

# コンクリート鋪裝版の解法 (一)

原 口 忠 次 郎

## 1. 緒 言

コンクリート鋪裝版は彈床上の版である。彈床とは一口に云へば荷重をかけた地盤が荷重を除去すると舊態に復するものを云ふのであるが、實際にはそんな地盤は實在しない。然し荷重をかけても其變形量が小さい地盤は彈床に近いものとして取扱ふことが出来る。然しこの解法のみにて萬全とは言へない。コンクリート版の下部の土砂が洗掘されたり、沈下が不平等であつたりすると既に此の理論は成立しなくなる。鋪裝は横目地や縦目地を 5 米乃至 10 米間隔に入れるからこの廣い面積の地盤が皆平等であるとは考へられない。勿論不平等沈下を起すものであるが、それを各點に異なる反力を取入れて計算することは恐ろしく面倒なことゝなつて来るのである。鋪裝の厚さの研究が彈床上の版として發表されたものが餘り見當らないのは不思議のことゝ思つてゐる。米國のウエスターガードの研究は新しきものであらう。著者は鋪裝を彈床上の版及び桁として調査中であつて未だ完全のものとは思つて居ないがその二三の計算法を發表することゝする。地盤の反力は一般彈床の式を用ゆる事とする。

$$q_x = c W_x \dots\dots\dots (1)$$

$R_x = x$  點の地盤の反力 ( $\text{kg/cm}^2$ )

$c =$  地盤の彈性係數 ( $\text{kg/cm}^3$ )

$w_x = x$  點の地盤の沈下 ( $\text{cm}$ )

地盤に荷重を加へた時その荷重強度とその地盤の變形量(沈下量)との比が $c$ であるが、この $c$ なるものが甚だ面倒なものである。昔は地盤の強度に就いては進歩した調査がなかつたので従つて $c$ なる値に就いても簡単に考へてゐたが、最近は何國の學者の地盤の支持力に就いての研究調査が進んで來たのでその支持力なるものが甚だ不確實となつて來たやうである。同じ地盤でも調査の方法が異なると $c$ の値が違つて來る。即ち $c$ は土質の種類及び其状態に依つて變化するもので又同一土質でも例へ外界の状態が同じでも截荷面積の大小及び表面壓力強度の相異に依つてもその値は決して同一でない。従つて各土質の $c$ は一々表はす事は面倒であつて六ヶ敷い土木の問題の内での最も困難なもの一つであらう。

コンクリート鋪裝の問題は種々の事柄が解決されない限り六ヶ敷いものであるが、これを彈床上の版として荷重に對する應力を調査することも一つの解決案たるを失はない。著者はコンクリート鋪裝には三つの應力調査が必要と思つてゐる。第一に彈床上の桁及び版としての靜荷重よりの應力、第二には溫度の變化に依るコンクリートの伸縮に依つて誘起される應力、第三には動荷重より起る震動のため起る應力、而かもこの第三の震動の問題は二つに考へられる、一つはコンクリート版自身の震動と、その震動が地盤に傳はつて地盤の震動を起し、その震動が大きくなる地盤と小さくなる地盤によつて鋪裝の強度に大影響のあることは疑ふ餘地のない事柄であるが、この震動の問題たるや非常に六ヶ敷い問題である、土木工學にて發達すべき事柄は今後はこの震動の問題であらねばならぬ、岸壁が波浪のため破壊されるときは勿論震動があり、

橋梁が墜落する瞬間には震動があり、凡ての構造物が破壊さるゝ時は震動が伴ふものであると云つても過言ではないと思ふ。即ちコンクリート舗装の問題も同様に震動を無視しては根據が薄弱となるのである。これ著者が一般道路技術者の注意を喚起して止まぬ所である。

コンクリート舗装は靜荷重に對し一般に版として働く。即ち舗装が未だクラックが這入らない以前に於ては版として働くけれども一度クラックが這入ると最早やもとの版としての効力を失い最後に桁として働くこととなる。桁として働く場合にもそのクラックが垂直に這入るか斜に這入るかに依つて桁としての長さの取扱ひに相違がある。即ちクラックによつて A 及び B の桁に分たれて A より B に重なり合つたクラックならば A に荷重がかゝると反力は B 桁の下にも起るから桁の長さは A 部分のみでなく AB 間に銜結された如き状態となるが B 部分に荷重がかゝれば A には何等反響なしに B 部分のみもの桁として作用することとなる。かくコンクリート舗装は版としても桁としても其の長さの關係に種々な相互的複雜性があるが茲には先づ彈床上の桁として一般的のものや近似解法等より漸次版としての理論的解法を述べて見る事とする。

彈床上の桁の一般的解法に付いては林桂一博士の 300 頁に亘る大書 “Theorie des Trägers auf elastischer Unterlage” が既に 1921 年に獨逸にて出版せられてゐる。著者は桁の解法にも版の解法にも微分方程式の直接解法とフーリエ級數を用いた間接解法とを組合せて解いて見たものを順次書いて行くこととする。

## 2. 桁の中央に單一荷重を有する時

(A) 一般解法

第一圖に於て AB を彈床上の桁とする。P なる荷重が中央點 O にかゝるとき地盤の反力  $q_x$  は (1) 式にて示さるゝこととする。

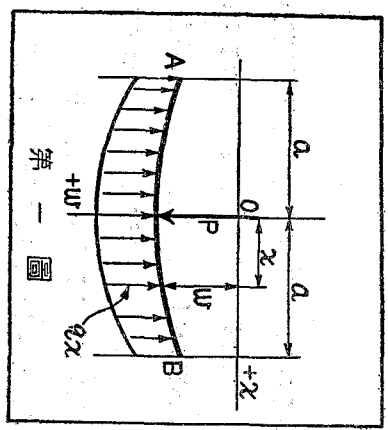
一般に桁の彈性曲線式は次式にて示される。

$$M_x = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \dots\dots\dots (2)$$

$M_x$  = x 點の彎曲力率

E = 桁の彈性率

I = 桁の斷面の慣性率



(2) 式を二度微分すると

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = -EI \frac{d^4 w}{dx^4} \dots\dots\dots (3)$$

桁の x 點の剪力  $Q_x$  と  $M_x$  との間には次の關係がある。

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} = \frac{dQ_x}{dx} \dots\dots\dots (4)$$

又  $Q_0$  を  $x = 0$  即ち原點の剪力とすると x 點の剪力は

$$Q_x = Q_0 - \sum_0^x [P] + \int_0^x (q_x - P_x) dx \quad \text{桁の幅は } l \text{ とす。}$$

$$\therefore \frac{dQ_x}{dx} = q_x - P_x \dots\dots\dots(5)$$

$P_x = x$  點の荷重強度

(3), (4), (5) 式より

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + cw - P_x = 0 \dots\dots\dots(6)$$

今  $P_x$  を  $f(x)$  にて表はすと (6) 式は次の如くなる。

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + cw = f(x) \dots\dots\dots(7)$$

(7) 式は彈床上の桁の基本公式である。

第一圖に於ては  $P_x = f(x) = 0$  を (7) 式に置けば 0 點以外に於て適用さるゝ。

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} + cw = 0 \dots\dots\dots(8)$$

即ち (8) 式の四次の微分方程式を解けば  $w$  が求められる。今  $\frac{0}{EI} = \lambda^4$  と置くと (8) 式は次の如くなる。

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \lambda^4 w = 0 \dots\dots\dots(9)$$

$w = e^{\alpha x}$  と置いて (9) 式に入れると

$$\alpha^4 + \lambda^4 = 0$$

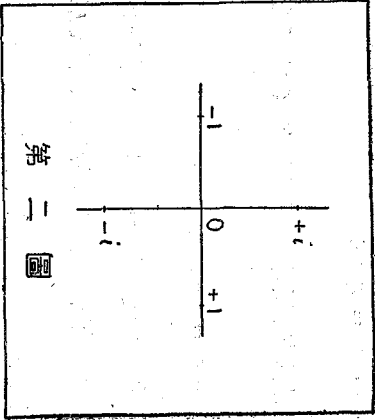
$$\alpha = \sqrt[n]{-1} \cdot \lambda$$

一般に  $n$  根の式は  $\alpha = r^{\frac{1}{n}} \left\{ \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right\} \dots \dots \dots (10)$

第二圖に示す如く (10) 式の  $r = 1, \theta = \pi, \therefore$  であつて  $k = 0, 1, 2, \dots (n-1)$ , の整数である。

依つて (9) 式に入れて  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  を見出せば

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} & i &= \sqrt{-1} \\ \alpha_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$



第二圖

$$\alpha_2 = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\alpha_3 = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha &= \frac{\lambda}{\sqrt{2}} + i \frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{\lambda}{\sqrt{4}} + i \frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \quad \frac{\lambda}{\sqrt{2}} - \frac{i\lambda}{\sqrt{2}}, \quad -\frac{\lambda}{\sqrt{2}} - \frac{i\lambda}{\sqrt{2}} \\ &= \mu + i\mu, \quad -\mu + i\mu, \quad \mu - i\mu, \quad -\mu - i\mu. \quad \mu = \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

依つて  $w$  は次の如くなる。

$$w = a e^{\mu x + i \nu x} + b e^{-\mu x + i \nu x} + c e^{\mu x - i \nu x} + d e^{-\mu x - i \nu x} \dots\dots\dots (12)$$

(12) 式の  $a, b, c,$  及び  $d$  は任意常数である。然し指数函数が虚数を含んで居るので、この指数の  $i$  を任意常数内へ追ひ出さねばならぬ。それには三角函数と指数函数との關係を用ゆればよい。即ち

$$\left. \begin{aligned} e^{i \mu x} &= \cos \mu x + i \sin \mu x \\ e^{-i \mu x} &= \cos \mu x - i \sin \mu x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

(13) 式を (12) 式に入れて計算すると次の如くなる。

$$w = \left\{ (a + c) e^{\mu x} + i(b + d) e^{-\mu x} \right\} \cos \mu x + \left\{ i(a - c) e^{\mu x} + i(b - d) e^{-\mu x} \right\} \sin \mu x \dots\dots\dots (14)$$

(14) 式の  $a + c$  又は  $i(b + d)$  等は任意常数であるから次式の如く書き改めらるゝ。

$$w = (A e^{\mu x} + B e^{-\mu x}) \cos \mu x + (C e^{\mu x} + D e^{-\mu x}) \sin \mu x \dots\dots\dots (15)$$

(15) 式が (9) 式の基本解である。A, B, C 及び D の常数は周端条件より決定せらるゝ。第二圖の場合は對し左右等しき状態であるから  $w(x) = w(-x)$  でなければならぬ。即ち (15) 式の  $x$  に  $(-x)$  を入れると次式となる。

$$w(-x) = (A e^{-\mu x} + B e^{\mu x}) \cos \mu x - (C e^{-\mu x} + D e^{\mu x}) \sin \mu x \dots\dots\dots (16)$$

(15) 式と (16) 式と等しきためには次の關係が成り立つ。

$$A = B, \quad C = -D \dots\dots\dots (17)$$

(15), (17) 式より

$$w = A(e^{\mu x} + e^{-\mu x})\cos \mu x + B(e^{\mu x} - e^{-\mu x})\sin \mu x \dots\dots\dots (18)$$

又は、  
 $w = A \cosh \mu x \cdot \cos \mu x + B \sinh \mu x \cdot \sin \mu x \dots\dots\dots (19)$

(19) 式は A, B 二個の任意定数を含む故に二個の条件が必要である。それは桁の終端 B 點に於いては彎曲力率が零である事と垂直荷重の和は零である事を使へばよい。

即ち  $-EI \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_{x=a} = 0$  である。

$$\therefore 2A\mu^2 \sinh \mu a \cdot \sin \mu a - 2B\mu^2 \cosh \mu a \cdot \cos \mu a = 0$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\cosh \mu a \cdot \cos \mu a}{\sinh \mu a \cdot \sin \mu a} \dots\dots\dots (20)$$

又  $P = 2 \int_0^a q_x dx$  であるから次の關係式が得らる。

$$P = 2 \int_0^a c w_x^2 dx$$

$$= 2 \int_0^a A \cosh \mu x \cdot \cos \mu x dx + 2 \int_0^a B \sinh \mu x \cdot \sin \mu x dx$$

$$= \frac{A}{\mu} (\sinh \mu a \cdot \cos \mu a + \cosh \mu a \cdot \sin \mu a) + \frac{B}{\mu} (\cosh \mu a \cdot \sin \mu a - \sinh \mu a \cdot \cos \mu a) \dots\dots\dots (21)$$



(20) 式と (21) 式より A, B の値は求められる。

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{P}{2} \frac{\mu}{\sinh \mu a \cdot \cos \mu a + \cosh \mu a \cdot \sin \mu a} \\ B &= \frac{P}{2} \frac{\mu \sinh \mu a \cdot \sin \mu a}{\cosh \mu a \cdot \cos \mu a (\sinh \mu a \cdot \cos \mu a + \cosh \mu a \cdot \sin \mu a)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

(19) 式と (22) 式を使って AB 桁の彎曲力率なり、剪力を見出すことが出来る。

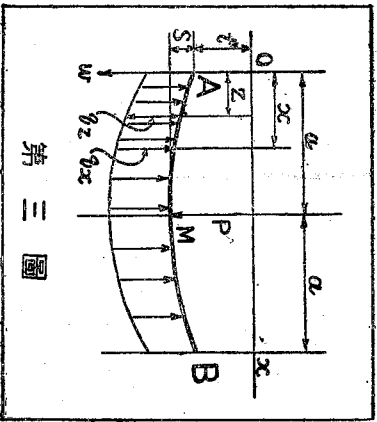
最大撓度は中央點であるから (19) 式にて  $x = 0$  と置けば求められる。

$$(w)_{x=0} = \frac{P}{2} \frac{\mu}{\sinh \mu a \cdot \cos \mu a + \cosh \mu a \cdot \sin \mu a} \dots \dots \dots (23)$$

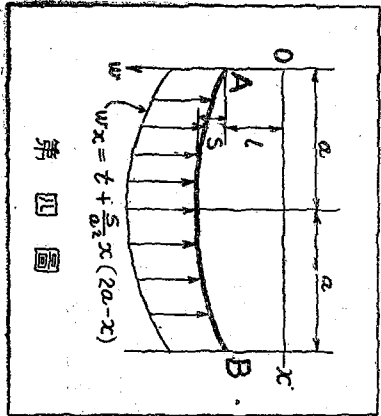
(B) 近似解法

今 AB 桁の中點に P なる荷重を有するときその撓度が極めて小なる場合には、反力の曲線を拋物線であると假定しても其近似解法としては大なる相違はない。又その曲線を三角函數の正弦或は餘弦を以てしても近いものを得られるし、荷重の状態によつては更に是等の曲線を組合せて更に近い解法が得られるのである。

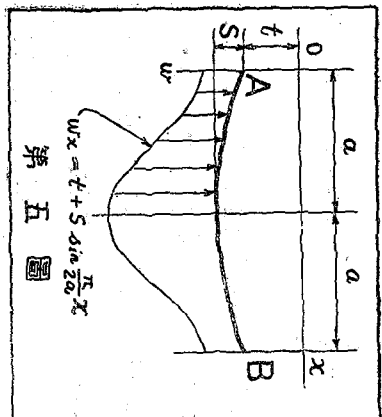
今 OD を拋物線と假定すると曲線式は次の如くなる。但し原點は 0 點とす。



第三圖



第四圖



第五圖

$$w_x = t + \frac{s}{2a}x(2a-x) \dots\dots\dots (24)$$

但し t は原點 0 の沈下

s は中央點 M の A 點よりの沈下

更にこの曲線を三角函數を以て表はすと次の如くなる。

$$w_x = t + s \sin \frac{\pi}{2a}x \dots\dots\dots (25)$$

而して (24) 式即ち拋物線の缺點は A 點及び B 點附近即ち桁の兩端附近にては緩い曲線であることであり、(25) 式即ち三角函數は桁の兩端附近では急な曲線であるから、(24) 式と (25) 式を組合せると一般解法に近い曲線が得られる。

是等を組合せると次の如くなる。

$$w_x = t + \frac{s}{2a^3}x(2a-x) + \frac{s}{2} \sin \frac{\pi}{2a}x \dots\dots\dots(26)$$

(26) 式を使つて  $t$  と  $s$  の値を桁の剛度と地盤の弾性係数の關係より成り立つ式にて表はせば問題は解決するのだが、茲では簡単なために (24) 式にて解いて見る事とする。第三圖の  $x$  點の彎曲力率  $M_x$  は

$$M_x = \int_0^x q_z(x-z)dz$$

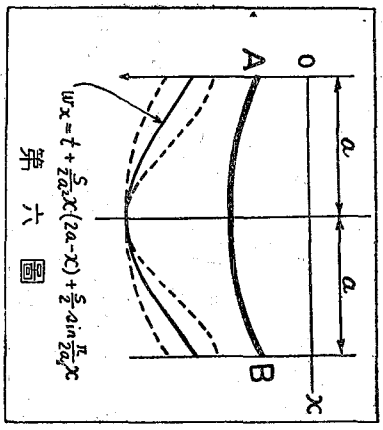
$q_z$  は原點 0 より  $z$  丈距りたる點の反力

(1) 式より  $q_z = cw_z$

故に  $M_x = \int_0^x cw_z(x-z)dz$

$$= c \int_0^x \left\{ t + \frac{s}{a^2}z(2a-z) \right\} (x-z)dz$$

故に  $M_x = \frac{ct}{2}x^2 + \frac{cs}{a^2} \left( \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{12}x^4 \right) \dots\dots\dots(27)$



第六圖

(2) 式より  $EI \frac{d^2w}{dx^2} = -M_x$  であるから

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{ct}{2}x^2 - \frac{cs}{a^2} \left( \frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{12}x^4 \right) \dots\dots\dots(28)$$

(28) 式を一度積分すれば (29) 式を得更に積分すると (30) 式となる。

$$EI \frac{dw}{dx} = -\frac{ct}{6} x^3 - \frac{cs}{a^2} \left( \frac{1}{12} ax^4 - \frac{1}{60} x^5 \right) + A_1 \dots\dots\dots (29)$$

$$EIw = -\frac{ct}{24} x^4 - \frac{cs}{a^2} \left( \frac{1}{60} ax^5 - \frac{1}{360} x^6 \right) + A_1 x + A_2 \dots\dots\dots (30)$$

$A_1, A_2$  は任意常数であるから是等を決定するために (29) 式にて  $x = a$  と置けば  $M$  點の微係數で、これは零でなければならぬから

$$EI \left( \frac{dw}{dx} \right)_{x=a} = 0$$

$$\therefore A_1 = c \left( \frac{t}{6} + \frac{s}{15} \right) a^3$$

(30) 式にて  $x = 0$ , 及び  $x = a$  と置けば原點  $O$  及び中央點  $M$  の沈下式が得らるゝ。

$$x = 0 \quad EIw_0 = A_2$$

$$x = a \quad EIw_a = -\frac{ct}{24} a^4 - \frac{cs}{a^2} \left( \frac{1}{60} a^5 - \frac{1}{360} a^6 \right) + A_1 a + A_2$$

$$\therefore EI(w_a - w_0) = \frac{ct}{8} a^4 + \frac{19}{360} csa^4 \dots\dots\dots (31)$$

然るに (1) 式より次の關係が成り立つ。

$$q_a - q_0 = w_a - w_0 = \frac{s}{c}$$

又  $\frac{\partial}{\partial t} = \lambda^4$  なる關係あるを以て、

$$EI(w_a - w_0) = \frac{s}{\lambda^4} \dots\dots\dots (32)$$

(31) 式及び (32) 式より

$$s \left( \frac{1}{\lambda^4} - \frac{19}{360} ca^4 \right) - \frac{ca^4}{8} t = 0 \dots\dots\dots (33)$$

荷重と反力の和は常に等しきために

$$2 \int_0^a q_x dx = P \dots\dots\dots (34)$$

$$6cat + 4cas = 3P \dots\dots\dots (35)$$

(33) 式と (35) 式に依り  $s, t$  の値を、荷重と桁と地盤關係とに對する式として見出す事が出来る。

$$\left. \begin{aligned} s &= \frac{a^3(360 + 11ca^4\lambda^4)P}{5,760\lambda^4} \\ t &= \frac{a^3(360 + 11ca^4\lambda^4)P}{8,640\lambda^4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

(36) 式の  $s, t$  を (24) 式に挿入すると求むる式が得らるゝ。これは一般解法にて求めた (19) 式に相當するものである。