

# 彈性的支柱に依りて支持せらるる 連續桁の一解法に就て

川 畑 篤

本文は彈性的支柱に依りて支持せらるる連續桁の一解法に就て述べたものである。其の理論は全く定點法と同一であつて、先最初に剛節點に於けるモーメント分配率及徑間に於けるモーメント傳達率に就て述べ、次に荷重徑間の支端モーメントに及最後に各剛節點モーメントを求むる近似式を誘導して、此種構造物の解法を簡單化せんとしたものである。

## 目 次

一	緒 言	
二	モーメント傳達率	
三	モーメント分配率	
四	荷重徑間の支端モーメント	
五	剛節點モーメント	
六	連續桁への應用	
七	結 論	

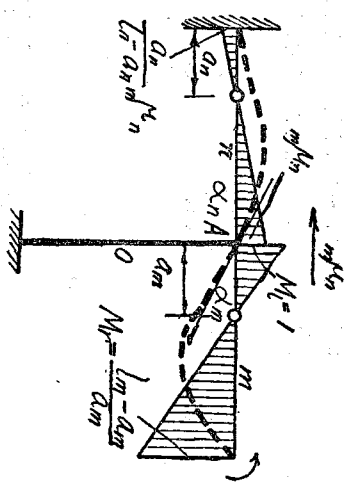
## 一 緒 言

弾性的支柱に依りて支持せらるゝ連続桁は、鐵筋コンクリート構造の發達せる今日、其の應用極めて多いものであつて、これが設計に際しては支柱の彎曲が桁の彎曲に及ぼす影響を考慮しなければならぬ。而して斯くの如き桁が荷重を受くる時彎曲する状態は、柱端の支持状態によつて異なるものである。何れにしても此種構造物は高次静力學的不定状態にあるのであつて、これが計算理論に於ては既に研究せられたものも決して尠くないのであるが、何れの方法によるも計算は相當複雑である。以下述べる解法は全く定點法と同じ理論によつたものであるから、其の正確度は定點法と同一程度のものであるが、唯の其特色とする所はモーメント傳達率分配率及荷重徑間  
の支端モーメントを部材の剛度比の項で統一したこと並に剛節點モーメントを機械的に表示したことにある。

## 二 モーメント傳達率

第一圖に於て部材  $m$  の右端に  $M = \frac{l_m - a_m}{l_m} M_n$

なるモーメントを加へるときは此モーメントは同部材の左定點を通し  
て剛節點  $A$  點に傳達せられる。其大きさは  $M=1$  である。次に  $M=1$  は  
 $A$  點に於て部材  $n$  と  $o$  とに適當に分配せられる。今  $mM_n$  を以て  $A$  點



第一圖

に於て部材  $m$  から部材  $n$  へのモーメント分配率とすれば部材  $n$  の右端には  $M = m/M_n$  が働くことになる。  $m, n, 0$  の三部材は  $A$  點に於て互に剛結せられているが爲めに  $A$  點に於ける三部材の撓角は互に相等的い。然るに撓角  $\alpha$  は第二圖から

$$\alpha_m = \frac{1}{EJ_m} \int_0^{l_m} M_n M'' dx = \frac{l_m}{6EJ_m} \left[ 2 - \frac{l_m - a_m}{a_m} \right]$$

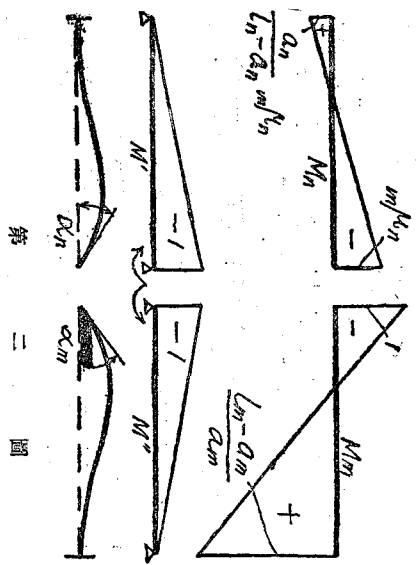
$$\alpha_n = \frac{1}{EJ_n} \int_0^{l_n} M_n M' dx = \frac{l_n}{6EJ_n} \left[ 2 - \frac{a_n}{l_n - a_n} \right]$$

$$-\frac{l_m}{6EJ_m} \left[ 2 - \frac{l_m - a_m}{a_m} \right] = + \frac{l_n}{6EJ_n} \left[ 2 - \frac{a_n}{l_n - a_n} \right]$$

$$\frac{\alpha}{l - \alpha} = \xi \quad \text{及び} \quad \frac{J}{l} = \lambda \quad \text{を以て表せば}$$

$$\frac{1}{\xi_m} = 2 + \frac{\lambda_m}{\lambda_n} m/M_n \left[ 2 - \xi_n \right]$$

上式は



$\xi$  は部材の一端に於けるモーメントが定點を通して他端に傳達せられる割合である。故にこれをモーメント傳達率と名付けておく。

一般に弾性的支柱に依りて支持せらるゝ連続桁（以下單に連続桁と稱す）の  $r$  徑間に就て考ふれば（第三圖）

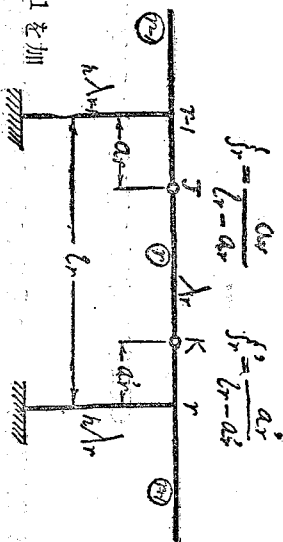
$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\xi_r} &= 2 + m/M_{r-1} K_{r-1} \\ K_{r-1} &= \frac{\lambda_r}{\lambda_{r-1}} (2 - \xi_{r-1}) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

同様にして右定點に對しては

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\xi_r} &= 2 + r\mu_{r+1} \alpha_r K_{r+1} \\ \alpha_r K_{r+1} &= \lambda_r \frac{1}{\lambda_{r+1}} (2 - \xi_{r+1}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (I)$$

### 三 モーメント分配率

第四圖は右端鉸節端左端弾性固定の桁を表はす。今右端に於て  $M=1$  を加



第三圖

ふる時は  $\alpha_n = \frac{1}{6E\lambda_n} (2 - \xi_n)$  部材  $m$  (第一圖) の左端に  $M=1$  を加ふる時このモーメントは他の二部材  $n$  及  $o$  に適當に分配せられる。其分配の割合をモーメント分配率と稱し  $m\mu_n$   $m\mu_o$  を以て表はせば

$$m\mu_n + m\mu_o = 1$$

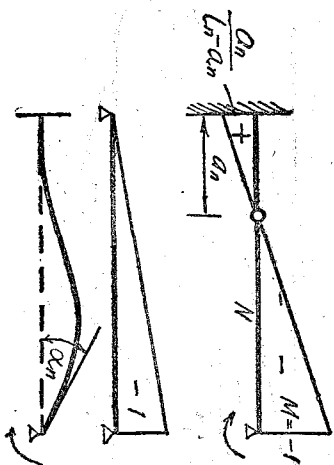
次に各部材の撓角 (廻轉角) は

$$\alpha_n = \frac{m\mu_n}{6E\lambda_n} (2 - \xi_n)$$

$$\alpha_o = \frac{m\mu_o}{6E\lambda_o} (2 - \xi_o)$$

$$\alpha_n = \alpha_o$$

より



第四圖

$$mM_0 = mM_n \frac{\lambda_0}{\lambda_n} \frac{2-\xi_n}{2-\xi_0}$$

$$mM_n \left(1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_n} \frac{2-\xi_n}{2-\xi_0}\right) = 1$$

$$mM_n = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_n} \frac{2-\xi_n}{2-\xi_0}} \dots\dots\dots (III)$$

柱の下端が鉸の場合には上式は

$$mM_n = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_n} \frac{2-\xi_n}{2}} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_n} \left(1 - \frac{\xi_n}{2}\right)} \dots\dots\dots (III)_a$$

柱の下端を完全固定と考ふれば

$$mM_n = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\lambda_n} \left(1.333 - \frac{2}{3}\xi_n\right)} \dots\dots\dots (III)_b$$

一般に連続桁の第  $r$  徑間に就て考ふれば

$$rM_{r-1} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_{r-1}} K_{r-1}}$$

$$K_{r-1} = \left(1 - \frac{\xi_{r-1}}{2}\right) \text{ (柱の下端鉸)} \dots\dots\dots (IV)$$

$$K_{r-1} = \left(1.333 - \frac{2}{3}\xi_{r-1}\right) \text{ (柱の下端固定)}$$

同様にして

$$\mu_{r-1} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r} K_r}$$

$$K_r = (1 - \frac{\xi_r}{2}) (柱の下端接)$$

$$K_r = (1.333 - \frac{2}{3} \xi_r) (柱の下端固定)$$

(V)

部材の固定の程度を表はす定数は一般に 0 から 1/3 の間にある。μ の値を計算するに當りては筆者の研究によれば下端接の柱を有する連続桁の中間径間に於ては近似的に  $\alpha = \frac{l}{4}$  と考へて差支なし。然るときは  $\xi_r = \xi = \frac{\alpha}{l - \alpha} = \frac{1}{3} = 0.333$

$$K_r = K = 1 - \frac{\xi}{2} = 0.833$$

$$\therefore \mu_{r-1} = \frac{1}{1 + 0.833 \frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_r}}$$

$$\Delta = -0.045 \text{ (桁端接)}$$

$$\Delta = +0.025 \text{ (桁端固定)}$$

(VI)

Δ は端径間に就て μ に施すべき補正量を表はす。

同様に下端固定の柱を有する場合には  $\alpha = \frac{l}{3.8}$  と考へて差支なし。然るときは

$$\xi = \frac{\alpha}{l - \alpha} = \frac{1}{2.8} = 0.357$$

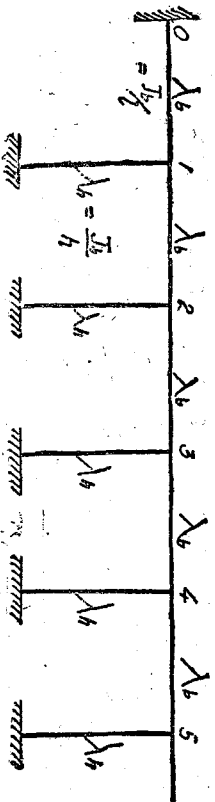
$$K = 1.333 - \frac{2}{3} \xi = 1.095$$

$$\therefore \mu_{r-1} = \frac{1}{1 + 1.095 \frac{h \lambda_{r-1}}{\lambda_{r-1}}} \dots \dots \dots (V)$$

$$\Delta = -0.049 \text{ (桁端録)}$$

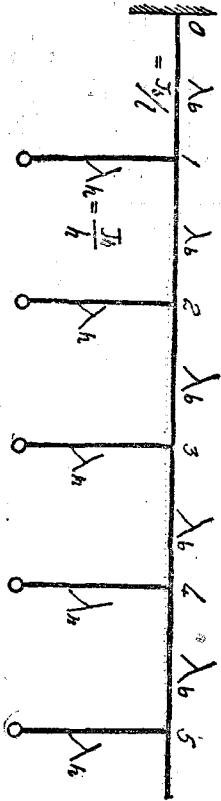
$$\Delta = +0.023 \text{ (桁端固定)}$$

次に(V)及(VI)の兩式の精度を知るために(W)式による結果と是等近似式による結果とを比較對照してみる。



第 一 表

$\lambda_b$ $\lambda_0$	0.8		1.0		1.2	
	一般式	近似式	一般式	近似式	一般式	近似式
1	0.556	0.556	0.500	0.500	0.455	0.455
2	0.532	0.533	0.478	0.477	0.434	0.432
3	0.532	0.533	0.478	0.477	0.434	0.432
4	0.531	0.533	0.478	0.477	0.434	0.432
5	0.531	0.533	0.478	0.477	0.434	0.432





第 二 表

$\frac{\lambda_a}{\lambda_b}$ r	0.8		1.0		1.2	
	一般式	近似式	一般式	近似式	一般式	近似式
1	0.625	0.625	0.571	0.571	0.526	0.525
2	0.601	0.600	0.548	0.546	0.504	0.500
3	0.600	0.600	0.547	0.546	0.503	0.500
4	0.600	0.600	0.547	0.546	0.503	0.500
5	0.600	0.600	0.547	0.546	0.503	0.500

即ち最大誤差 0.8% に過ぎず。故に上記近似式は實用價値あるものと思ふ。尙筆者は色々の  $\frac{\lambda_a}{\lambda_b}$  の値に對して  $\mu$  を計算して次の表を作つた。

第 三 表

$$r\mu_{r-1} = \frac{1}{1 + 0.833 \frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_{r-1}}}$$

$\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_{r-1}}$	$\mu$	$\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_{r-1}}$	$\mu$	$\frac{\lambda_{r-1}}{\lambda_{r-1}}$	$\mu$
0.00	1.000	0.55	0.686	1.90	0.388
0.02	0.983	0.60	0.667	2.00	0.376
0.04	0.968	0.65	0.649	2.20	0.354

0.06	0.952	0.70	0.632	2.40	0.334
0.08	0.937	0.75	0.616	2.60	0.316
0.10	0.923	0.80	0.601	2.80	0.301
0.12	0.909	0.85	0.586	3.00	0.286
0.14	0.896	0.90	0.572	3.25	0.270
0.16	0.882	0.95	0.559	3.50	0.256
0.18	0.870	1.00	0.546	3.75	0.243
0.20	0.857	1.10	0.522	4.00	0.231
0.22	0.845	1.20	0.501	4.25	0.221
0.25	0.828	1.30	0.481	4.50	0.211
0.30	0.800	1.40	0.462	5.00	0.194
0.35	0.775	1.50	0.445	5.50	0.179
0.40	0.750	1.60	0.429	6.00	0.162
0.45	0.728	1.70	0.414	6.50	0.156
0.50	0.706	1.80	0.401	7.00	0.147

第 四 表

$$\mu_{r-1} = \frac{1}{1 + 1.095 \frac{h\lambda_{r-1}}{\lambda_{r-1}}}$$

$$\frac{h\lambda_{r-1}}{\lambda_{r-1}}$$

$\mu$

$$\frac{h\lambda_{r-1}}{\lambda_{r-1}}$$

$\mu$

$$\frac{h\lambda_{r-1}}{\lambda_{r-1}}$$

$\mu$

0.00	1.000	0.55	0.624	1.90	0.325
0.02	0.979	0.60	0.604	2.00	0.313
0.04	0.958	0.65	0.584	2.20	0.293
0.06	0.938	0.70	0.566	2.40	0.276
0.08	0.919	0.75	0.549	2.60	0.260
0.10	0.901	0.80	0.533	2.80	0.246
0.12	0.884	0.85	0.518	3.00	0.233
0.14	0.867	0.90	0.504	3.25	0.219
0.16	0.851	0.95	0.490	3.50	0.207
0.18	0.835	1.00	0.477	3.75	0.196
0.20	0.820	1.10	0.454	4.00	0.186
0.22	0.806	1.20	0.432	4.25	0.177
0.25	0.785	1.30	0.413	4.50	0.169
0.30	0.753	1.40	0.395	5.00	0.154
0.35	0.723	1.50	0.378	5.50	0.142
0.40	0.695	1.60	0.363	6.00	0.132
0.45	0.670	1.70	0.349	6.50	0.123
0.50	0.646	1.80	0.337	7.00	0.115

第五表

方程式	方程式右辺										
左辺	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$	$X_5$	$X_6$	$X_7$	$X_8$	$X_{n-1}$	$X_n$	$X'_n$
$M_0$	-1										
$M_1^E$		-1	$+f_1 M_0$								
$M_1^T$			-1								
$M_2^E$			$+M_1^E f_2^2$								
$M_2^T$				-1							
$M_3^E$				$+M_2^E f_3^2$							
$M_3^T$					-1						
$M_4^E$					$+M_3^E f_4^2$						
$\downarrow$											
$M_{n-1}^E$											
$M_{n-1}^T$											
$M_n$											

#### 四 荷重徑間の支端モーメント

支端弾性支持のモーメントを求むるには單桁としてのモーメントを先づ求めこれから支端モーメントによる影響を引き去ればよい。

第五圖に於て  $(a-d) \cdot r'$  モーメントの結線 (Schlusslinie),  $S, S', S''$  を結線距離 (Schlusslinienabschnitt); 又  $k_1, k_2, k_3$  を標準距離 (Kreuzlinienabschnitt) と呼ぶ。

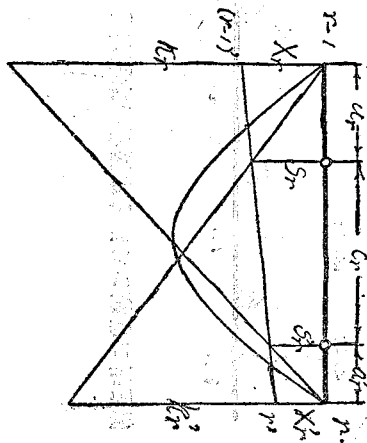
支端モーメント  $X_1$  及  $X_2$  は

$$X_1 = - \left\{ S'_1 + \frac{S_1 - S''_1}{l} (l - a'd') \right\}$$

$$X_2 = - \left\{ S_2 - \frac{S_2 - S''_2}{l} a'd' \right\}$$

茲に  $S_1 = \frac{a'}{l} k_1$

$$S'_1 = \frac{a'}{l} k_1$$



第五圖

上式中  $k_1$  及  $k_2$  は全く荷重の性質のみによつて定まる量でこれを荷重項とも稱しモールの定理から容易に求むることが出来るので既知量として取扱ひ得るものである。  $X_1$  及  $X_2$  の式に  $S_1$  及  $S'_1$  の値を代入して變形すれば

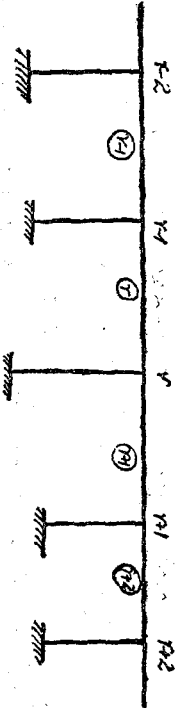
$$X_r = - \frac{k_r \xi_r - k_{r+1} \xi_{r+1}}{1 - \xi_r \xi_{r+1}} \dots \dots \dots (IV)$$

$$X_r = - \frac{k_r \xi_r' - k_{r+1} \xi_{r+1}'}{1 - \xi_r \xi_{r+1}'} \dots \dots \dots (V)$$

### 五 剛節点モーメント

吾々は前節に於て荷重径間の支端モーメントを求め得た。次には此モーメントを傳達率、分配率を用ひて適當に桁全部に亘つて傳達分布せしむればよい。

第六圖に於て( r + 1 ) 径間に荷重を有するとき荷重径間の支端モーメント  $X_{r+1}$  は r から左へ左定點を通して直線的に傳り  $X_{r+1}$  は ( r + 1 ) から右へ右定點を通して直線的に傳はる。即ち



第六圖

$$M_{r+1}^L = + X_{r+1} M_{r+1}^L M_r$$

$$M_{r+1}^R = - X_{r+1} M_{r+1}^R M_{r+1}$$

.....

$${}_{r+1}M_{r+1}^i = -X_{r+1}^i$$

$${}_{r+1}M_{r+1}^i = +{}_{r+1}M_{r+1}^i \quad {}_{r+1}M_{r+2} = -X_{r+1}^i \quad {}_{r+1}M_{r+2}$$

$${}_{r+1}M_{r+2}^i = -{}_{r+1}M_{r+1}^i \quad \xi_{r+2} = +X_{r+1}^i \quad {}_{r+1}M_{r+2} \xi_{r+2}$$

.....

又  $r$  徑間に荷重を有するときは

$${}_{r}M_{r-1}^i = -X_r^i$$

$${}_{r}M_{r-1}^i = +{}_{r}M_{r-1}^i \quad {}_{r}M_{r-1} = -X_r^i \quad {}_{r}M_{r-1}$$

$${}_{r}M_{r-2}^i = -{}_{r}M_{r-1}^i \quad \xi_{r-1} = +X_r^i \quad {}_{r}M_{r-1} \xi_{r-1}$$

.....

$${}_{r}M_r^i = -X_r^i$$

$${}_{r}M_r^i = +{}_{r}M_r^i \quad {}_{r+1}M_{r+1} = -X_r^i \quad {}_{r+1}M_{r+1}$$

$${}_{r}M_{r+1}^i = -{}_{r}M_r^i \quad \xi_{r+1} = +X_r^i \quad {}_{r+1}M_{r+1} \xi_{r+1}$$

.....

各徑間に荷重を有するときの剛節點 $r$ に於けるモーメントは

$$M_r^i = +_1M_r^i + {}_2M_r^i + {}_3M_r^i + \dots \dots \dots \quad (X)$$

$$M_r^r = +_1M_r^r + {}_2M_r^r + {}_3M_r^r + \dots \dots \dots \quad (K)$$

然るに今徑間 $(r+1)$ の上のみに荷重を有するときは $(r-1)$ 及 $(r+3)$ 徑間に於けるモーメントは頗る小で實際上これを省略するも差支なき程度のものであることは $\mu$ 及 $\xi$ の性質から考へても想像し得る所である。然るときは

$$M_r^i = {}_{r-1}M_r^i + {}_rM_r^i + {}_{r+1}M_r^i$$

$$M_r^r = {}_rM_r^r + {}_{r+1}M_r^r + {}_{r+2}M_r^r$$

或は

$$M_r^i = +X'_r \mu'_{r-1} \xi'_r - X'_r - X_{r+1} \mu_r \dots \dots \dots \quad (XI)$$

$$M_r^r = -X'_r \mu'_r - X_{r+1} + X_{r+2} \mu_{r+1} \xi_{r+1} \dots \dots \dots \quad (XII)$$

茲に  $\mu'_{r-1} = {}_{r-1}\mu_r$

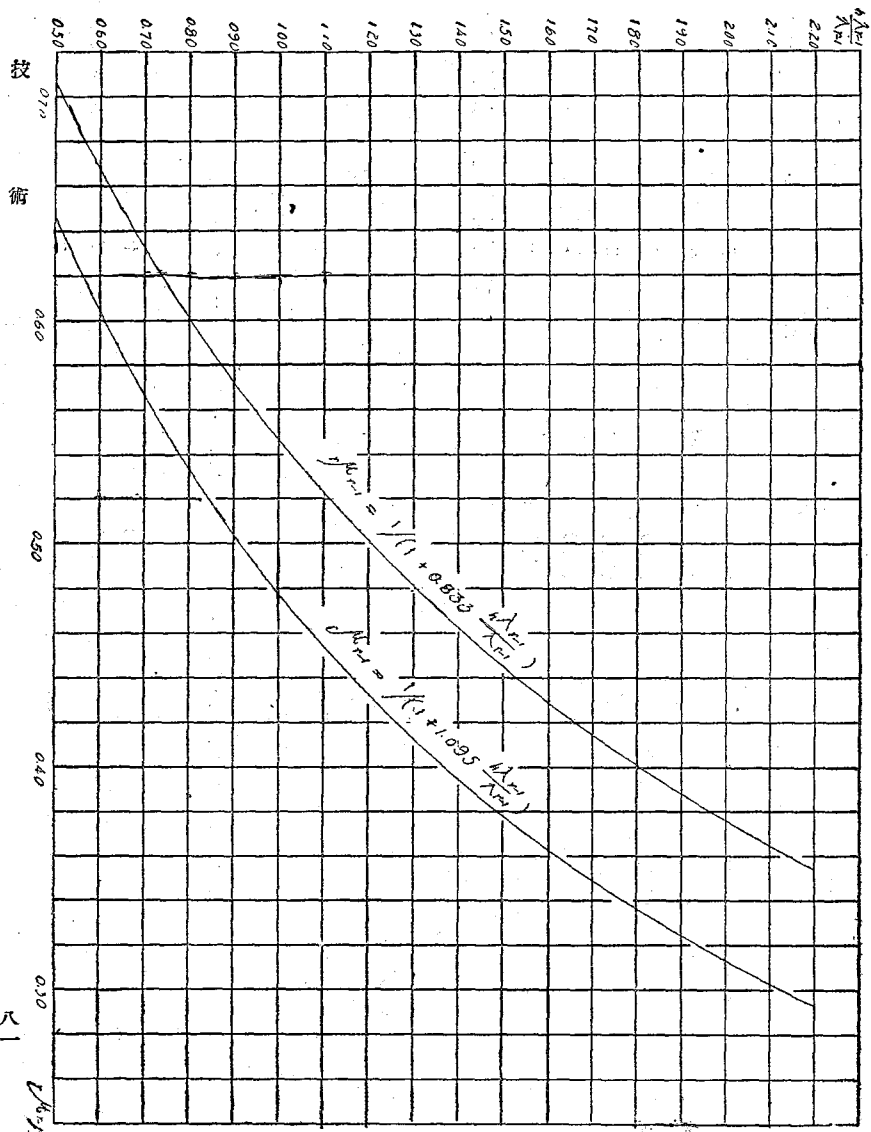
上式を表示すれば第五表の如し。

(H. Müller-Breslau, Die Graphische Statik, Band I, Seite 200, Fig. 471)

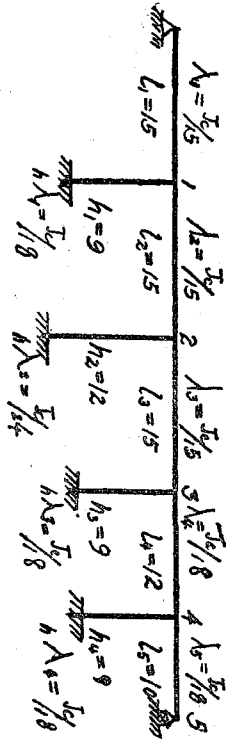
先づ近似式 (III) より  $\mu$ を計算すれば次表の如し。

$r$	${}_{r+1}\mu_r$	${}^r\mu_{r+1}$
1	0.474	0.523





2	0.594	0.594
3	0.523	0.477
4	0.477	0.428



次に (I) 式より  $\xi$  を計算すれば

$n$	$\xi_r$	$\xi_r$
1	0.000	0.348
2	0.340	0.335
3	0.335	0.340
4	0.367	0.350
5	0.360	0.000

等分布荷重  $q_1$  が徑間  $L_1$  のみに載荷せられた場合を考ふれば (Ⅳ) (Ⅴ) の兩式より

$$\lambda_1 = 0$$

$$X_1^* = 19.575 p_1$$

$$M_1^* = X_1^*, M_2^* = \mu_2 M_1^*, M_3^* = -\xi_2 M_2^* \dots$$

より次の表を得る。

r	M <sub>r</sub>	
	左側	右側
1	-19.575 p <sub>1</sub>	-10.238 p <sub>1</sub>
2	+ 3.430 "	+ 2.037 "
3	- 0.693 "	- 0.331 "
4	+ 0.116 "	+ 0.050 "

即ち Muller-Breslau 氏の結果と殆んど一致す。

### 六 連続桁への應用

以上數節に亘つて述べて来た所は彈性的支柱に依りて支持せらるる連續桁のみならず普通の連續桁（水平連續桁）にも用ゐることが出来る。即ち支柱を取り去つて支點で支へた場合を考ふれば (W) 式より

$$\mu = 1$$

であるからこれを (I) 及 (II) 式に代入して

$$\frac{1}{\xi_r} = 2 + \frac{\lambda_r}{\lambda_{r-1}} (2 - \xi_{r-1}) \dots \dots \dots (XIV)$$

及び

$$\frac{1}{\xi_r} = 2 + \frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}} (2 - \xi_{r+1}) \dots\dots\dots (XV)$$

(XV) (XV) の兩式は水平連続桁のあらゆる徑間のモーメント傳達率を與ふる式であつて Prof. B. Löser 氏の "Vereinfachte Berechnung durchlaufender Träger" 中の (8) 及 (9) 式と同一のものである。(Die Bautechnik, 1932, Heft. 9) 又 (VII) (K) の兩式は Löser 氏の (14) (15) と同一のものである。支點彎曲率は (X) 又は (N) 式より求む。

## 七 結 論

架構計算に際して與へられた外力と許容應力の下に如何にして部材の最經濟的斷面を決定するかは、吾々技術者の常に心に留めておくべき大切な問題である。然し此問題は本文の目的にあらざるを以て後日に譲り今何等かの方法で最經濟的剛度比を求め得たと假定すれば、これを用ひて直ちに  $\mu$ ,  $\xi$  及  $X$  を計算することを得る。 $\mu$ ,  $\xi$ ,  $X$  を知れば剛節點モーメントは全く機械的に求め得るのであつて、斯くの如くして作られた表式は普通用ひらるる定點法の公式より甚だ簡單に解決せられることと思ふ。