

構造物の實驗解法〔十〕

青 木 楠 男

坐標軸に沿つての變位測定による方法 今直交軸 x, y を坐標に採り、一點の兩軸の方向への變位を ξ 及 η にて示すならば彈性理論により其點の平面應力は

$$\sigma_x = \frac{mE}{m^2 - 1} \left[m \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] \dots \dots \dots (1)$$

$$\sigma_y = \frac{mE}{m^2 - 1} \left[m \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right] \dots \dots \dots (2)$$

$$\tau = G \left[\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \right] \dots \dots \dots (3)$$

で示される。そこで今兩主軸の方向に沿つて順次變位を測定してゆき變位曲線を描き各所要點に於ける曲線の切線の方向を求めればこれによつて上式中の微分量を得べく、従つて、 σ_x, σ_y, τ の値を得べし、此等の數値を求めらば引きつゞ

き主應力の大き及び其方向は次式によつて求むることが出来る。

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tau}{\sigma_x - \sigma_y} \dots\dots\dots (4)$$

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \dots\dots\dots (5)$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \dots\dots\dots (6)$$

$$\tau_{max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2} \dots\dots\dots (7)$$

變位の測定にはワルテン鏡の類を便利とする。

理論式の類似を應用する方法 比較的測定の容易なる現象に對する理論式が、今解かんとする現象に對する理論式と同一

型式を有する場合、前者に於ける實驗結果を直ちに後者の解法に利用せんとするものである。

例へば平面應力を現はす airy の微分方程式が

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \dots\dots\dots (8)$$

なるに對し版が縁部にのみ外力をうくるとき其撓みは

$$\frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial y^2} \dots\dots\dots (9)$$

にて示さる $\zeta = F(xy)$ は版の中立面の Z 軸方向の撓みを示す。

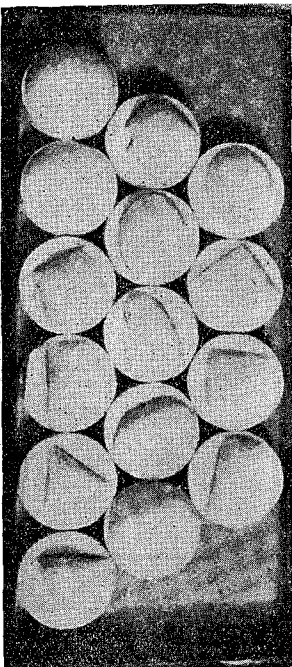
兩微分方程式の類似は平面應力の解法に版の撓みを利用しうることを暗示する即ち、問題の面と同形の版をとり當該環境條件のものにて版を彎曲せしむるとき、平面應力が

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ \tau &= \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

にて示さるゝが故に σ_x 、 σ_y は版の曲率から求めることか出来る。

同様に振力をうけた材の内應力と均等なる横壓をうけた薄膜の彈性曲面とか類似の式にて示さるゝことにより抗張材との断面と同一形状に張られたる石膏膜、ゴム膜等の側壓をうけて示す曲面によつて振應力を推定する事が出来る。

第百六圖に示せるはゴム膜による曲面を更に石膏にて型成せるものにして五種の断面の振應力分布を知ることが出来る。即ち各曲面上の多數の點につき其傾斜を測定し、等傾線を描く、第百七圖は矩形断面に於ける同傾線を示せるものにして、振應力の大小は同傾線間隔の大小に逆比してくる。従つて同圖により最大振應力は長邊の



第百六圖 ゴム膜を用ひての抗張材内應力の解法

中央線部に起ることが解る。

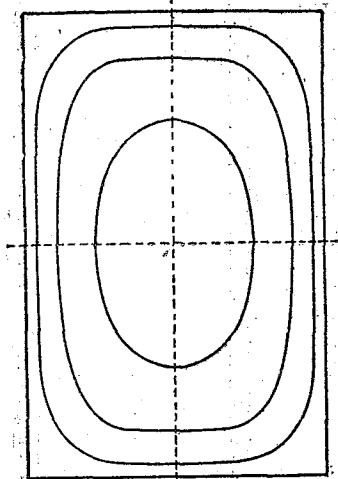
變形量の異なる材料による應變を用ふる法

既述の諸法に於ては弾性體に生ずる僅少の變形を適當なる擴大装置で測定し、其變形量より應力を求めんとするものであるが、逆に比較的變形量の大きい材料を用ひて、變形を手輕るに求め、これによつて應力を算定することも出来る筈である。この方法の材料として使用せらるゝものにゴム、セラチン、寒天等がある。

測定の方法は寫眞を應用する場合は、試片上に細線にて基準目を描き、先づ載荷前に撮影、載荷後各種装置を具備にて同一乾板上にて二重撮影をする、載荷による格點の變位はコムパレーター其他にて微細に測定しうべく、其結果により(1)乃至(7)式の適用によつて主應力を求めることが出来る。コムパレーターによる測定にふさはしい細い正確なる罫線には相等の困難がある。

第二の方法は縱横野線のほかに各格點に小圓を描き、圓の歪みによつて其點の變形を知る方法にして、前掲のものと同様にして應力を求めうべきも、むしろ「一點にて3方向の變形量を測定する法」の項にて述べたる方法によるを便とす。

變形の結果生じたる橢圓形の長軸、短軸は主應力の方向を示すこととなる、使用材料中セラチン、寒天等は製造毎に其値を多小異にし、其程度各種彈性定數の測定を要すること、時間と共に水分の蒸發にて其値を變化すること、腐敗、微等の變あるも一定範圍にてはよく Hooke の方法に従ふ。セラチンのポアツソンの比は Moidehl によれば約 0.38 と云はれてをり寒天については本邦での諸實驗では 0.33-0.67 の間にある。セラチ



第七百圖 矩形斷面に應力を示す同傾線

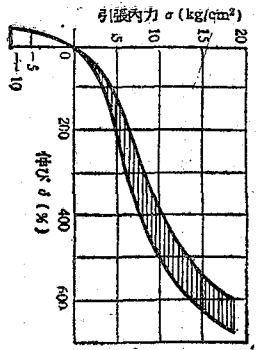
ン、寒天兩者にては寒天を使用する人が多い。

山口昇博士の隆道の應力分布の實驗は寒天を使用せられたもので其實驗の方針は大體本法に類似したものである。

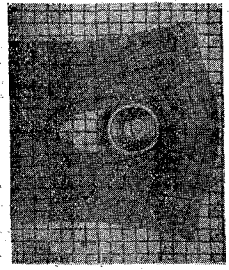
セラチン、寒天兩者の缺點を持たず、取扱ひにも便利なるゴムは一方に於て一大缺點を有し、實驗用材としては、前二者に劣る、即ち、Hooke の方則は従はざること、相等可塑性にして時間的影響の著しいことである、第百八圖はゴムの伸長曲線、第百九圖はゴム試片によるボール孔の實驗である。孰れにせよこの種の實驗に於て注意を要することは其變形が善しいと平面應力と考へるのは困難となり3軸の問題として別に取扱はねば不都合となつて來ることである。

III. 偏光による平面應力の測定

概 説 1816年英國の物理學者 David Brewster によつて透明等方體が内應力をうける場合に現はす一時的復屈折の現象に関する論文が Philosophical Transaction 上に發表されて以來、この問題に關し Neumann (1850) Maxwell (1850) Wertheim (1854) Legeer (1877) Kerr (1888) 氏等により理論的研究が著々と進められ多くの論文が發表せらるゝに至



第百八圖 ゴム伸長曲線



第百九圖 ゴム試片によるボール孔の實驗

つた、前掲の年代は夫等論文發表の年代である。更に本世紀に入りて Messenger, Coker Pilon 等の努力によつて、これが工學的方向への應用に新生面を開拓するに至つた。

殊に最近の十數年間世界各方面に於ける光彈性學研究の發展は目醒しいものであつて。これによつて解決せられたる工業上の諸問題の數は枚擧しがたいほどある。

今將來に於ける光彈性學の工業上の應用價值につきて考ふるに、最近の如く機械工學に、構造工學に、將又航空工學に兵器工學に理論と實際との接近の必要を痛感しつゝある今日、これが各方面にもたらすべき効果の如何なる程度に及ぶべきかは測り知り得ないものがある。

而してこの實驗の應^用方面は大別して二つに區別することが出来る。即ち第一は新しく或問題の解法が求められたる場合にこれが實驗的證明に役立たんとするもので、第二は理論的に全く解法の不明なる構造物を實驗的に解きて實地に應用せんとするものである。

構造工學其他に於ける理論の發達は最近目醒しきものありと雖も、未だ解決の曙光だに認めてをらぬ問題も極めて多いと云はねばならぬ、此等の諸問題の理論的研究がこの第二の應用方面から得られた實驗結果によつて啓發せらるゝ場合が今後屢々出て來るであらうと云ふことを信ずるものである。

翻つて本邦に於ける光彈性學の大勢を展望して見たいと思ふ、さきに英國 Coker 教授の薫陶をうけて、歸朝後斯學の研鑽に不斷の努力を續けられつゝある福田爲吉氏、福原達三氏、ペークライト試験片を使用して斯學の實驗價值に一段の光彩を興へられた荒川郁藏氏あり、更にフエノライトの使用と單色光線により寫眞印畫を使用して應力算出の方面に一機

軸を示された辻二郎氏あり、このほか斯學の理論に實驗に準い研究の結果を發表せられたる諸氏として湯淺龜一氏、久野重一郎氏、二兄秀雄氏、藤田敬一氏、吉田辰夫氏等を擧げることが出来、本邦光彈性學界多士齊々たる有様である。殊に斯學に關する外國文獻を細くとき上記諸氏の研究の引證せらるゝことの極めて多いことは筆者の常に愉快とするところである。就中、辻氏による新材料フエノライトの使用並に活動寫眞による破壊状況の光彈性學的的研究は同氏の外遊中、世界各地に於ける稱讚の標であり、本邦斯學のため萬丈の氣を吐いたものと云はねばならぬ。

實驗結果の適用 模型製作に用ふる材料は Brewster の實驗に於ては硝子板なるも其後透明等方體にて模型製作の容易なるものとしてセルロイド、ペーライト等の使用を見るに至り、最近にては此等のものに比して更に光學的に感度の大なるフエノライトが用ひられる。

フエノライトは喜多源逸博士並に松井悅造氏の發明によるもので、石炭酸とフオルマリントをアンモニアの接觸作用の下に常壓にて凝固めたものである。淡黄色の透明體にして、工作機械、グラインダー等にて容易に加工することが出来る。彈性限界 300 疋/輝²、最大抗張力、40 疋/輝²、彈性率、34,100 ~ 39,500 疋/輝²にしてセルロイドに比し約 4.75 倍の光學的感度を有してをる。缺點としてはセルロイドに比して脆きこと、材料が化學的に充分安定ならざるためか、空氣中に放置するときは表面に初應力の發生を見るに至り、模型製作後なるべく早く實驗の終了を必要とすること等である。

斯くの如き材料を用ひてをり、且つ實驗用に供する模型が高々 10 輝に充たざる脆弱なものであり、實驗に現はるゝ像があまりにも鮮麗であることなどが、この實驗結果の應用せらるべき強大なる鋼鐵又は鐵筋混凝土構造物に對してもつ不釣合なる對稱が、この實驗の應用の確實さに疑ひを挟ましましむる事が多い。

併しこの實驗は其基礎を不變の弾性理論上に根強く據けてをり、動かすべからざる確さを持つてをるのである。

1862年に Sir. G. B. Airy 氏の發表された平面應力の基本微分方程式は

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \dots\dots\dots (8)$$

であつて限界條件を満足すべき應力函數 F が見出されるとき (10) 式によつて完全に平面應力を決定することの出来ることを示してをる。

この基本方程式は材料につき特有なるべき各種の彈性定數 $E, G, M,$ 等を含んでをらない、即ち構造物の形が相似であるならば材料の如何大いさの如何に關係なく、平面應力は常に相似に分布されることを示すものである。この事實が光彈性學に千金の價値を興へ、一片のフエノライトに重大なる使命を有せしむるものである。

勿論前記の關係式は其限界條件の複雑なる場合、又極めて嚴格なる見地より論ずれば、其確實性に多少議論の餘地を有するも、Filon 氏等の研究によれば多くの場合に於て其誤差は數%に止まり。光彈性學の實驗價値を動かす程度のものではない。

實驗の原理と其三體鏡 光彈性學の根本原理として考へられる二つの問題がある。それは歪をうけた透明等方體が一時的に複屈折性を呈し、これに當つた、直偏光又は圓偏光は二つの光に分れてこれを通過し、其兩光線間に次の二つの關係が存することである。

- 1、直偏光は歪をうけた等方體を通過して出るときに、其點の主應力 σ_x 及 σ_y の方向の2偏光に分れる
- 2、圓偏光が歪みうけた等方體を通過して出たときに分れる2偏光の間の位相差は次式に與へられる

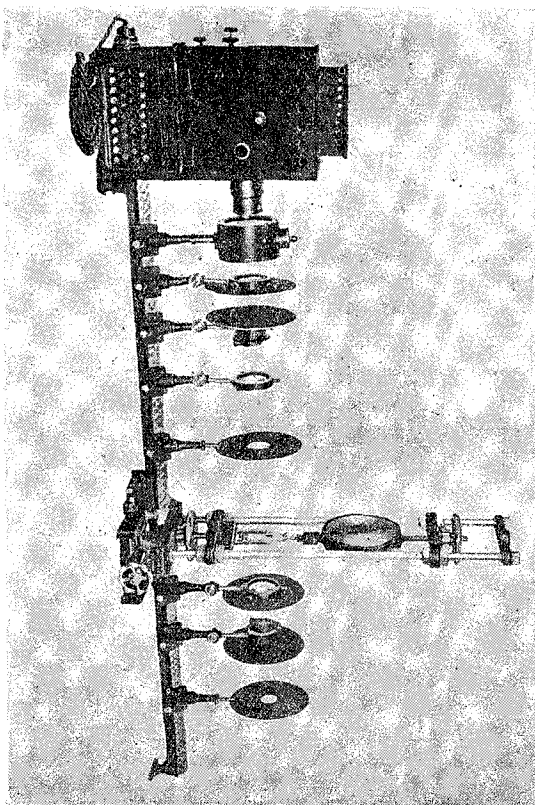
$$\delta = Ce (\sigma_x - \sigma_y)$$

こゝに c は材料による定數、 e は試験片の厚を示す、この2項が光弾性學の實驗の根本原理をなすものであつて、この原理に基いて、實驗は次の3階梯に分れる

- 1、主應力線の決定
- 2、 $\sigma_x - \sigma_y$ の測定
- 3、 $\sigma_x + \sigma_y$ の測定

1の階梯に於て試片の各點に於ける主應力の方向が求められ、2、3の階梯に於て主應力 σ_x 、 σ_y の大きさが決定せられる、この2、3の階梯は純然たる器械的測定法によるもので、これに代るべき光學的方法によるものと兩者の中間に位する方法がある。

この實驗に用ふる装置は其製作所によつて相違あるも大同小異にして第百十圖は島津製作所の製品を示したもので、第百十一圖は理化學研究所製のものゝ配置を示した



第百十圖 光弾性學實驗裝置

ものである。外國製としては Adam Hilger のものが著明である。

主應力線の測定 今一組の交

又ニコルの間の直偏光域に試

片を入れるとき試片中にて交

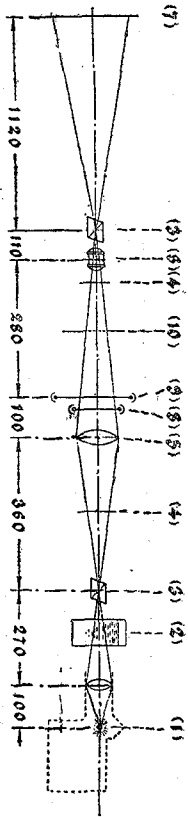
又ニコルの主軸と同一方向を

有する主應力の働く點を通過する直偏光は試片により其偏光面に變化をうけざるが故にスクリーン上に黑色線となりて其軌跡を示すこの軌跡を等傾線と稱し、交叉ニコルを零度より90度まで適當の角度をおきて廻轉せしめ、各角度に相等する等傾線を求むるとき第百十二圖に示すが如き曲線を描くことが出来る。

更にこの等傾曲線に基ひて各點の方向を示す主應力線を描いたものが第百十三圖である。

兩圖は著者が Lackawanna 型鋼矢板の繼手の應力分布を究めんがために行つた實驗の結果であつて、繼手が抗張力をうけた場合の状況である。兩圖に於て6箇所に2次の特異點が現はれてをる。

σx-σyの測定 σx-σyの測定には試片を交叉ニコルと四分一波長板とよりなる圓偏光域に置く、スクリーン上にはられる像は使用光線が白色なる時、δの値が2πの整数倍なるが如き波長の光を失ひたる餘色にて現はれ、像は美麗なる五彩を現はす、よつて今試片の一點の位相差と同様の位相差を有するがごとき比較片を重ね、其軸の位置を適當に選ぶ



第百十一圖 光彈性實驗裝置配置圖
 (1) 光源、(2) 水槽、(3) 偏光ニコル、(4) 四分一波長板、(5) コンテンサー
 (6) 寫眞レンズ、(7) スクリュー、(8) 比較試験片、(9) 試験片

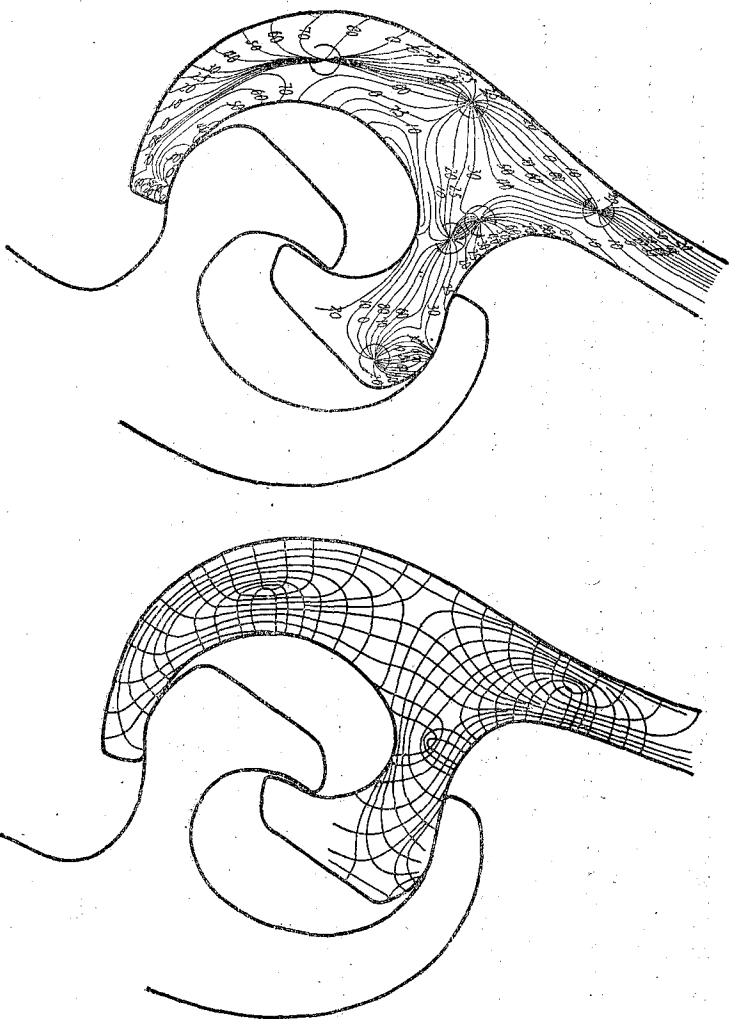
らば位相差を消滅せしめて其點の視野を暗黒ならしむることが出来る。

この時比較片の有する $ox-oy$ を知るならば、これによつて試験片の其點の $ox-oy$ の値を求めることが出来る。

白色光線によつた像の撮影は困難であるが、もし水

銀燈にフイルター

を用いた單色光線による像を作れば撮影は容易であり、像に現はれた橋の腰位を算へて各點の $ox-oy$ の比率を知ること



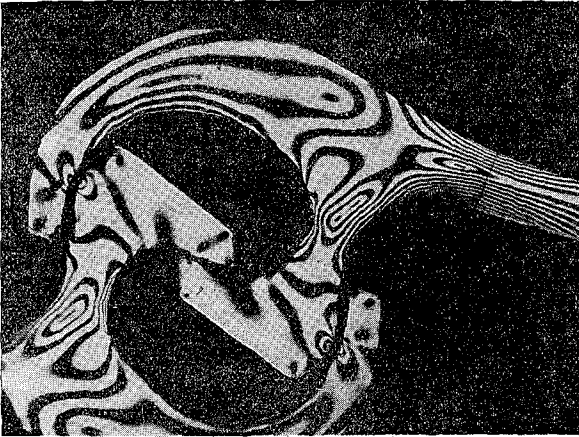
第百十二圖 Jackawanna 型鋼矢板繼手等傾曲線圖

第百十三圖 同上 主應力線圖

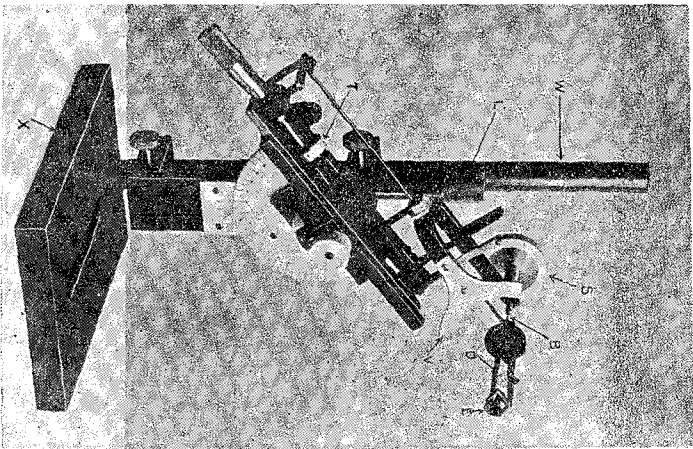
とが出来る。第百十四圖はかくして求めた Lackawanna 鋼矢板繼手の等明
曲線圖である

$\sigma_x + \sigma_y$ の測定 前項に於て $\sigma_x - \sigma_y$ の値を得たるが故にもし $\sigma_x + \sigma_y$
の値を測定しうれば、直
ちに σ_x, σ_y の値を算出
し得、この方針による實
驗法を器械的解法と稱し
てをる。

今試片の一點が σ_x な
る應力をうけたるとき其
方向に $\frac{\sigma_x}{E}$ なる歪が起
き、それと直角で厚さの
方向に $\frac{\sigma_x}{mE}$ なる歪を生ず
る、又其點が同時に σ_y
なる應力をうくれば其方



第百十四圖 Lackawanna 型鋼矢
板繼手等傾曲線圖



第百十五圖 Coker 氏の Lateral
Extensometer.

向に $\frac{\sigma_Y}{E}$ なる歪と厚さの方向に $\frac{\sigma_Y}{mE}$ なる變形を起す、従つて一點が σ_x , σ_y なる應力をうけたとすれば試片は厚さの方向に

$$e = -\frac{\sigma_x}{mE} - \frac{\sigma_y}{mE} = -\frac{1}{mE}(x + \sigma_y)$$

なる歪を起すことゝなる、即ち試片の m, E 等を知り、其厚さの變化を測定すれば各點の $\sigma_x + \sigma_y$ を求めることが出来る。

この器械的方法は其理論に於て最も簡單で、了解し易い實驗方法であり、主として Coker 氏等によつて採られた手段であるが、試片上に描いた基準目の交點毎に厚さの變化を五萬分の一程の精度で測定してゆくことは非常な努力と時間とを必要とする、従つて今日では次項にのべる様な光學的方法其他を採用するものゝ方が多い。

厚さの變化を測定する装置としては Coker 氏の考案になる Lateral Extensometer なるものがある。第百十五圖はこれを示したもので、Bの位置に挟まれた試片の厚さの變化は、Dの發條に押へられてをるベル・クラソクの長腕にてEなる鏡の傾きを變へ、これに反射してをる光源の像を動かす様になつてをる。像の動きは他の回轉圓筒上に記録せられる。

(未完)