結構新論（一）

石川時信

内容梗概

本文は結構問題を取扱つたものにして、結構に於ける不靜定量算出方法は撓角法に依りても、又カスチリアノの定理に依てりも聯立方程式を解くを要し、又定點法に依れば聯立方程式を解かざる代りに計算煩雜にして幾分近似的たるを免れざる等の事あるに鑑み、聯立方程式を解くの煩に依らず又近似的にもあらざる新法に依りて問題を解決せんとしたものである。而して問題解決の基本原則は其の意味は次の二つのものである。

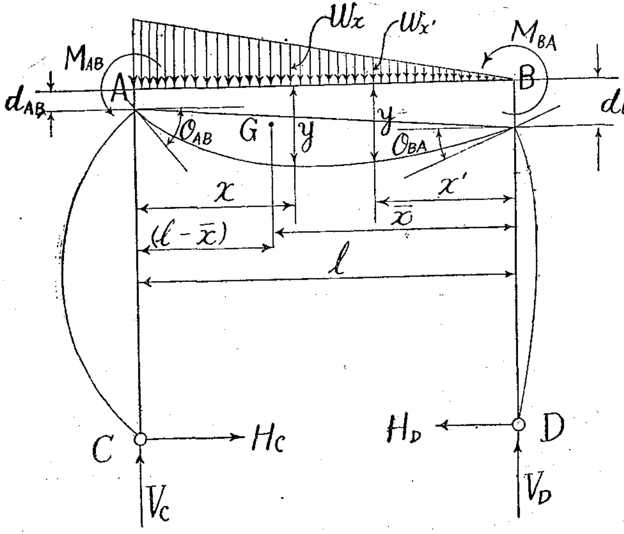
一　結構に於ける或る部材が荷重を受けて彎曲する時、其の部材の彈性曲線と原位置線とに依りて包まるる面積は、部材の左端に原點を取りて計算しても右端に原點を取りて計算しても、其の大さに異動なし。

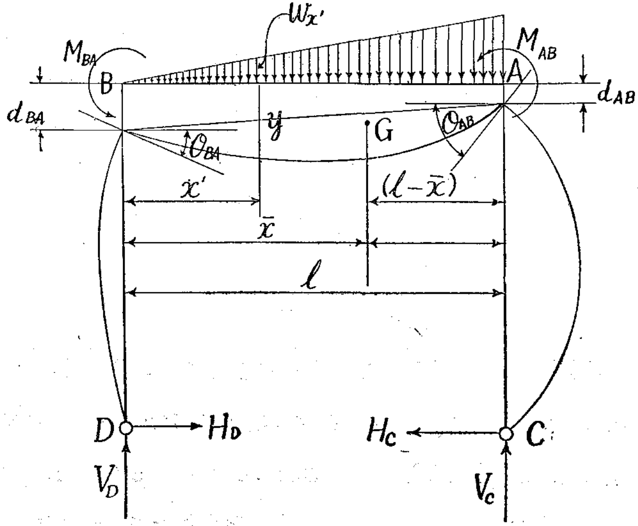
二　同じく其の面積の重心の位置は部材の左端に原點を取りて計算しても、右端に原點を取りて計算しても異動なし。

以上二つの原則を數式中に旨く折り込むためには計算上多少の工夫を要すれども大體は圖面に依りて判別し得る程度である。

序

結構問題は其の理論は極めて簡單にして今更俎上に載せる必要もなき事なるが、只聯立方程式を解くといふ事が如何に





も繁雜であり、又定點法の如きに依るも、是基より假定に基いたる者にして實用上差支へなしと雖も尙理論的見地より見て幾分物足りない感なきに非れば、舊冬急に思ひついて何んとかして新春の第一頁に新しい讀物をものせんとして、淺學菲才を顧みず敢へて蕪しい一文を草したる次第である。

緒　　論

今次に揭ぐる第一圖の如く結構の一部を成せる部材 AB 上に連續荷重 w_x 在りて、w_x は x の簡單なる函數とし、部材 AB は其の兩端に於て彈性固定の狀態に在り、且つ荷重のために幾分變位をも起すものとすれば、彈性曲線と其の原位置線とに依りて包まれたる面積 A. 及び其の面積の一次率 S, 及び A の重心 G までの距離 $\bar{x}$ 等は次の如くなる。但し A_l, S_l の如く Suffix l の就いてゐるのは $x = l$ 點までの A 又は S 等を表はし Suffix の就いてゐないものは任意點までのものを表はすとする。又 Q は剪力、M は力率、V_C 及 V_D は反力とす。又積分限界は簡單のために記入なきも o, x, 或は o, l の二通りとす。

然らば

$$
(1)\left\{
\begin{aligned}
Q &= V_C - \int w_x dx \\
M &= M_{AB} + V_C x - \iint w_x dx^2 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{EI}\left[M_{AB}x + \frac{1}{2}V_C x^2 - \iiint w_x dx^3\right] + \theta_{AB} \\
y &= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}M_{AB}x^2 + \frac{1}{6}V_C x^3 - \iiiint w_x dx^4\right] + \theta_{AB}x + d_{AB}
\end{aligned}
\right.
$$

$$\left\{\begin{aligned}
A &= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}M_{AB}x^3+\frac{1}{24}V_Cx^4-\iiiint\!\!\int w_x dx^5\right]+\frac{1}{2}\theta_{AB}x^2+d_{AB}x \\
S &= \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{24}M_{AB}x^4+\frac{1}{120}V_Cx^5-\iiiint\!\!\iint w_x dx^6\right]+\frac{1}{6}\theta_{AB}x^3+\frac{1}{2}d_{AB}x^2
\end{aligned}\right.$$

従つて　$x = l$　點に於ては

$$(2)\left\{\begin{aligned}
&V_C-\int w_x dx = V_D \\
&M_{AB}+V_Cl-\iint w_x dx^2 = M_{BA} \\
&\frac{1}{EI}\left[M_{AB}l+\frac{1}{2}V_Cl^2-\iiint w_x dx^3\right]+\theta_{AB} = \theta_{BA} \\
&\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}M_{AB}l^2+\frac{1}{6}V_Cl^3-\iiiint w_x dx^4\right]+\theta_{AB}l+d_{AB} = d_{BA} \\
&\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}M_{AB}l^3-\frac{1}{24}V_Cl^4-\iiiint\!\!\int w_x dx^5\right]+\frac{1}{2}\theta_{AB}l^2+d_{AB}l = A_l \\
&\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{24}M_{AB}l^4+\frac{1}{120}V_Cl^5-\iiiint\!\!\iint w_x dx^6\right]+\frac{1}{6}\theta_{AB}l^3+\frac{1}{2}d_{AB}l^2 = S_l = A_l\bar{x}
\end{aligned}\right.$$

又次に揭ぐる第二圖の如く部材 AB を左端と右端とを取り替へて左端を B、右端を A、原點 B よりの右方距離を x', 荷重を w_x, 彈性曲線と原位置線に依りて包まるる右端の一次率を S'_l とすれば撓角 $\theta_{AB}\theta_{BA}$ 等は第一圖の場合と反對符號

を有するを以て次の如くなる。

$$
(3)\begin{cases}
Q = V_D - \int w_{x'} dx \\[2ex]
M = M_{BA} + V_D x' - \iint w_{x'} dx^2 \\[2ex]
\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{EI}\left[M_{BA}x' + \dfrac{1}{2}V_D x'^2 - \iiint w_{x'} dx^3\right] - \theta_{BA} \\[2ex]
y = \dfrac{1}{EI}\left[\dfrac{1}{2}M_{BA}x'^2 + \dfrac{1}{6}V_D x'^3 - \iiiint w_{x'} dx^4\right] - \theta_{BA}x' + d_{BA} \\[2ex]
A = \dfrac{1}{EI}\left[\dfrac{1}{6}M_{BA}x'^3 + \dfrac{1}{24}V_D x'^4 - \int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int w_{x'} dx^5\right] - \dfrac{1}{2}\theta_{BA}x'^2 + d_{BA}x' \\[2ex]
S = \dfrac{1}{EI}\left[\dfrac{1}{24}M_{BA}x'^4 + \dfrac{1}{120}V_D x'^5 - \int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int w_x' dx^6\right] - \dfrac{1}{6}\theta_{BA}x'^3 + \dfrac{1}{2}d_{BA}x'^2
\end{cases}
$$

從つて　$x' = l$　點に於ては

$$
\begin{cases}
V_D - \int w_{x'} dx = V_C \\[2ex]
M_{BA} + V_D l - \iint w_{x'} dx^2 = M_{AB}
\end{cases}
$$

$$
(4)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{EI}\left[M_{BA}l+\frac{1}{2}V_D l^2-\iiint w_{x'}dx^3\right]-\theta_{BA} = -\theta_{AB} \\
&\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}M_{BA}l^2+\frac{1}{6}V_D l^3-\iiiint w_{x'}dx^4\right]-\theta_{BA}l+d_{BA} = d_{AB} \\
&\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{6}M_{BA}l^3+\frac{1}{24}V_D l^4-\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int w_{x'}dx^5\right]-\frac{1}{2}\theta_{BA}l^2+d_{BA}l = A_l \\
&\frac{1}{EI}\left[\frac{1}{24}M_{BA}l^4+\frac{1}{120}V_D l^5-\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int w_{x'}dx^6\right]-\frac{1}{6}\theta_{BA}l^3+\frac{1}{2}d_{BA}l^2 = S_l' = (l-\bar{x})A_l
\end{aligned}
\right.
$$

以上（2）及（4）式より V_C 及 V_D を消去すれば

$$
(2)\left\{
\begin{aligned}
&\frac{l}{2EI}\left[M_{AB}+M_{BA}+\iint w_x dx^2-\frac{2}{l}\iiint w_x dx^3\right]+\theta_{AB} = \theta_{BA} \\
&\frac{l^2}{6EI}\left[2M_{AB}+M_{BA}+\iint w_x dx^2-\frac{6}{l^2}\iiiint w_x dx^4\right]+\theta_{AB}l+d_{AB} = d_{BA} \\
&\frac{l^3}{24EI}\left[3M_{AB}+M_{BA}+\iint w_x dx^2-\frac{24}{l^3}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int w_x dx^5\right]+\frac{1}{2}\theta_{AB}l^2+d_{AB}l = A_l \\
&\frac{l^4}{120EI}\left[4M_{AB}+M_{BA}+\iint w_x dx^2-\frac{120}{l^4}\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int\!\!\int w_x dx^6\right]+\frac{1}{6}\theta_{AB}l^3+\frac{1}{2}d_{AB}l^2 = S_l = \bar{x}A_l
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\frac{l}{2EI}\left[M_{BA}+M_{AB}+\iint w_{x'}dx^2-\frac{2}{l}\iiint w_{x'}dx^3\right]-\theta_{BA} = -\theta_{AB}
\end{aligned}
\right.
$$

$$
(4)\left\{\begin{aligned}
&\frac{l^2}{6EI}\left[2M_{BA}+M_{AB}+\iint w_{x'}dx^2-\frac{6}{l^2}\iiiint w_{x'}dx^4\right]-\theta_{BA}l+d_{BA} = d_{AB}\\
&\frac{l^3}{24EI}\left[3M_{BA}+M_{AB}+\iint w_{x'}dx^2-\frac{24}{l^3}\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int w_{x'}dx^5\right]-\frac{1}{2}\theta_{BA}l^2+d_{BA}l = A_l\\
&\frac{l^4}{120EI}\left[4M_{BA}+M_{AB}+\iint w_{x'}dx^2-\frac{120}{l^4}\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int w_{x'}dx^6\right]-\frac{1}{6}\theta_{BA}l^3+\frac{1}{2}d_{BA}l^2 = S'_l = (l-\overline{x})A_l
\end{aligned}\right.
$$

（2）式と（4）式とを相組み合はして A_l 及 $\overline{x}$ を消去すれば

$$
(5)\left\{\begin{aligned}
&\frac{l}{2EI}\left[2(M_{AB}+M_{BA})+\iint w_x dx^2+\iint w_{x'}dx^2-\frac{2}{l}\left\{\iiint w_x dx^3+\iiint w_{x'}dx^3\right\}\right]+2(\theta_{AB}-\theta_{BA}) = 0\\
&\frac{l^2}{6EI}\left[3(M_{AB}+M_{BA})+\iint w_x dx^2+\iint w_{x'}dx^2-\frac{6}{l^2}\left\{\iiiint w_x dx^4+\iiiint w_{x'}dx^4\right\}\right]+l(\theta_{AB}-\theta_{BA}) = 0\\
&\frac{l^3}{24EI}\left[4(M_{AB}-M_{BA})+\iint w_x dx^2+\iint w_{x'}dx^2+\frac{24}{l^3}\left\{\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int w_x dx^5-\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int w_{x'}dx^5\right\}\right]\\
&\qquad+\frac{1}{2}l^2(\theta_{AB}-\theta_{BA})+l(d_{AB}-d_{BA}) = 0\\
&\frac{l^4}{120EI}\left[-10M_{AB}-4\iint w_x dx^2+\iint w_{x'}dx^2+\frac{120}{l^4}\left\{l\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int w_x dx^5-\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int w_x dx^6-\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int\!\!\!\int w_{x'}dx^6\right\}\right]\\
&\qquad-\frac{1}{6}l^3(2\theta_{AB}+\theta_{BA})-\frac{1}{2}l^2(d_{AB}-d_{BA}) = 0
\end{aligned}\right.
$$

（5）式は M_{AB}, M_{BA}, θ_{AB}, θ_{BA}, d_{AB}, d_{BA} の六元より成立ち方程式は四つであるが内三元のみは消去出來る譯である。

従つて其の消去すべき任意の三元を順次に M_{AB}, M_{BA}, θ_{AB}, θ_{BA}, d_{AB}, d_{BA} の順に選びて消去せる時は絕對項を L にて代表しておけば、

$$
(6)\left\{
\begin{array}{l}
f(\theta_{BA}, d_{AB}, d_{BA}, L) = 0 \\
f(d_{AB}, d_{BA}, M_{AB}, L) = 0 \\
f(d_{BA}, M_{AB}, M_{BA}, L) = 0 \\
f(M_{AB}, M_{BA}, \theta_{AB}, L) = 0 \\
f(M_{BA}, \theta_{AB}, \theta_{BA}, L) = 0 \\
f(\theta_{AB}, \theta_{BA}, d_{AB}, L) = 0
\end{array}
\right.
$$

（6）式は卽ち部材の兩端の狀態に應じて不靜定量を見出すために使用すべき式にして、絕對項は荷重狀態に依りて豫め計算しておいて表示し置き得る者である。尙（6）式を作る前に（5）式に部材兩端の狀態に應ずる條件を入れて置いて未知數を少くしてから（6）式を作りおけば（6）式中一元のみなる式は直ちに使用出來るものである事を示す。又（6）式中の或式中に部材兩端の狀態に應ずる條件を入れても尙二元以上の元を有する時は其の部材の隣の部材より不靜定量を求むる事とし、尙其の隣の部材の不靜定量が求められぬ時は又其の隣の部材より始むる如くする事を得るも、結構は結構以外何處かの基礎上に固定又は鉸にて取付けられてゐるものであるから、其の固定端又は鉸端を有する部材より逐次不定量を求めて進む方が便利である。

（5）式より（6）式を作るまでの說明は甚だ拙であるが今實例で云へば（6）式を得る前に玆に兩端鉸又は單支であ

る所の長さ l なる部材が等布荷重 w を受けたりとせよ、斯くの如く部材端の狀態が簡單なる場合は（6）式を使ふ事なく（5）式の最下段の式に於て　$\theta_{AB} = -\theta_{BA}$　,　$M_{AB} = 0$　,　$d_{AB} = d_{BA} = 0$

であるから不靜定量は θ_{AB} のみである。依つて

$$\theta_{AB} = \frac{l}{20EI}\left[-4\iint w_x dx^2 + \iint w_{x'} dx^2 + \frac{120}{l^4}\left\{l\iiiint\!\!\int w_x dx^5 - \iiiint\!\!\iint w_x dx^6 - \iiiint\!\!\iint w_{x'} dx^6\right\}\right]$$

然るに w なる等布荷重が部材全長に亘つて在る場合は

$$\begin{cases} \iint w_x dx^2 = \iint w_{x'} dx^2 = \dfrac{1}{2} w l^2 \\ \iiiint\!\!\int w_x dx^5 = \dfrac{1}{120} w l^5 \\ \iiiint\!\!\iint w_x dx^6 = \iiiint\!\!\iint w_{x'} dx^6 = \dfrac{1}{720} w l^6 \end{cases}$$

なるを以て　$$\theta_{AB} = \frac{l}{20EI}\left[-4\times\frac{1}{2}wl^2 + \frac{1}{2}wl^2 + \frac{120}{l^4}\left\{l\times\frac{1}{120}wl^5 - \frac{2}{720}wl^6\right\}\right] = -\frac{wl^3}{24EI}$$

本例は簡單なる一例であるが本例は亦部材兩端に變位のなき故、（6）式第一段、第四段、第五段、又は第六段に依りても θ_{AB} は求めらるるといふのである。

以上緒論に於ては荷重は連續荷重にして部材の全長に亘つて載つてゐる場合であるが集中荷重又は部材の一部分に載れる荷重に對しては（6）式中の絕對項の計算は可成り面倒なものになる。（緒論終り、未完）