及び (47) 式間にて  $A_1$  及び  $A_2$  を追いつ出すと、

$$B_2 = EI w_0 - \frac{1}{3} \alpha^2 \alpha^3 l^4 p_0$$

$$B_1 = EI \frac{w_0 - w_a}{l} + \frac{2\alpha^2 l p_0}{6} (3\alpha l^2 + \alpha^2 l^2 - l^2) + \frac{1}{24} \alpha l^3 + \frac{1}{120} b l^4 + \frac{1}{360} g l^5$$

今 (43) 式に  $x = \frac{l}{2}$  と置けば  $AB$  桁の中央點の沈下式が得らるゝ。それに上に得た  $B_2, B_1$  の値を入れ、そし  
 て  $w_a$  を中央點の沈下量とすると、

$$EI w_a = EI \frac{w_a + w_0}{2} - \frac{2\alpha^2 l p_0}{48} (4\alpha^3 + 3 - 6\alpha) l^3 + \frac{7}{384} \alpha l^4 + \frac{1}{256} b l^5 + \frac{31}{23,040} g l^6 \dots\dots\dots (48)$$

而して (37) 式にて  $w = 0$  と置けば  $a$  となるが、それは  $w_a$  であるので次の關係式が成り立つ。

$$w_a = a$$

又 (37) 式にて  $w = l$  と置くと  $w_b$  であるので次式が求められる。

$$w_b = a + bl + gl^2$$

同様に

$$w_m = a + \frac{bl}{2} + \frac{gl^2}{4}$$

依つて是等の式より

$$w_m - \frac{w_a + w_b}{2} = -\frac{gl^2}{4} \dots\dots\dots (49)$$

(48), (49) 式を組合せて

$$-\frac{gl^2 EI}{4} = \frac{7}{384} al^4 + \frac{1}{256} bl^3 + \frac{31}{23,040} gl^6 - \frac{2\alpha l p_0}{48} (4a^3 + 3 - 6a) l^3 \dots\dots\dots (50)$$

(50) 式は  $a, b, g$  が未知であつて、其他は全部既知数である。即ち  $a, b$  及び  $g$  の關係式である。三つの未知数の式であるので  $a, b, g$  を含む尚二つの關係式が必要である。それには  $\sum Y = 0$  即ち垂直力の總和は零である事と、點  $A$  又は  $B$  にての彎曲力率は零である條件を使へばよい。即ち

$$2\alpha l p_0 = \int_0^l q_x dx$$

$$2\alpha' p_0 \alpha l = \int_0^l q_x \cdot x \cdot dx$$

$$\int_0^l q_x dx = c \int_0^l w_x dx = c \left[ al + \frac{b l^2}{2} + \frac{q l^3}{3} \right]$$

$$\int_0^l q_x \cdot x dx = c \int_0^l w_x \cdot x dx = c \left[ \frac{1}{2} a l^2 + \frac{1}{3} b l^3 + \frac{1}{4} q l^4 \right]$$

従つて

$$2\alpha' p_0 = c \left( al + \frac{b l^2}{2} + \frac{q l^3}{3} \right) \dots\dots\dots (51)$$

$$2\alpha' p_0 \alpha l = c \left( \frac{1}{2} a l^2 + \frac{1}{3} b l^3 + \frac{1}{4} q l^4 \right) \dots\dots\dots (52)$$

(50), (51) 及び (52) 式より  $a, b, g$  の値を見出せば

$$\left. \begin{aligned} a &= 4\alpha' p_0 \frac{5,760EI(2-3\alpha) + \alpha l^4(87\alpha - 73 + 40\alpha(4\alpha^2 + 3 - 6\alpha))}{\alpha(11\alpha^4 + 5,760EI)} \\ b &= 12\alpha' p_0 \frac{5,760EI(2\alpha - 1)\alpha + \alpha l^4(179 - 218\alpha - 80\alpha(4\alpha^2 + 3 - 6\alpha))}{\alpha(11\alpha^4 + 5,760EI)} \\ g &= -\frac{40l^2 \alpha' p_0 (57 - 72\alpha - 24\alpha(4\alpha^2 + 3 - 6\alpha))}{11\alpha l^4 + 5,760EI} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (53)$$

$a, b, g$  の値を (37) 式に代入すると求むる沈下の式が得られるのであるが、(53) 式にて見る如く  $\alpha$  の値に依つては

$a, b, g$  の何れか 1 負號を取り、従つて  $w_x$  が負となることゝなるがこれは桁が地盤より上る部分であることを示すものである。

若し第七圖の點  $o$  に集中荷重があるときは (53) 式の  $\alpha p_0$  を  $\frac{P}{2l}$  で置き換へれば求むる  $a, b, g$  が求むらるゝ。尚この近似解法に就いて詳細に調べたい方は “Beitrag zur Ermittlung von Fundamentdrückungen Näherungsberechnung des durch Einzellasten beanspruchten Trägers auf steifer, nachgiebiger Unterlage” von Dr.-Ing. Wilhelm Schmidmann を見られることをお奨めしたい。1920 年に獨逸の Stuttgart の Konrad Wittwer 書店から發行されたものである。

### (B) 一般解法

第七圖の如き荷重を有する桁の一般解法は  $AB$  の桁の内、荷重を有せぬ部分即ち  $AA'$  桁と、荷重を有する部分即ち  $A'B'$  部分との微分方程式を別々に作つて、 $AA'$  桁の  $w_1$  の式の任意常數 4 個と、 $A'B'$  桁の  $w_2$  の式の任意常數 4 個とを、都合 8 個の條件式より決定する方法もあるが著者は版の方程式の解法にフーリエ級數を導入したので、桁の解法にもフーリエの級數を導入して解くことゝする。

彈床上の桁の一般方程式は (7) 式に示したものである。

$$\text{即ち} \quad EI \frac{d^4 w}{dx^4} + cw = d(ax)$$

この (7) 式の解を  $w$  とすると、それは (7) 式の右邊を零としたものゝ一般解  $w_1$  と、(7) 式の特解  $w_0$  との和である。

$$w = w_1 + w_0$$

$w_1$  は (15) 式に求めたものである。

$$w_1 = (Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}) \cos \mu x + (Ce^{\mu x} + De^{-\mu x}) \sin \mu x$$

今 (7) 式の右邊の荷重  $p(x)$  をフーリエ級数に展開する。

$$p(x) = \frac{1}{l} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} A_n \cos \frac{n\pi}{l} x$$

$$A_0 = \int_0^l p(x') dx' \quad \dots \dots \dots (56)$$

$$A_n = \int_0^l p(x') \cos \frac{n\pi}{l} x' dx'$$

$$p(x) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad \dots \dots \dots (57)$$

$$B_n = \int_0^l p(x') \sin \frac{n\pi}{l} x' dx'$$

(56) 式は餘弦函数のフーリエ展開式で偶函数に用ひられ (57) 式は正弦級数で奇函数に主として用ひらるゝ。今の場合には  $x = 0$  のとき荷重は零であるから (57) 式にて展開することゝする。

$$B_n = \int_0^l p(x') \sin \frac{n\pi}{l} x' dx'$$



荷重の状態は

$$p(x') = 0 \quad 0 < x < (\alpha - \alpha')l$$

$$p(x) = p_0 \quad (\alpha - \alpha')l < x < (\alpha + \alpha')l$$

$$p(x) = 0 \quad (\alpha + \alpha')l < x < l$$

依つて

$$B_n = \frac{-p_0 l}{n\pi} \left[ \cos \frac{n\pi}{l} x \right]_{(\alpha - \alpha')l}^{(\alpha + \alpha')l}$$

$$= \frac{-p_0 l}{n\pi} \left\{ \cos n\pi(\alpha + \alpha') - \cos n\pi(\alpha - \alpha') \right\}$$

$$= \frac{2p_0 l}{n\pi} \sin n\pi\alpha \cdot \sin n\pi\alpha'$$

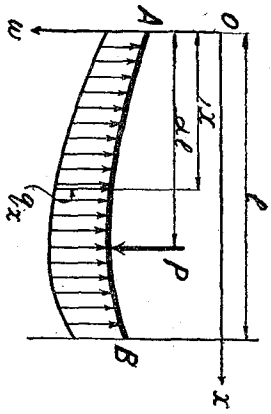
故に

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4p_0}{n\pi} \sin n\pi\alpha \cdot \sin n\pi\alpha' \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \dots \dots \dots (57)_1$$

即ち  $p(x)$  を正弦級数に展開したのである。かくの如くフーリエの級数に如何なる状態の荷重であつても展開し得ることとは、この級数の特長とする所である。今二三の荷重を展開して見る。

第八圖の如く集中荷重の場合には (57)<sub>1</sub> 式にて  $P = 2\alpha'lp_0$  と置くと

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P}{n\pi\alpha'l} \sin n\pi\alpha \cdot \sin n\pi\alpha' \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x$$



第八圖

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P}{l} \sin n\pi\alpha \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \dots \dots \dots (58)$$

$$\therefore \lim_{\alpha' \rightarrow 0} \frac{\sin n\pi\alpha'}{n\pi\alpha'} = 1$$

第九圖は AB 桁上に  $p_0$  なる等布荷重が對稱的に加へられたるとき A 點を原點として正弦級數に展開する。

$$p(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq (\alpha - \alpha')l$$

$$= p_0 \quad (\alpha - \alpha')l \leq x \leq (\alpha + \alpha')l$$

$$= 0 \quad (\alpha + \alpha')l \leq x \leq l - (\alpha + \alpha')l$$

$$= p_0 \quad l - (\alpha + \alpha')l \leq x \leq l - (\alpha - \alpha')l$$

$$= 0 \quad l - (\alpha - \alpha')l \leq x \leq l$$

$$p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{l} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\frac{2}{l} B_n = \frac{2}{l} \int_{(\alpha - \alpha')l}^{(\alpha + \alpha')l} p_0 \sin \frac{n\pi}{l} x dx + \frac{2}{l} \int_{l - (\alpha + \alpha')l}^{l - (\alpha - \alpha')l} p_0 \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$= (1 - \cos n\pi) \frac{4p_0}{n\pi} \sin n\pi\alpha \cdot \sin n\pi\alpha'$$

第九圖

$$= \frac{8p_0}{n\pi} \sin n\pi\alpha \cdot \sin n\pi\alpha' \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\therefore p(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{8p_0}{n\pi} \sin n\pi\alpha \cdot \sin n\pi\alpha' \cdot \sin \frac{n\pi}{l}x \dots\dots\dots(59)$$

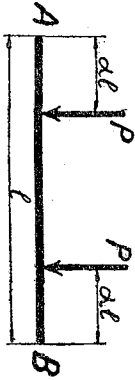
第10圖の如く集中荷重  $P$  が對稱にあるときは

$$2\alpha l p_0 = P$$

を上式に代入して、

$$p(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4P}{l} \sin n\pi\alpha \cdot \sin \frac{n\pi}{l}x \dots\dots\dots(60)$$

第 十 圖

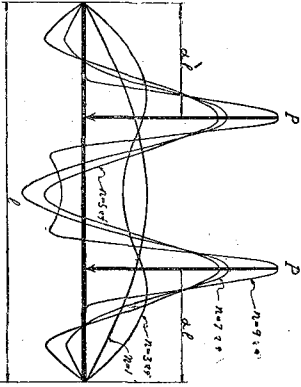


第11圖は(60)式の  $n = 9$  迄取つたときの曲線を示したもので、 $n$ を相等數多く取ると集中荷重も能く展開し得ることを示したものである。第12圖の場合即ち等布荷重  $p_0$  が  $AB$  桁の兩端  $\alpha l$  間に加へられたるときは  $\alpha = 0$  のとき荷重は零でないから之れを餘弦級數に展開することとする。

$$p(x) = p_0 \quad 0 \leq x \leq \alpha l$$

$$= 0 \quad \alpha l \leq x \leq l - \alpha l$$

$$= p_0 \quad l - \alpha l \leq x \leq l$$



第 十 一 圖

(56) 式の  $A_0$  及び  $A_n$  を次の如く定める。

$$A_0 = \frac{1}{l} \int_0^{a'l} p_0 dx + \frac{1}{l} \int_{l-a'l}^l p_0 dx$$

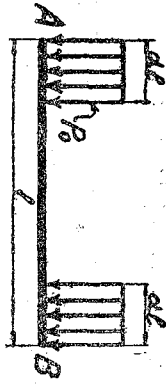
$$= 2p_0 \alpha$$

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^{a'l} p_0 \cos \frac{n\pi}{l} x dx + \frac{2}{l} \int_{l-a'l}^l p_0 \cos \frac{n\pi}{l} x dx$$

$$= \frac{2p_0}{n\pi} \sin n\pi\alpha (1 + \cos n\pi)$$

$$= \frac{4p_0}{n\pi} \sin n\pi \quad n = 2, 4, 6, \dots$$

第十二圖



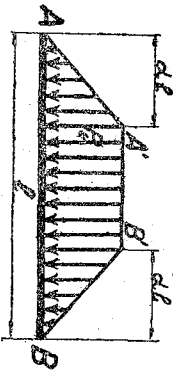
$$\therefore p(x) = 2p_0 \alpha + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{4p_0}{n\pi} \sin n\pi\alpha \cdot \cos \frac{n\pi}{l} x \quad \dots \dots \dots (61)$$

第13圖は  $A'B'$  間は  $p_0$  なる等布荷重ありて  $A'A$  及び  $B'B$  は直線的變化して點  $A$  及び  $B$  にては零となるときこれをフーリエ級数の正弦函数に展開する。堤防の如き場合である。

點  $A$  を原点とする  $AA'$ ,  $A'B'$  及び  $B'D$  の直線方程式は

$$AA', \quad p(x) = \frac{p_0}{\alpha l} x$$

$$A'B', \quad p_x = p_0$$



第十三圖

$$B_n, \quad p_n = \frac{p_0}{a_l} (l-x)$$

(57) 式の  $B_n$  は

$$\begin{aligned} B_n &= \int_0^{a_l} \frac{p_0}{a_l} x \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx + \int_{a_l}^{l-a_l} p_0 \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx + \int_{l-a_l}^l \frac{p_0}{a_l} (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx \\ &= \frac{2p_0 l}{a_n^2 \pi^2} \sin n\pi\alpha \end{aligned}$$

$$\therefore y(x) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4p_0}{a_n^2 \pi^2} \sin n\pi\alpha \sin \frac{n\pi}{l} x \dots\dots\dots (62)$$

以上 (57), 式より (62) 式に到る  $p_n$  はいづれも収斂が遅いものであるが  $w_n$  をフーリエ級数で表はし  $p_n$  と組合せるとそれは非常に収斂早い級数となるのである。

今 (7) 式の特解を  $w_0$  としこれをフーリエ級数で表はすと次の形を取る。

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \dots\dots\dots (63)$$

$B_n$  を決定するために (7) 式に (57), 式と (63) 式とを挿入する。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 B_n \sin \frac{n\pi}{l} x + \lambda^4 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$\lambda^4 = \frac{O}{EI}, \quad N = EI$$

依つて  $B_n$  の値は  $B_n$  の關係より求められる。

$$B_n = \frac{4p_0}{Nn\pi \left\{ \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 + \lambda^4 \right\}} \sin \alpha r a \cdot \sin n\pi a'$$

故に特解  $w_0$  は

$$w_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4p_0}{Nn\pi \left\{ \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 + \lambda^4 \right\}} \sin n\pi \alpha \cdot \sin n\pi \alpha' \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x$$

(7) 式の解  $w$  は

$$w = w_1 + w_0$$

$$= (Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}) \cos \mu x + (Ce^{\mu x} + De^{-\mu x}) \sin \mu x$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4p_0}{Nn\pi \left\{ \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 + \lambda^4 \right\}} \sin n\pi \cdot \sin n\pi \alpha' \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x \dots \dots \dots (64)$$

(64) 式は  $A, B, C$  及び  $D$  の四個の任意常數を含むために四個の條件が必要である。 $A, B$  桁は點  $A$  及び  $B$  に彎曲力率と剪力の條件が各々二つ都合四つの周端條件を持つて居るのであるからこの條件を用ゆればよい。

條件 1	$(M_x)_{x=0} = 0$	} ..... (65)
" 2	$(Q_x)_{x=0} = 0$	
" 3	$(M_x)_{x=l} = 0$	
" 4	$(Q_x)_{x=l} = 0$	

$M_x$  と  $Q_x$  を作るために (64) 式の微係數を作る。

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dx^2} &= \mu(Ae^{\mu x} - Be^{-\mu x}) \cos \mu x - \mu(Ae^{\mu x} B e^{-\mu x}) \sin \mu x \\ &\quad + \mu(Ce^{\mu x} - De^{-\mu x}) \sin \mu x + \mu(Ce^{\mu x} + De^{-\mu x}) \cos \mu x + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \frac{n\pi}{e} \cos \frac{n\pi}{l} x \\ \frac{d^2 w}{dx^2} &= 2\mu^2(-Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}) \sin \mu x + 2\mu^2(Ce^{\mu x} - De^{-\mu x}) \cos \mu x + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \left(-\frac{n^2 \pi^2}{l^2}\right) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \frac{d^3 w}{dx^3} &= 2\mu^3\{- (A+C)e^{\mu x} - (B-D)e^{-\mu x}\} \sin \mu x + 2\mu^3\{- (A-C)e^{\mu x} + (B+D)e^{-\mu x}\} \cos \mu x \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \left(-\frac{n^3 \pi^3}{l^3}\right) \cos \frac{n\pi}{l} x \end{aligned}$$

點 A の條件より

$$(M_x)_{x=0} = -N \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=0}$$

$$= C - D = 0 \quad \therefore C = D \dots\dots\dots (66)$$

$$(Q_n)_{x=0} = -N \left( \frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=0}$$

$$= -\frac{\pi^3}{l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 B'_n \times 2\mu^3 \left\{ C - A + B + D \right\}$$

$$\therefore 2\mu^3 (-A + C + B + D) = \frac{\pi^3}{l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 B'_n \dots\dots\dots (67)$$

又 (65) 式の 3, 4 の条件より

$$(M_n)_{x=l} = -N \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=l}$$

$$= -Ae^{\mu l} \sin \mu l + Be^{-\mu l} \sin \mu l + Ce^{\mu l} \cos \mu l - D e^{-\mu l} \cos \mu l = 0 \dots\dots\dots (68)$$

$$(Q_n)_{x=l} = -N \left( \frac{d^3 w}{dx^3} \right)_{x=l}$$

$$= -Ae^{\mu l} (\cos \mu l + \sin \mu l) + Be^{-\mu l} (\cos \mu l - \sin \mu l) + De^{-\mu l} (\cos \mu l + \sin \mu l)$$

$$= -\frac{\pi^3}{2\mu^3 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3 B'_n \dots\dots\dots (69)$$

(66), (67), (68) 及び (69) 式より次の三式が得らるゝ。

$$-A + B + 2C = \frac{\pi^3}{2\mu^3 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 B'_n \dots\dots\dots (70)$$



$$-Ae^{\mu l} \sin \mu l + Be^{-\mu l} \sin \mu l + C(e^{\mu l} - e^{-\mu l}) \cos \mu l = 0 \dots\dots\dots (71)$$

$$-Ae^{\mu l} (\cos \mu l + \sin \mu l) + Be^{-\mu l} (\cos \mu l - \sin \mu l) + C \{ (e^{\mu l} + e^{-\mu l}) \cos \mu l - (e^{\mu l} - e^{-\mu l}) \sin \mu l \}$$

$$= \frac{\pi^3}{2\mu^3 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3 B_n \dots\dots\dots (72)$$

$$\text{今 } A = \frac{D_1}{D}, B = \frac{D_2}{D}, C = \frac{D_3}{D} \quad \text{とす}$$

$$D = \begin{vmatrix} -1, & +1, & +2, \\ -e^{\mu l} \sin \mu l, & +e^{-\mu l} \sin \mu l, & +2 \sinh \mu l \cdot \cos \mu l, \\ -e^{\mu l} (\cos \mu l + \sin \mu l), & +e^{-\mu l} (\cos \mu l - \sin \mu l), & +2 (\cosh \mu l \cdot \cos \mu l - \sinh \mu l \cdot \sin \mu l) \end{vmatrix}$$

$$D = 2 (\sinh \mu l \cdot \cos \mu l + \cosh \mu l \cdot \sin \mu l) \{ (\cosh \mu l - \sinh \mu l) \sin \mu l - 2 \sinh \mu l \cdot \cos \mu l \}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} \beta, & +1, & +2 \\ 0, & +e^{-\mu l} \sin \mu l, & +2 \sinh \mu l \cdot \cos \mu l, \\ 8, & +e^{-\mu l} (\cos \mu l - \sin \mu l), & +2 (\cosh \mu l \cdot \cos \mu l - 2 \sinh \mu l \cdot \sin \mu l), \end{vmatrix}$$

$$\text{但し } \beta = \frac{\pi^3}{2\mu^3 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 B_n$$

$$\delta = \frac{\pi^3}{2\mu^3 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3 B_n$$

$$\Delta_1 = \frac{\pi^3}{\mu^3 \nu^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 B'_n \left[ (\cosh \mu l - \sinh \mu l) \left\{ \cosh \mu l \cdot \cos \mu l (\sin \mu l - \cos \mu l) - \sinh \mu l \cdot \sin^2 \mu l \right\} + (-1)^n \left\{ -\cosh \mu l \cdot \sin \mu l + \sinh \mu l (\cos \mu l + \sin \mu l) \right\} \right]$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -1, & \beta, & +2, \\ -e^{\mu l} \sin \mu l, & 0, & +2 \sinh \mu l \cdot \cos \mu l, \\ -e^{\mu l} (\cos \mu l + \sin \mu l), & \delta, & +2 (\cosh \mu l \cdot \cos \mu l - \sinh \mu l \cdot \sin \mu l), \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \frac{\pi^3}{\mu^3 \nu^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 B'_n \left[ (\cosh \mu l - \sinh \mu l) \left\{ \cosh \mu l \cdot \cos \mu l \cdot \sin \mu l - \sinh \mu l (1 + \sin \mu l \cdot \cos \mu l) \right\} + (-1)^n \left\{ \cosh \mu l (\cos \mu l - \sin \mu l) - \sinh \mu l \cdot \sin \mu l \right\} \right]$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -1, & +1, & \beta, \\ -e^{-\mu l} \sin \mu l, & +e^{-\mu l} \sin \mu l, & 0, \\ -e^{\mu l} (\cos \mu l + \sin \mu l), & +e^{-\mu l} (\cos \mu l - \sin \mu l), & \delta, \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = \frac{\pi^3}{\mu^3 \nu^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 B'_n \left\{ \sin^2 \mu l + (-1)^n \sinh \mu l \cdot \sin \mu l \right\}$$

$$\therefore A = \frac{\pi^3}{\mu^3 \nu^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 B'_n \left[ (\cosh \mu l - \sinh \mu l) \left\{ 2 (\sinh \mu l \cdot \cos \mu l + \cosh \mu l \cdot \sin \mu l) \right\} + (-1)^n \left\{ \cosh \mu l - \sinh \mu l \right\} \right]$$

$$\times \left\{ \cosh \mu l \cdot \cos \mu l (2 \sin \mu l - \cos \mu l) - \sinh \mu l \cdot \sin^2 \mu l \right\} - (-1)^n \left\{ -\cosh \mu l \cdot \sin \mu l + \sin \mu l (\cos \mu l + \sin \mu l) \right\}$$

$$B = \frac{\pi^3}{\mu^3 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 B'_n \left[ \cosh \mu l - \sinh \mu l \sin \mu l - 2 \sinh \mu l \cdot \cos \mu l \right] \quad \text{.....(70)}$$

$$\times \left\{ \cosh \mu l \cdot \cos \mu l \cdot \sin \mu l - \sinh \mu l (1 + \sin \mu l \cdot \cos \mu l) \right\} + (-1)^n \left\{ \cosh \mu l (\cos \mu l - \sin \mu l) - \sinh \mu l \cdot \sin \mu l \right\}$$

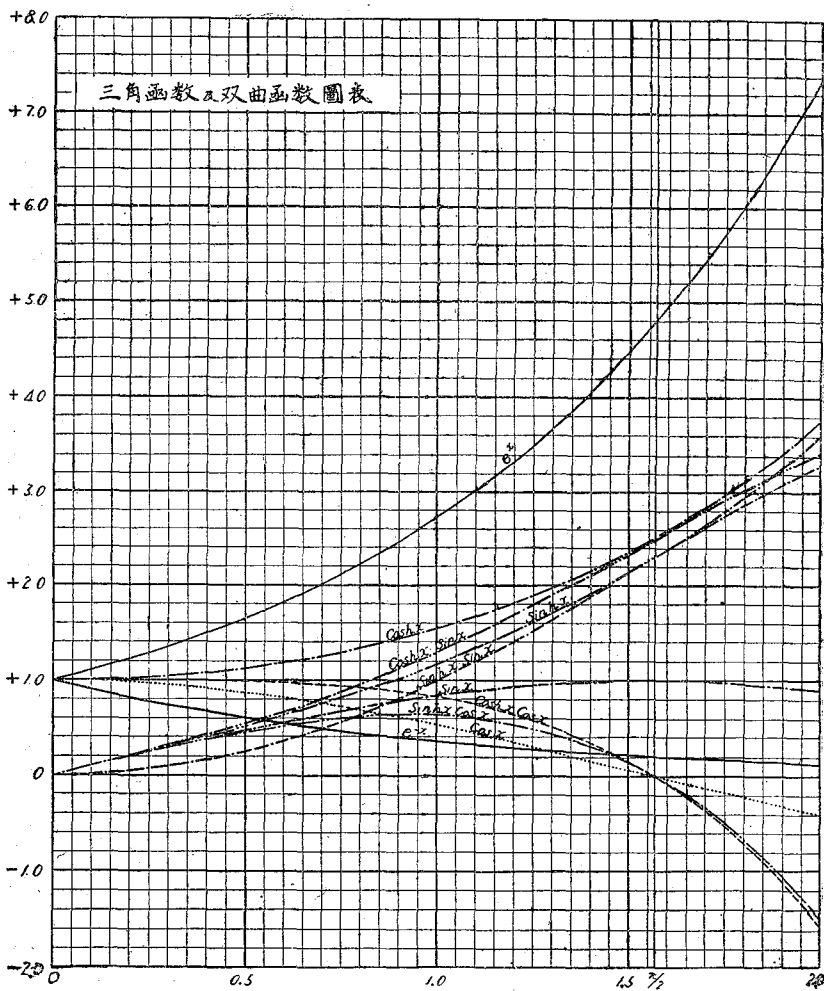
$$C = \frac{\pi^3}{\mu^3 l^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 B''_n \left\{ \sin^2 \mu l + (-1)^n \sinh \mu l \cdot \sin \mu l \right\} \left\{ \cosh \mu l - \sinh \mu l \sin \mu l - 2 \sinh \mu l \cdot \cos \mu l \right\}$$

但し  $B'_n$  は

$$B'_n = \frac{4p_0}{N n \pi} \left\{ \left( \frac{n \pi}{l} \right)^4 + \lambda^4 \right\} \sin n \pi \alpha \cdot \sin n \pi \alpha'$$

従つて沈下の方程式は (64) 式と (70) 式とを組合せて求めらるゝ。

$$u_x = (Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x}) \cos \mu x + 2C \cosh \mu x \cdot \sin \mu x + \sum_{n=1}^{\infty} B'_n \sin \frac{n \pi}{l} x \dots \dots \dots \text{.....(71)}$$



(71) 式は等布荷重に對する一般解である。集中荷重の場合には  $p(x)$  が (58) 式で示さるゝ如く  $B_n$  は次の如くなる。

$$B_n + \frac{2P}{eN \left\{ \left( \frac{n\pi}{l} \right)^4 + \lambda^4 \right\}} \sin \mu n a \dots\dots\dots (72)$$

即ち (71) 式及び (70) 式の  $A, B, C$  の値の中の  $B_n$  は (72) 式を用ゆべきである。其他の荷重の場合はたゞ  $B_n$  を變ゆればよい。

(71) 式は式中の  $B_n$  の値を一見してとすゞ了解さるゝ如くこれは非常に早く收斂するので實際の場合には  $n$  を三項も取れば充分である。この解法の特長とする處は荷重の状態がどんなに複雑であつても少しもそれがために特に面倒とならぬことである。

本式も荷重の位置と地盤の強さと桁の剛度とに依つて  $w_n$  が負號を示すことゝなるが、近似解法の場合と異なりこれは微分方程式 (7) の解であるので、桁が地盤より持ち上る部分では既に (7) 式が成り立たなくなり従つて (71) 式も勿論あて嵌らなくなる事は注意すべきことである。沈下零の點迄は本式は適用出来るものである。

(71) 式の缺點とする處は計算が面倒である事だがこれは表でもあれば案外手數が省ける事と思つてゐる。著者は假を見付けてはこれの數表中であるが中々涉らぬ。然し遠からず發表の機會があると思つて居る。前の圖表は三角函數及雙曲函數又は是等の各々の積がどんな曲線を取るかを示したものである。(未完)