連續桁の計算〔完〕

大野　博

4　四徑間連續桁

5　支點彎曲率

第0支點及第4支點に於ける彎曲率を零とおき、

$$4\,M_1 + M_2 = -\frac{6\,B_1}{l} - \frac{6\,A_2}{l}$$

$$M_1 + 4\,M_2 + M_3 = -\frac{6\,B_2}{l} - \frac{6\,A_3}{l}$$

$$M_2 + 4M_3 = -\frac{6\,B_3}{l} - \frac{6\,A_4}{l}$$

なる聯立方程式より M_1, M_2, M_3 を求め得ることは三徑間の場合同樣である。而して $P=1$ なる荷重を考へ第1支點彎曲率の影響線を求むれば第十六表を得る。

第十六表　M_1 影響線縱距

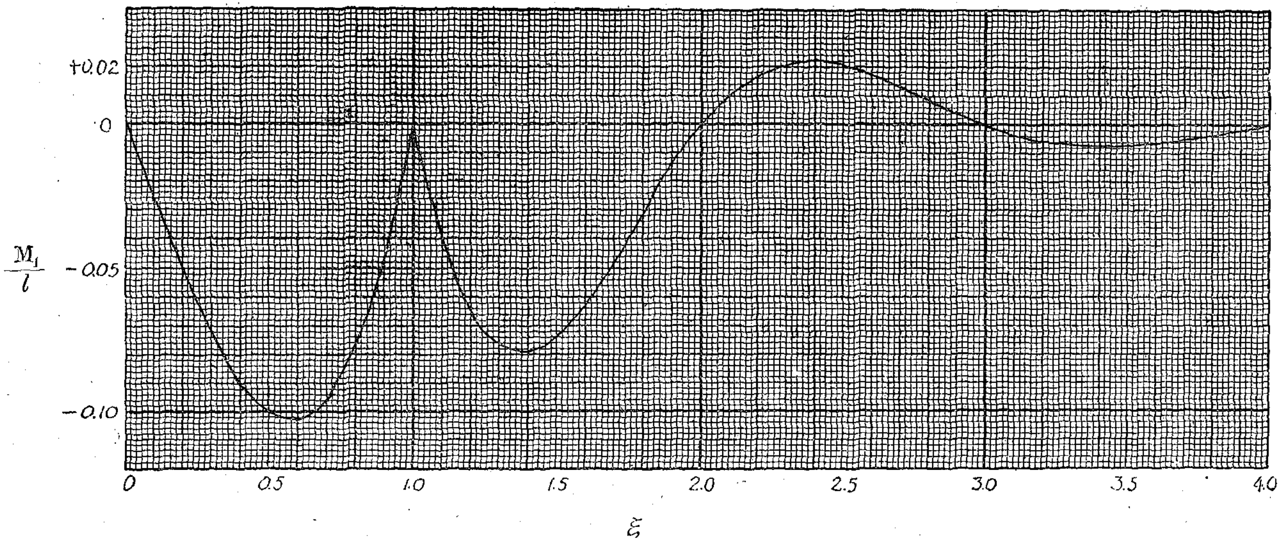
					（第 1 徑間）						
ξ_1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
M_1/l	0	−0.027	−0.051	−0.073	−0.090	−0.101	−0.103	−0.096	−0.077	−0.046	0
					（第 2 徑間）						
ξ_2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
M_1/l	0	−0.039	−0.064	−0.076	−0.079	−0.074	−0.063	−0.048	−0.031	−0.014	0
					（第 3 徑間）						
ξ_3	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
M_1/l	0	+0.0105	+0.0172	+0.0208	+0.0216	+0.0202	+0.0172	+0.0132	+0.0086	+0.0040	0
					（第 4 徑間）						
ξ_4	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
M_1/l	0	−0.0031	−0.0052	−0.0064	−0.0069	−0.0067	−0.0061	−0.0049	−0.0035	−0.0018	0

第三十三圖は M_1 影響線を圖示せるものであるが、第 1~3 徑間に於ては第八表第十九圖、即三徑間連續桁に於ける M_1 影響線と殆ど一致するを見る。

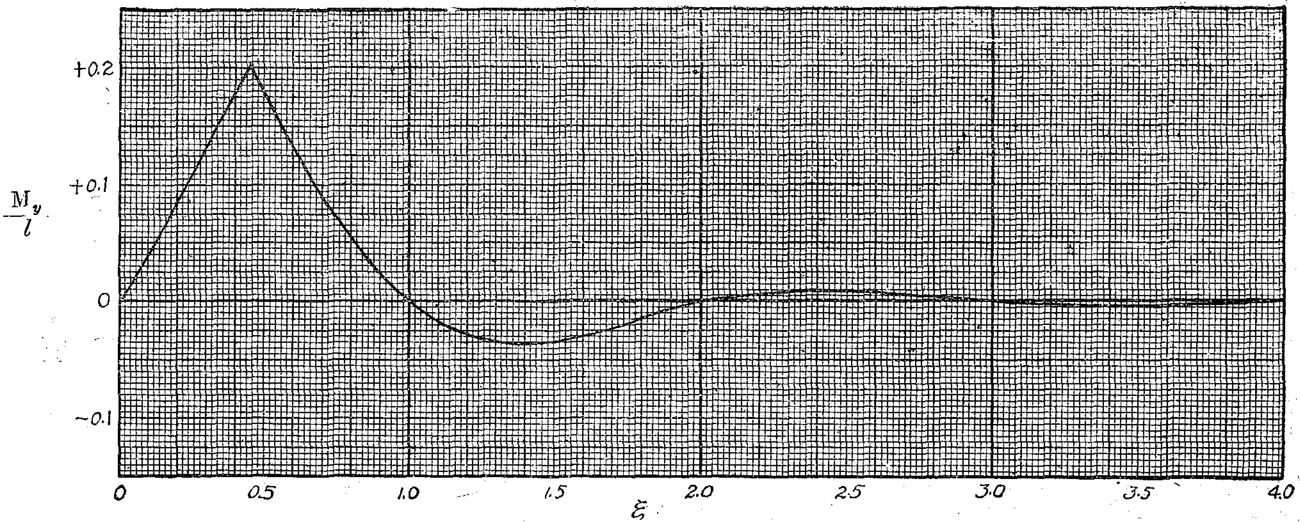
普通主桁又は縱桁の計算に於ては三徑間以上を有するものとしての計算を必要とする場合は少い。又床版の計算に於ては多數の徑間を有する場合と雖も、三徑間としての計算、或は次に述べる無限に多くの徑間を有する連續桁の一部と考へた計算を用ひて十分である。

6　徑間彎曲率

三徑間の場合と同樣な方法により計算すればよいのであるが、最大なる徑間彎曲率は第１徑間に起るべく、而も多くの場合 $\eta_1 = 0.45$ なる點に起るものと考へて大過ない。故に此の點に於ける彎曲率影響線縱距を計算すれば第十七表の如く又第三十四圖は之を圖示せるものである。



第　三　十　三　圖



第　三　十　四　圖

第　十　七　表　$\eta_1 = 0.45$ の點の徑間彎曲率影響線縱距

（第　1　徑　間）

ξ_1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.45	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
M_y/l	0	+0.043	+0.087	+0.132	+0.180	+0 204	+0.180	+0.134	+0.092	+0.055	+0.024	0

（第　2　徑　間）

ξ_2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
M_y/l	0	−0.0175	−0.0286	−0.0343	−0.0355	−0.0332	−0.0281	−0.0214	−0.0139	−0.0064	0

（第　3　徑　間）

ξ_3	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
M_y/l	0	+0.0047	+0.0077	+0.0094	+0.0097	+0.0091	+0.0077	+0.0059	+0.0039	+0.0018	0

（第　4　徑　間）

ξ_4	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.8	1.0
M_y/l	0	−0.0014	−0.0023	−0.0029	−0.0031	−0.0030	−0.0027	−0.0022	−0.0016	−0.0008	0

5　n 徑間連續桁

一般に n 徑間を有する連續桁に於て I 及 l 一定なる場合には Differenzengleichungen を用ひて便利なる場合が多い。第一號 P 147 に於ける一般式（3）は、

$$M_{n-1} + 4M_n + M_{n+1} = -\frac{6}{l}(B_n + A_{n+1})$$

$$\therefore \quad M_{n-1} - 2M_n + M_{n+1} + 6M_n = -\frac{6}{l}(B_n + A_{n+1})$$

即　$M_{n-1} - 2M_n + M_{n+1} = \varDelta^2 M_n$　とすれば、

$$\varDelta^2 M_n + 6M_n = -\frac{6}{l}(B_n + A_{n+1}) \quad \cdots\cdots(61)$$

7　全徑間に p なる等布荷重ある場合

全徑間に p なる强度の等布荷重を滿載するものとすれば、

$$-\frac{6}{l}(B_n + A_{n+1}) = -\frac{pl^2}{2}$$

$$\therefore \quad \varDelta^2 M_n + 6M_n = -\frac{pl^2}{2} \quad \cdots\cdots (62)$$

今 C, a, k, 及 w を定數とし、

$$M_n = Ck^n + a$$

$\varDelta^2 M_n = Cwk^n$ とすれば (62) より、

$$Ck^n(w+6) + 6a = -\frac{pl^2}{2}$$

故に n の如何に拘らず此式が滿足される爲には、

$$a = -\frac{pl^2}{12} \quad 及 \quad w = -6$$

なることを要する。然るに、

$$\varDelta^2 M_2 = M_{n-1} - 2M_n + M_{n+1}$$

$$= Ck^{n-1} - 2Ck^n + Ck^{n+1}$$

又 $\quad Cwk^n = -6Ck^n$

$$\therefore \quad k^{-1} - 2 + k = -6$$

$$\therefore \quad k^2 + 4k + 1 = 0 \quad \cdots\cdots (63)$$

$$\therefore \quad k_1 = -2 + \sqrt{3} = -0.268 = k, \quad k_2 = -2 - \sqrt{3} = k^{-1} \quad \cdots\cdots (64)$$

即 $$M_n = C_1 k^n + C_2 k^{-n} - \frac{p l^2}{12} \quad \cdots\cdots (65)$$

今徑間數を m とし、兩端自由支承とすれば $M_0 = 0$, $M_m = 0$ でなければならない。其の爲には (65) の C_1 及 C_2 は次の値を取ることを要する。即、

$$M_0 = 0 = C_1 + C_2 - \frac{p l^2}{12}$$

$$M_m = 0 = C_1 k^m + C_2 k^{-m} - \frac{p l^2}{12}$$

故に

$$C_2 = C_1 k^m, \qquad C_1 = \frac{p l^2}{12} \frac{1}{1 + k^m} \quad \cdots\cdots (66)$$

即 $$M_n = \frac{p l^2}{12} \left(\frac{k^{\frac{m}{2}-n} + k^{n-\frac{m}{2}}}{k^{\frac{m}{2}} + k^{-\frac{m}{2}}} - 1 \right) \quad \cdots\cdots (67)$$

9　一徑間のみに荷重ある場合

第 $(\gamma+1)$ 徑間、即ち第 γ 支點と第 $(\gamma+1)$ 支點との間にのみ荷重があるものとすれば、

$$A_1 = A_2 = \cdots\cdots = A_\gamma = A_{\gamma+2} \cdots\cdots = A_{m-1} = A_m = 0$$

$$B_1 = B_2 = \cdots\cdots = B_\gamma = B_{\gamma+2} \cdots\cdots = B_{m-1} = B_m = 0$$

故に、第 γ 及第 $(\gamma+1)$ 支點を除くすべての支點に於ては次の式が成立つ。

$$\Delta^2 M_n + 6M_n = 0$$

故に前節と同様にして、$n \leqq \gamma$ に對しては、

$$M_n = C_1 k^n + C_2 k^{-n}$$

又、$n \geqq \gamma+1$ に對しては、

$$M_n = C_3 k^n + C_4 k^{-n}$$

但　$k = -2 + \sqrt{3} = -0.268$

然るに兩端支點自由支承とすれば $M_0 = 0$, $M_m = 0$, なることを要し、猶第 γ 及第 $(\gamma+1)$ 支點に於ては夫々次の方程式を滿足することを要する。

$$\left.\begin{array}{l} M_{\gamma-1} + 4M_\gamma + M_{\gamma+1} = -\dfrac{6A_{\gamma+1}}{l} \\ M_\gamma + 4M_{\gamma+1} + M_{\gamma+2} = -\dfrac{6B_{\gamma+1}}{l} \end{array}\right\} \cdots\cdots(68)$$

故に之等の式より $C_1 C_2 C_3$ 及 C_4 を決定することが出來る。即、

$$\because\ M_0 = C_1 + C_2 = 0 \qquad \therefore\ C_2 = -C_1$$

$$M'_m = C_3 k^m + C_4 k^{-m} = 0 \qquad \therefore \quad C_4 = -C_3 k^{2m}$$

故に　$n \leqq \gamma$　に對し　$M_n = C_1 (k^n - k^{-n}) = \varphi(n)$

　　　$n \geqq \gamma + 1$　に對し　$M_n = C'_3 (k^n - k^{2m-n}) = \varphi_1(n)$

とすれば (68) より、

$$\varphi(\gamma - 1) + 4\varphi(\gamma) + \varphi_1(\gamma + 1) = -\frac{6A_{\gamma+1}}{l}$$

$$\varphi(\gamma) + 4\varphi_1(\gamma + 1) + \varphi_1(\gamma + 2) = -\frac{6B_{\gamma+1}}{l}$$

然るに φ 及 φ_1 には、

$$\varphi(\gamma - 1) + 4\varphi(\gamma) + \varphi(\gamma + 1) = 0$$

$$\varphi_1(\gamma) + 4\varphi_1(\gamma + 1) + \varphi_1(\gamma + 2) = 0$$

なる關係があるから、

$$-\varphi(\gamma + 1) + \varphi_1(\gamma + 1) = -\frac{6A_{\gamma+1}}{l}$$

$$\varphi(\gamma) - \varphi_1(\gamma) = -\frac{6B_{\gamma+1}}{l}$$

即ち、

$$-C_1 (k^{\gamma+1} - k^{-\gamma-1}) + C_3 (k^{\gamma+1} - k^{2m-\gamma-1}) = -\frac{6A_{\gamma+1}}{l}$$

$$C_1\left(k^{\gamma}-k^{-\gamma}\right)-C_3\left(k^{\gamma}-k^{2m-\gamma}\right)=-\frac{6B_{\gamma+1}}{l}$$

故に

$$\left.\begin{aligned}C_1&=-\frac{k}{(k^2-1)(k^{2m}-1)}\left\{\frac{6A_{\gamma+1}}{l^2}\left(k^{\gamma}-k^{2m-\gamma}\right)+\frac{6B_{\gamma+1}}{l^2}\left(k^{\gamma+1}-k^{2m-(\gamma+1)}\right)\right\}l\\C_3&=-\frac{k}{(k^2-1)(k^{2m}-1)}\left\{\frac{6A_{\gamma+1}}{l^2}\left(k^{\gamma}-k^{-\gamma}\right)+\frac{6B_{\gamma+1}}{l^2}\left(k^{\gamma+1}-k^{-(\gamma+1)}\right)\right\}l\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(69)$$

即ち　$0\leqq n\leqq\gamma$　に對しては、

$$M_n=-\frac{k\left(k^n-k^{-n}\right)}{(k^{2m}-1)(k^2-1)}\left\{\frac{6A_{\gamma+1}}{l^2}\left(k^{\gamma}-k^{2m-\gamma}\right)+\frac{6B_{\gamma+1}}{l^2}\left(k^{\gamma+1}-k^{2m-(\gamma+1)}\right)\right\}l\cdots\cdots(70_1)$$

$\gamma+1\leqq n<m$　に對しては、

$$M_n=-\frac{k\left(k^n-k^{2m-n}\right)}{(k^{2m}-1)(k^2-1)}\left\{\frac{6A_{\gamma+1}}{l^2}\left(k^{\gamma}-k^{-\gamma}\right)+\frac{6B_{\gamma+1}}{l^2}\left(k^{\gamma+1}-k^{-(\gamma+1)}\right)\right\}l\cdots\cdots(70_2)$$

9　M_n　影響線

今第 $(\gamma+1)$ 徑間に於て第 γ 支點より $x=\xi l$ なる點に集中荷重 $P=1$ があるものとすれば、(7) 及 (8) により、

$$A_{\gamma+1}=\frac{1}{6}\xi l^2(1-\xi)(2-\xi)\cdots\cdots(71)$$

$$B_{\gamma+1}=\frac{1}{6}\xi l^2(1-\xi)(1+\xi)\cdots\cdots(72)$$

之を（70）に入れれば、此の荷重狀態に於ける任意の M_n を得るのである。故に今 n を與へられたるものとし，M_n の影響線を求める爲には、（70）に夫々の徑間て相當する γ を入れて計算すればよい。但し（70_1）は荷重のある徑間の左支點及之より左のすべての支點彎曲率の計算に用ふる式であるから、第 n 支點より右方の影響線の計算に用ふべく、（70_2）は同樣に第 n 支點より左方の影響線の計算に用ふべきである。而して M_n 影響線と M_{m-n} 影響線とは裏返しに重ねれば全く一致すべきである。今（70_2）式を用ひ第 n 支點より左の M_n 影響線を計算し、同じ式を用ひて第（m－n）支點より左の M_{m-n} 影響線を計算し、後者を裏返して第 n 支點の右側に繋げば M_n の全影響線を求めることが出來るから、（70_1）及（70_2）式の中何れか一方を用ひて差支ない。

故に茲に（70_2）式を取り、k^{2m} は 1 に比し小なるを以て之を無視し少しく變形すれば、

$$\left.\begin{aligned} M_n &= C(\gamma)\left\{k^{n-\gamma}-k^{2m-n-\gamma}\right\} l \\ C(\gamma) &= \frac{k}{k^2-1}\left\{\frac{6A_{\gamma+1}}{l^2}(k^{2\gamma}-1)+\frac{6B_{\gamma+1}}{l^2}(k^{2\gamma+1}-k^{-1})\right\} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(73)$$

（73）に於て $\gamma=\infty$ とすれば、

$$C(\infty)=\frac{1}{1-k^2}\left\{k\frac{6A_{n+1}}{l^2}+\frac{6B_{n+1}}{l^2}\right\}\cdots\cdots(74)$$

となる。又夫々 k の値を入れて計算すれば、

$$\left.\begin{aligned}C(0) &= \frac{6B_{n+1}}{l^2}\\ C(1) &= 1.072\frac{6B_{n+1}}{l^2} - 0.268\frac{6A_{n+1}}{l^2}\\ C(2) &= 1.077\frac{6B_{n+1}}{l^2} - 0.287\frac{6A_{n+1}}{l^2}\\ C(\infty) &= 1.077\frac{6B_{n+1}}{l^2} - 0.288\frac{6A_{n+1}}{l^2}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(75)$$

卽 $C(\gamma)$ の値は速に $C(\infty)$ に近づき、$\gamma>1$ なる場合にはすべて $C(\infty)$ を以て $C(\gamma)$ に代用して差支ない。

6　一方へ無限に連る連續桁

10　M_1　影　響　線

第0支點に一端を有し右方へ無限に連る連續桁の、第1支點彎曲率 M_1 の影響線は次の様にして求められる。

第1徑間に對しては (73) 式に於て、$m=\infty$, $n=1$, $\gamma=0$ とし (72) 式の B_1 を用ひれば、

$$M_1 = \frac{6B_1}{l^2}\,kl = k\xi(1-\xi^2)\,l \quad \cdots\cdots(76)$$

第2, 第3等の徑間に對しては、$n=m-1$, とし、なほ夫々 $\gamma=m-2$, $m-3$, 等として計算すればよい。卽、

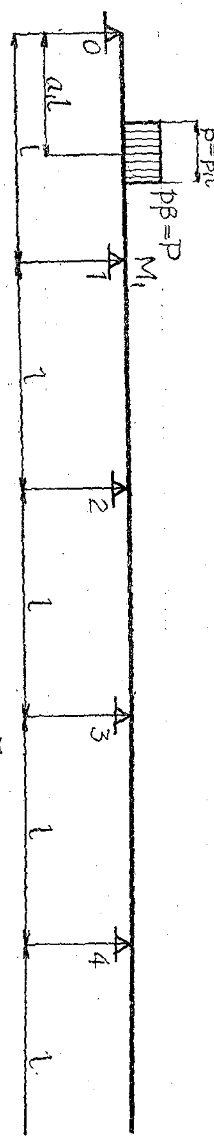
$$\left.\begin{array}{ll} \text{第 2 徑間} & M_l = C(\infty)(k - k^3)\,l \\ \text{第 3 徑間} & M_l = C(\infty)(k^2 - k^4)\,l \\ \text{第 4 徑間} & M_l = C(\infty)(k^3 - k^5)\,l \\ & \text{等} \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots (77)$$

第十八表は之等の式より M_l 影響線縦距を計算したものである。

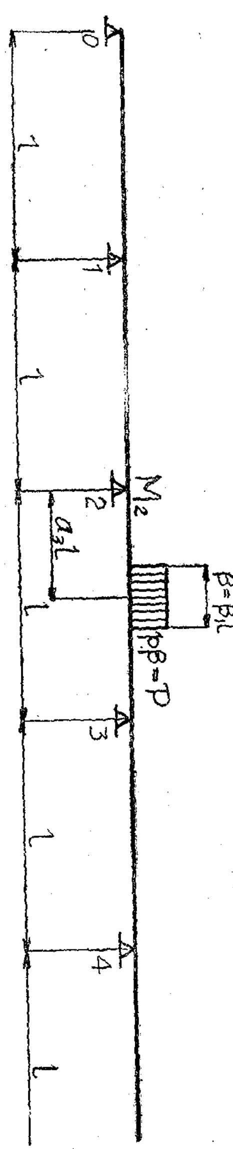
第十八表 M_l 影響線縦距

					（第 1 徑間）						
ξ_1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
M_1/l	0	−0.0265	−0.0515	−0.0732	−0.0900	−0.1005	−0.1029	−0.0957	−0.0772	−0.0458	0
					（第 2 徑間）						
ξ_2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
M_1/l	0	−0.0388	−0.0635	−0.0762	−0.0789	−0.0737	−0.0626	−0.0476	−0.0308	−0.0143	0
					（第 3 徑間）						
ξ_3	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
M_1/l	0	+0.0104	+0.0170	+0.0204	+0.0211	+0.0197	+0.0168	+0.0128	+0.0083	+0.0038	0
					（第 4 徑間）						
ξ_4	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
M_1/l	0	−0.0028	−0.0046	−0.0055	−0.0057	−0.0053	−0.0045	−0.0034	−0.0022	−0.0010	0

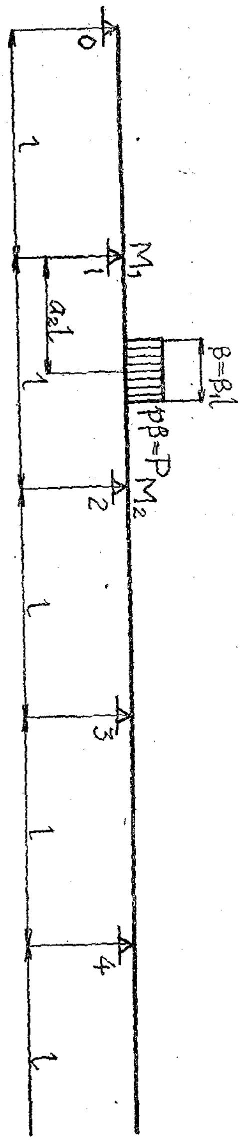
以 下 略



第三十五圖



第三十六圖



第三十七圖

11 部分等布荷重ある場合の M_1 及 M_2

最後に部分等布荷重ある場合に於ける M_1 及 M_2 に關し、Fr. Bleich 氏の "Theorie und Berechnung der eisernen Brücken" 中に示す二三の式を簡單に紹介して本稿を終りたいと思ふ。詳細は同書 358～364 頁を參照せられたい。

第三十五圖に示す如く、第 1 徑間に $\beta=\beta_1 l$ に等布する强度 p $(p\beta=P)$ なる部分等布荷重のある場合には、(76) 式を用ひて、

$$M_1 = pl^2 k \int_{\alpha_1-\frac{\beta l}{2}}^{\alpha_1+\frac{\beta l}{2}} \xi (1-\xi^2)\, d\xi = -0.268\, a_1 \left(1 - a_1^2 - \frac{1}{4}\beta_1^2\right) Pl \cdots\cdots (78)$$

M_1 の最大となるべき a_1 は $\dfrac{dM_1}{da_1}=0$ より、$a_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{4-\beta_1^2}$

即						
	β_1	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
	a_1	0.577	0.574	0.565	0.550	0.528	0.500

故に凡そ $a_1=0.55$ と置いて其の誤差は 1% 以內におさまる、故に

$$M_1 = -(0.103-0.038\beta_1^2)Pl \cdots\cdots (79)$$

猶同樣な方法により、第三十六圖の場合は、

$$M_1 = -(0.078-0.029\beta_1^2)\ Pl$$

$$M_2 = -(0,086-0,035\beta_1^2)\ Pl$$

第三十七圖の場合には、

$M_2 = -(0.084-0.034\beta_1^2)\ Pl$ となる。　　(完)