高架式架構に對する撓角撓度法の擴張

川畑　篤

本文は高架式架構に對し撓角撓度法の應用擴張により從來の解法よりも一層簡便なる一解法を與へたものである。

目次

一　はしがき

鐵筋コンクリート構造或は鐵骨構造等所謂剛節結構に對する靜力學的不定應力の解法として、從來應用せられてきた方法に「カスチリアノ氏の最小働の原理による方法」「撓角撓度法」等がある。カスチリアノ氏の原理に發足せる方法は昔から廣く用ひられてきた方法であつて、固定端又は鉸端に不靜定未知量を加へ或は對稱軸にて切り各部を突桁として考へ

未知量を加へたる解法其他種々發案應用せられてきたのであるが、何れにしても皆微積分を含み解法が甚だ複雜である。殊に不對稱構造や不對稱荷重の如き又は數徑間に跨る「バイヤダクト」や數階の建物の如きは此の方法では殆んど解法不可能に近い。撓角撓度法は最近數年間に實用化された方法であつて、此の方法によれば不靜定彎曲率は剛節點の撓角及撓度で表はされ前者の如く高等數學を用ひず只單に一次聯立方程式を解くことによつて總ての問題は解決せられるので現時剛節結構卽ちラーメンの解法として利用大なるものである。併しながら此の方法と雖も數層數徑間の複雜なる架構に對しては計算過程頗る煩雜であつて正確を得るに困難の如く思はる。茲に於て筆者はこれ等複雜なる架構中吾々土木技術者に最も緣故深き高架式架構卽ち單層多徑間架構に對して撓角撓度法の應用擴張による一解法を提案せんとするものである。

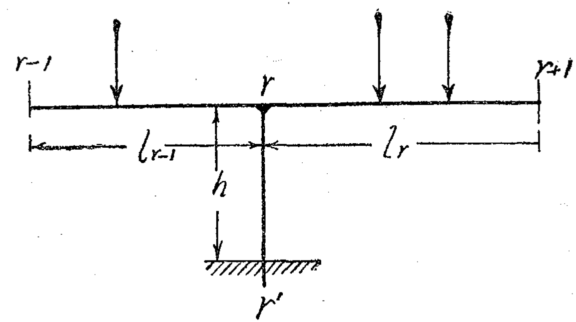
二　三撓角方程式

本論を進めるに先立つて計算を簡單ならしむるために此の如き假定をなす。

1　基礎地盤は沈下を生せないものとす。

2　柱の下端は地盤に緊定せられたものとす。

單層多徑間架構の第 r 番目の剛節點に就て考へる。(第一圖參照)。吾々は基礎地盤は沈下せぬものと假定したから水平部材の撓度は零である。單に柱に對して



第　一　圖

水平撓度がはいるに過ぎない。又柱の下端は地盤に緊定されているから γ' 點の角變位 $\theta_{\gamma'}$ も零でなければならぬ。

剛節點 γ に於て平衡方程式を作れば次の如くである。

$$M_{\gamma\cdot\gamma-1} = 2EK_{\gamma-1}\left\{2\theta_\gamma + \theta_{\gamma-1}\right\} + C_{\gamma\cdot\gamma-1}$$

$$M_{\gamma\cdot\gamma+1} = 2EK_\gamma \left\{2\theta_\gamma + \theta_{\gamma+1}\right\} - C_{\gamma\cdot\gamma+1}$$

$$M_{\gamma\cdot\gamma'} = 2EK_{\gamma'} \left\{2\theta_\gamma - 3R\right\}$$

$\Sigma M_\gamma = 0$　より、

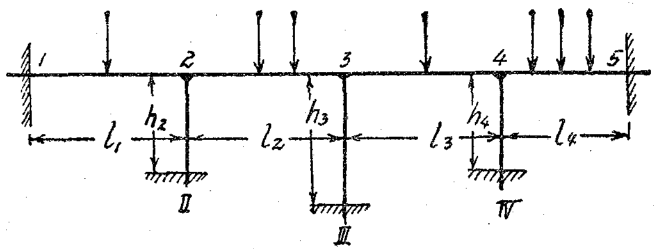
$$〔\mathrm{I}〕\cdots\cdots\cdots\cdots K_{\gamma-1}\theta_{\gamma-1} + 2(K_{\gamma-1} + K_\gamma + K_{\gamma'})\theta_\gamma + K_\gamma\theta_{\gamma+1} + 3K_{\gamma'}.R = \frac{1}{2E}(C_{\gamma\cdot\gamma+1} - C_{\gamma\cdot\gamma-1})$$

上式はクラペロン氏の三彎曲率方程式の連續桁に於けると全く同様に高架式架構の隣接三剛節點に於ける撓角 θ の關係を示す式であつて此の式を三撓角方程式と名付ける。卽ち〔I〕式は高架式架構の各剛節點に於ける撓角 θ を求めるのに廣く應用される一般式である。

三　一撓角方程式

n 個の剛節點を有する高架式架構に於て若し其架構が水平移動を許さざる構造であれば n 個の剛節點に對して n 個の三

撓角方程式が成立する。從つてこれ等nの方程式を聯立に解けば問題は解決される理である。又水平移動可能なる高架式架構に對しては更に架構全體としての平衡方程式を加へかくして（n+1）個の未知量に對して（n+1）個の聯立方程式を解けばよいのである。n の數が少いときは此の解法は



第　二　圖

左程厄介でないがnの數が大なるときはこれを解くことは頗る面倒である。玆に於てか筆者は更に上に誘導した三撓角方程式を變形して單に數値の代入計算によつて簡單に計算することの出來る單一撓角方程式を誘導した。本節に於ては專ら水平移動を許さざる高架式架構に就て述べることとする。（第二圖參照）。

剛節點2に於て三撓角方程式を作れば、

$$2\,(K_1 + K_2 + K_{II})\,\theta_2 + K_2\,\theta_3 = \frac{1}{2E}\left\{C_{2\cdot3} - C_{2\cdot1}\right\}$$

剛節點 3 に於て三撓角方程式を作れば、

$$K_2\,\theta_2 + 2\,(K_2 + K_3 + K_{III})\,\theta_3 + K_3\,\theta_4 = \frac{1}{2E}\left\{(C_{3\cdot4} - C_{3\cdot2})\right\}$$

同様に剛節點４に於て三撓角方程式を作りこれ等を一ケ所に集むれば、

$$
〔\mathrm{II}〕\cdots\cdots\cdots\cdots
\begin{cases}
2\left(K_{I}+K_{2}+K_{II}\right)\theta_{2}+K_{2}\theta_{3} = \dfrac{1}{2E}\left\{C_{2\cdot 3}-C_{2\cdot 1}\right\} \\
K_{2}\theta_{2}+2\left(K_{2}+K_{3}+K_{III}\right)\theta_{3}+K_{3}\theta_{4} = \dfrac{1}{2E}\left\{C_{3\cdot 4}-C_{3\cdot 2}\right\} \\
K_{3}\theta_{3}+2\left(K_{3}+K_{4}+K_{IV}\right)\theta_{4} = \dfrac{1}{2E}\left\{C_{4\cdot 5}-C_{4\cdot 3}\right\}
\end{cases}
$$

〔II〕式に於て各式の初項の係數を以て夫々の式を割れば、

$$
〔\mathrm{II}〕_{a}\cdots\cdots\cdots\cdots
\begin{cases}
\theta_{2}+\dfrac{K_{2}}{2\left(K_{I}+K_{2}+K_{II}\right)}\theta_{3} = \dfrac{C_{2\cdot 3}-C_{2\cdot 1}}{4E\left(K_{I}+K_{2}+K_{II}\right)} \\
\theta_{2}+\dfrac{2\left(K_{2}+K_{3}+K_{III}\right)}{K_{2}}\theta_{3}+\dfrac{K_{3}}{K_{2}}\theta_{4} = \dfrac{C_{3\cdot 4}-C_{3\cdot 2}}{2E\ K_{2}} \\
\theta_{3}+\dfrac{2\left(K_{3}+K_{4}+K_{IV}\right)}{K_{3}}\theta_{4} = \dfrac{C_{4 5}-C_{4 3}}{2E\ K_{3}}
\end{cases}
$$

或は、

$$
〔\mathrm{II}〕_{b}\cdots\cdots\cdots\cdots
\begin{cases}
\theta_{2}+a_{1}\theta_{3} = H_{1} \\
\theta_{2}+b_{1}\theta_{3}+a_{2}\theta_{4} = H_{2} \\
\theta_{3}+b_{2}\theta_{4} = H_{3}
\end{cases}
$$

但し、

$$
〔\mathrm{III}〕\cdots\cdots\cdots\cdots
\begin{cases}
a_1 = \dfrac{K_2}{2(K_1 + K_2 + K_{\mathrm{II}})}, & b_1 = \dfrac{2(K_2 + K_3 + K_{\mathrm{III}})}{K_2} \\[2ex]
a_2 = \dfrac{K_3}{K_2}, & b_2 = \dfrac{2(K_3 + K_4 + K_{\mathrm{IV}})}{K_3} \\[2ex]
H_1 = \dfrac{C_{2\cdot3} - C_{2\cdot1}}{4E(K_1 + K_2 + K_{\mathrm{II}})} & \\[2ex]
H_2 = \dfrac{C_{3\cdot4} - C_{3\cdot2}}{2E K_2} & \\[2ex]
H_3 = \dfrac{C_{4\cdot5} - C_{4\cdot3}}{2E K_3} &
\end{cases}
$$

〔Ⅱ〕$_b$ に於て（1）式と（2）式とから θ_2 を消去すれば、

$$(a_1 - b_1)\,\theta_3 + (-a_2)\,\theta_4 = H_1 - H_2$$

或は

$$\theta_3 + \frac{-a_2}{a_1 - b_1}\,\theta_4 = \frac{H_1 - H_2}{a_1 - b_1}$$

此の式と〔Ⅱ〕$_b$ の（3）式とから θ_3 を消去すれば、

$$\left(\frac{-a_2}{a_1 - b_1} - b_2\right)\theta_4 = \frac{H_1 - H_2}{a_1 - b_1} - H_3$$

玆に於て、

$$
〔\mathrm{IV}〕\cdots\cdots\cdots\cdots
\begin{cases}
\Delta_0 = -1 \\
\Delta_1 = -\left(\dfrac{a_1}{\Delta_0} + b_1\right) \\
\Delta_2 = -\left(\dfrac{a_2}{\Delta_1} + b_2\right)
\end{cases}
$$

と置けば上式は、

$$
〔\mathrm{V}〕\cdots\cdots\cdots\cdots\theta_4 = -\left(\frac{H_1 + \Delta_0 H_2 + \Delta_0 \Delta_1 H_3}{\Delta_0 \Delta_1 \Delta_2}\right) = -\left(\frac{1}{\Delta_0 \Delta_1 \Delta_2} H_1 + \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} H_2 + \frac{1}{\Delta_2} H_3\right)
$$

$$
= -(\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2 + \mu_3 H_3)
$$

但し、

$$
〔\mathrm{VI}〕\cdots\cdots\cdots\cdots
\begin{cases}
\mu_1 = \dfrac{1}{\Delta_0 \Delta_1 \Delta_2} = \dfrac{1}{\prod_{\gamma=0}^{2} \Delta_\gamma} \\
\mu_2 = \dfrac{1}{\Delta_1 \Delta_2} = \dfrac{1}{\prod_{\gamma=1}^{2} \Delta_\gamma} \\
\mu_3 = \dfrac{1}{\Delta_2}
\end{cases}
$$

〔V〕式は剛節點に於ける未知撓角只一個を含むに過ぎない。故に此の式を一撓角方程式と名付ける。θ_4 がわかれば

θ_3, θ_2 は〔II〕$_b$ から直ちに求めることが出來る。

以上は四徑間の場合に就て述べたのであるが徑間數は幾つあつても此の方程式は成立するのである。卽ち n 個の剛節に點對しては、

$$[\mathrm{V}]_a \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \theta_{n+1} = -\left\{\mu_1 \mathrm{H}_1 + \mu_2 \mathrm{H}_2 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \mu_n \mathrm{H}_n\right\} = -\sum_{\gamma=1}^{n} \mu_\gamma \mathrm{H}_\gamma$$

θ がわかれば剛節點に於ける不靜定彎曲率は、撓角撓度法の基本公式から直ちに求むることが出來る。水平移動可能なる場合に就ても全くこれと同樣にして一撓角方程式を得られるのであるが、これに就ては稿を更めて述べることとして玆に略す。

四　む　す　び

以上數節に亙つて高架式架構に對する筆者の考察に就て其の概略を述べたのであるが、これを要するに煩雜な聯立方程式の取り扱ひを要せずして、單に數値の代入計算によつて問題を解決し得たことは、撓角撓度法に對し一進步を與へたものと思ふ。而して此の考察は連續桁に對するクラペロン氏の三彎曲率方程式にも其の儘適用することが出來る（土木建築雜誌第十卷第十一號拙文にあります）のみならずすべての一次聯立方程式の解法として應用廣きものである。

尙この問題に就ては更に硏究の餘地が取り殘されていることゝ思ふ。幸に讀者先輩の御敎示により改良せんことは筆者の切望するところである。