Footing又はGrillageの設計に就て

石　川　時　信

序

擁壁又は鐵筋混凝土基礎工事其他一時的工作物に於て Footing（礎段）又は Grillage（格床）は一般に彈性基礎上に橫はる桁として役計される狀態にあるから其の經濟的設計法に就て Winklar の彈性曲線を應用せる所を記して見たひと思ひます。

內容目次

附　　錄

A　礎段の兩端沈下せざる場合の式の別解

R　Winklar の式の解

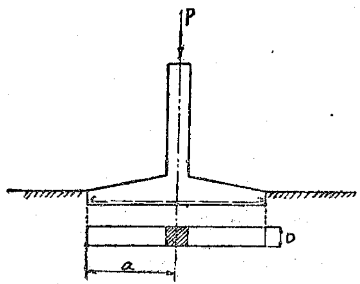
〔一〕概　　說

彈性基礎上に横はる桁は Winkler 彈性曲線を應用して解けば宜しいのであるが其の常數決定法は假へ簡單な事でも算式の省略を行ず簡明に記して素讀に便じた方が良いであらうと思つて幾分くどくどしいと思はるる事をも記する事に致します。

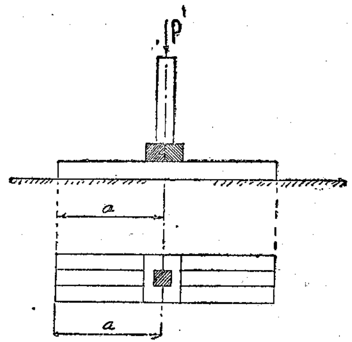
而して計算の順は先に使用する記號を列擧し次に剪力又は力率等の正負の定めをおき、式は一般式を先にし、特別なる場合は後にし、尙續いて設計上に使用すべき簡便なる實用式をも併せて記します。

第一圖　鐵筋混凝土礎段圖

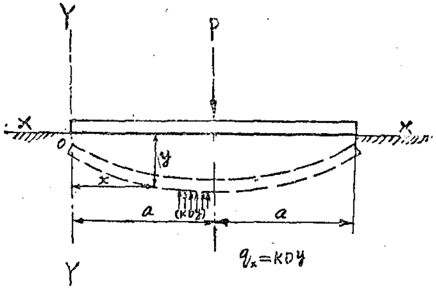
(a)



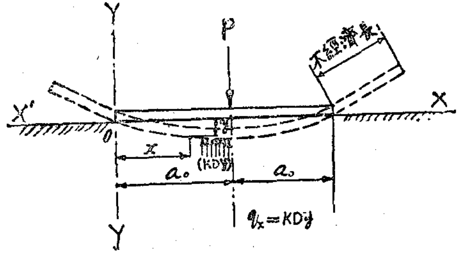
(b)



第二圖　兩端沈下する礎段略圖



第三圖　兩端沈下せざる礎段略圖



計算上の記號（第一圖二圖三圖參照）

P……礎段に加はる單一荷重

a……礎段の長さの二分の一

a_0……同上特殊の場合

D……礎段の幅

x……礎段の左端を原點とし其れより右方距離

y……x 點の沈下

K……地盤の沈下係數

q_x……x 點の土の反壓

M……P の下に於ける彎曲力率

E……礎段の彈性係數

I……同上慣能率

其他の記號は計算の都度說明す。

正負の符號

土の反壓は上向にして正、荷重は下向にして負

剪力は斷面の左側に就て上向を正、下向を負

力率は斷面の左側に就て右廻りを正、左廻を負

沈下は原位置より下るを負。

〔二〕 兩端沈下する場合

斯くすれば礎段に單一荷重Pが加はりたる時は地盤沈下yは負號であるから土の反壓は沈下係數一定なる時は

$$q_x = KD|y| = -KDy$$ であるから剪力Qは

$$Q = \int q_x \, dx$$

$$\therefore \quad \frac{dM}{dx} = Q = \int q_x \, dx$$

$$\therefore \quad \frac{d^2M}{dx^2} = \frac{dQ}{dx} = q_x$$

然るに

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M \cdots\cdots\cdots \text{(yは負號を持つ)}$$

$$\therefore \quad EI \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{dM}{dx} = \int q_x dx$$

$$\therefore \quad EI \frac{d^4y}{dx^4} = q_x = -KDy$$

或は

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{KD}{EI} y = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

是即ち彈性基礎上に於ける礎段に對する彈性方程式にして、本式の解は1831年獨人Winkler氏がDie Theorie der Brückenに記述する所として普く世に知られてゐますが其の結果のみ記すれば、

$$y = e^{\beta x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) + e^{-\beta x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x) \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

但しABCDは常數にして$\beta = \sqrt[4]{KD/EI}$であります。而して本式が礎段の彎曲狀態を滿足するためには其の彎曲狀況に應ずる樣常數ABCDの値を決定しなければならぬから順序として2式及其第三微分係數までを次の如く配列します。

$$y = e^{\beta x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) + e^{-\beta x}(C\cos\beta x + D\sin\beta x) \cdots \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy}{dx} = \beta\Big[e^{\beta x}\big\{A(-\sin\beta x + \cos\beta x) + B(\cos\beta x + \sin\beta x)\big\} + e^{-\beta x}\big\{C(-\sin\beta x - \cos\beta x) + D(\cos\beta x - \sin\beta x)\big\}\Big] \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\beta^2\left\{e^{\beta x}(-A\sin\beta x+B\cos\beta x)+e^{-\beta x}(C\sin\beta x-D\cos\beta x)\right\} \cdots\cdots$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=2\beta\left[e^{\beta x}\left\{A(-\cos\beta x-\sin\beta x)+B(-\sin\beta x+\cos\beta x)\right\}+e^{-\beta x}\left\{C(\cos\beta x-\sin\beta x)+D(\sin\beta x+\cos\beta x)\right\}\right]\cdots \quad (3)$$

礎段は荷重Pの左右對稱であるから其の左端に於ては力率及剪力は零であり又荷重Pの下に於ては彈性曲線への切線は水平であり、且つ荷重の下では剪力はPの二分の一に等しい譯であるから次の樣になる。

$$\left.\begin{array}{lll} \text{i)} & x=0 \text{ なる時} & \dfrac{d^2y}{dx^2}=0 \\ \text{ii)} & x=0 \text{ なる時} & \dfrac{d^3y}{dx^3}=0 \\ \text{iii)} & x=a \text{ なる時} & \dfrac{dy}{dx}=0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (3^{\circ})$$

* iv) $x=a$ なる時 $EI\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{1}{2}P$)

以上 i) 及 ii) の條件より

$$B-D=0$$
$$-A+B+C+D=0$$

$$\left.\begin{array}{l} \therefore D=B \cdots\cdots \\ \text{又} A=C+2B \cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots (4)$$

(4) を (3) に代入すれば

$$y=e^{\beta x}\left\{(C+2B)\cos\beta x+B\sin\beta x\right\}+e^{-\beta x}(C\cos\beta x+B\sin\beta x) \cdots\cdots$$
$$\frac{dy}{dx}=\beta\left[e^{\beta x}\left\{(C+2B)(-\sin\beta x+\cos\beta x)+B(\cos\beta x-\sin\beta x)\right\}+e^{-\beta x}\left\{C(-\sin\beta x-\cos\beta x)+B(\cos\beta x-\sin\beta x)\right\}\right]\cdots\cdots$$
$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\beta^2\left[e^{\beta x}\left\{-(C+2B)\sin\beta x+B\cos\beta x\right\}+e^{-\beta x}\left\{C\sin\beta x-B\cos\beta x\right\}\right]\cdots\cdots$$
$$\frac{d^3y}{dx^3}=2\beta^3\left[e^{\beta x}\left\{(C+2B)(-\cos\beta x-\sin\beta x)+B(-\sin\beta x+\cos\beta x)\right\}+e^{-\beta x}\left\{C(\cos\beta x-\sin\beta x)+B(\sin\beta x+\cos\beta x)\right\}\right] \quad (5)$$

本式を尚 C の掛りたる項と B の掛りたる項とに分括すれば、

$$\left.\begin{aligned}
y &= C\cos\beta x(e^{\beta x}+e^{-\beta x})+B\left\{\sin\beta x(e^{\beta x}+e^{-\beta x})+2\cos\beta x e^{\beta x}\right\}\cdots\cdots \\
\frac{dy}{dx} &= \beta\left[C\left\{\cos\beta x(e^{\beta x}-e^{-\beta x})-\sin\beta x(e^{\beta x}+e^{-\beta x})\right\}+B\left\{-\sin\beta x(e^{\beta x}+e^{-\beta x})+\cos\beta x(e^{\beta x}+e^{-\beta x})+2\cos\beta x e^{\beta x}\right\}\right]\cdots\cdots \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= 2\beta^2\left[-C\sin\beta x(e^{\beta x}-e^{-\beta x})+B\left\{\cos\beta x(e^{\beta x}-e^{-\beta x})-2\sin\beta x e^{\beta x}\right\}\right]\cdots\cdots \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= -2\beta^3\left[C\left\{\sin\beta x(e^{\beta x}+e^{-\beta x})+\cos\beta x(e^{\beta x}-e^{-\beta x})\right\}+B\left\{\sin\beta x(e^{\beta x}-e^{-\beta x})+\cos\beta x(e^{\beta x}-e^{-\beta x})+2\sin\beta x e^{\beta x}\right\}\right]\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\cdots(6)$$

今次の様に双曲線函數を使ふことにする

$$\left.\begin{aligned}
2\sinh\beta x &= e^{\beta x}-e^{-\beta x} \\
2\cosh\beta x &= e^{\beta x}+e^{-\beta x} \\
\sinh\beta x+\cosh\beta x &= e^{\beta x}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)$$

然らば (6) 式は

$$\left.\begin{aligned}
y &= 2\left\{C\cos\beta x\cosh\beta x+B(\sin\beta x\cosh\beta x+\cos\beta x\sinh\beta x+\cos\beta x\cosh\beta x)\right\}\cdots\cdots \\
\frac{dy}{dx} &= 2\beta\left\{C(\cos\beta x\sinh\beta x-\sin\beta x\cosh\beta x)+B\ \cos\beta x\sinh\beta x-\sin\beta x\cosh\beta x+2\cos\beta x\cosh\beta x)\right\}\cdots\cdots \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= -4\beta^2\left\{C\sin\beta x\sinh\beta x+B(\sin\beta x\sinh\beta x+\sin\beta x\cosh\beta x-\cos\beta x\sinh\beta x)\right\}\cdots\cdots \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= -4\beta^3\left\{C(\sin\beta x\cosh\beta x+\cos\beta x\sinh\beta x)+B(2\sin\beta x\sinh\beta x+\sin\beta x\cosh\beta x+\cos\beta x\sinh\beta x\right\}\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\ 8)$$

又前掲 (3。) に示す (iii) の條件より (8) 式中で

$$\frac{dy}{dx}=2\beta\left\{C(\cos\beta a\sinh\beta a-\sin\beta a\cosh\beta a)+B(\cos\beta a\sinh\beta a-\sin\beta a\cosh\beta a+2\cos\beta a\cosh\beta a)\right\}=0$$

$$\therefore C=\frac{\sin\beta a\cosh\beta a-\cos\beta a\sinh\beta a-2\cos\beta a\cosh\beta a}{\cos\beta a\sinh\beta a-\sin\beta a\cosh\beta a}B=\gamma B \quad\cdots\cdots(9)$$

(9) を (8) 式中の第四段に代入すれば

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-4\beta^3B\left\{\gamma(\sin\beta x\cosh\beta x+\cos\beta x\sinh\beta x+2\sin\beta x\sinh\beta x+\sin\beta x\cosh\beta x+\cos\beta x\sinh\beta x\right\}$$

然るに前掲 ($3_\circ$) に示す iv) の條件では $x=a$ なる時 $EId^3y/dx^3=P/_2$ なるを以て

$$EI\frac{d^3y}{dx^3}=-4EI\beta^3B\left\{\gamma(\sin\beta a\cosh\beta a+\cos\beta a\sinh\beta a)+2\sin\beta a\sinh\beta a+\sin\beta a\cosh\beta a+\cos\beta a\sinh\beta a\right\}=\frac{1}{2}P$$

$$\therefore\quad B=-\frac{P}{8\beta^3EI\{\gamma(\sin\beta a\cosh\beta a+\cos\beta a\sinh\beta a)+2\sin\beta a\sinh\beta a+\sin\beta a\cosh\beta a+\cos\beta a\sinh\beta a\}}$$

$$=-\frac{P}{8\beta^3EI(\gamma\mu+\delta)}\quad\cdots\cdots(10)$$

但し (9) 及 (10) に於て

$$\left.\begin{aligned}\gamma&=\frac{\sin\beta a\cosh\beta a-\cos\beta a\sinh\beta a-2\cos\beta a\cosh\beta a}{\cos\beta a\sinh\beta a-\sin\beta a\cosh\beta a}\cdots\cdots\\ \mu&=\sin\beta a\cosh\beta a+\cos\beta a\sinh\beta a\cdots\cdots\\ \delta&=2\sin\beta a\sinh\beta a+\sin\beta a\cosh\beta a+\cos\beta a\sinh\beta a\cdots\cdots\end{aligned}\right\}(11)$$

依つて (9) 及 (10) の C 及 B を (8) に代入すれば

$$\left.\begin{aligned}
y &= -\frac{P}{4\beta^3 EI\,(\gamma\mu+\delta)}\left\{(\gamma+1)\cos\beta x\cosh\beta x+\sin\beta x\cosh\beta x+\cos\beta x\sinh\beta x\right\}\cdots\cdots\\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{P}{4\beta^3 EI\,(\gamma\mu+\delta)}\left\{\gamma(\cos\beta x\sinh\beta x-\sin\beta x\cosh\beta x-\sin\beta x\cosh\beta x+\cos\beta x\sinh\beta x+2\cos\beta x\cosh\beta x\right\}\\
EI\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{P}{2(\gamma\mu+\delta)}\left\{(\gamma+1)\sin\beta x\sinh\beta x+\sin\beta x\cosh\beta x-\cos\beta x\sinh\beta x\right\}\cdots\cdots\\
EI\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{P}{2(\gamma\mu+\delta)}\left\{\gamma(\sin\beta x\cosh\beta x+\cos\beta x\sinh\beta x)+2\sin\beta x\sinh\beta x+\sin\beta x\cosh\beta x+\cos\beta x\sinh\beta x\right\}
\end{aligned}\right\}\cdots(12)$$

是卽ち礎段の兩端沈下する場合の一般式であるが其の特殊の場合として兩端が沈下せざる場合換言すれば兩端の沈下が丁度零に等しい場合の式を求めて見やう。

〔三〕 兩端沈下せざる場合

(11)なる $\beta a=\pi/2$ ……………………(13)

なる時は *

$$\left.\begin{aligned}
{}^{*}\gamma &= -1\cdots\cdots\\
\mu &= \cosh\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\\
\delta &= 2\sinh\frac{\pi}{2}+\cosh\frac{\pi}{2}\cdots\cdots\\
\text{故に}\ \gamma\mu+\delta &= 2\sinh\frac{\pi}{2}\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(14)$$

なるを以て (12) 式第一段は $\beta x=0$ に於て

$$y=-\frac{P}{4\beta^3\,EI2\sinh\frac{\pi}{2}}\left\{(-1+1)\cos0\cosh0+\sin0\cosh0+\cos0\sinh0\right\}=0$$

であり、又 (12) 式第二段は $\beta x=\pi/2$ に於て

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P}{4\beta^2 EI2\sin\frac{\pi}{2}}\left\{-1\left(\cos\frac{\pi}{2}\sinh\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\cosh\frac{\pi}{2}\right\}-\sin\frac{\pi}{2}\cosh\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\sinh\frac{\pi}{2}\right.$$

$$+\ 2\cos\frac{\pi}{2}\ \cosh\frac{\pi}{2}\Big\}=0$$

であるから兩端が沈下せざる時の一般式は（14）を（12）に代入すれば得られる譯である。即ち

$$\left.\begin{aligned}
y &= -\frac{P}{8\beta^3 EI\sinh\frac{\pi}{2}}(\sin\beta x\cosh\beta x+\cos\beta x\sinh\beta x)\cdots\cdots \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{P}{4\beta^2 EI\sinh\frac{\pi}{2}}(\cos\beta x\cosh\beta x)\cdots\cdots \\
EI\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{P}{4\beta\sinh\frac{\pi}{2}}(\sin\beta x\cosh\beta x-\cos\beta x\sinh\beta x)\cdots\cdots \\
EI\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{P}{2\sinh\frac{\pi}{2}}\sin\beta x\sinh\beta x\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

是即礎段の兩端沈下せざる時の一般式にして單一荷重Pを受けたる場合は礎段の彎曲する範圍はPの左方 a 即ち $\pi/2\beta$ にしてそれより先は彎曲の及ばざるを意味してゐるのである。尙詳言すれば $\beta x=\beta a=\pi/2$ 或は

$$a=\pi/2\beta\ \cdots\cdots\cdots(16)$$

にして、礎段は單一荷重を左右に隔る事 $\pi/2\beta$ までは彎曲すれども、それより先は彎曲する事なく、地表をはなれる傾向ありて、礎段としての有效範圍外のものにして、それより先の長さは如何に長くとも何等効なき不經濟のものでありといふ事が出來る。依つて特に $\pi/2\beta$ を礎段の有效長とし a_0 にて表し a_0 の値を二三の構造に就て計算して見れば次の第一表の如し。但し

$$a_0=\pi\Big/\left\{2\sqrt[4]{(KD)/(4EI)}\right\}$$

K ……土の沈下係數（封度/吋^{2}吋）、 D … 礎段幅（吋）、

E……礎段の彈性係數，（封度/吋²）　I……礎段の慣性能率（吋⁴），$\pi=3{,}14$

第一表　礎段有效長表a_0　（K＝50封度/吋²/吋の場合）

構造	a_0	E	$a=\frac{3}{4}a_0$	$a=\frac{1}{2}a_0$	$a=\frac{1}{4}a_0$
	呎	听	呎	呎	呎
6″×12″I Beam	11.65	30,000,000	8.75	5.825	2.91
75听 T Rail	7.62	〃	5.71	3.81	1.905
8吋　水道管	8.20	14,000,000	6.15	4.10	2.05
12″×12″鐵筋混凝土（理想比）	8.28	2,000,000	6.21	4.14	2.07
12″×12″	7.14	1,000,000	5.80	3.87	1.935

本表に於て見るに礎段有效長 a_0 は相當大にして實際の設計及構造物に於ては、斯くの如き大なる礎段長を用ふる事は少かるべしと雖も、有效長の限度不確定なる時は或は現場工事等に於て思はざる失敗の因を釀さんとも限らないと思ひます。加之礎段長は其の有效長より短い時は短い割合に應じて一層簡便なる經濟的設計をなし得る計算方法ある事次に述ぶる如くであります。

今其の計算方法に就いて次の四つの場合に就て述べん。

〔四〕簡便式

第一　有效礎段長を有する場合

礎段は礎段の中央部に於ける抵抗力率に依りて効を發揮してゐるのであるから中央部の彎曲力率を計算して見る事にする。礎段長が有效長 a_0 であるといふ事は換言すれば礎段の兩端が沈下せざる場合の事であるから其の撓度、傾角、力率、及剪力は（15）式に依りて表はされる。今（15）式を $\beta x=0$ の場合と $\beta x=\pi/2$ との場合に就いて計算すれば次の表の如くなる。

x	$\beta x=0$の場合	$\beta x=\pi/2$の場合
y	0	$-P\cosh(\pi/2)/8\beta^3EI\sinh(\pi/2)$
dy/dx	$-P/4\beta^2EI\sinh(\pi/2)$	
EId^2y/dx^2	0	$P\cosh(\pi/2)/4\beta\sinh(\pi/2)$
$EI\frac{d^3y}{dx^3}$	0	P/2

今礎段中央部に掛る單一荷重Pを996封度とし、礎段の彈性係數Eを3,790,000封度/吋²、慣性能率Iを5,61吋⁴、

地盤の沈下係數 K を 71,5 封度/吋^2 / 吋礎段の幅 D を36吋　とすれば

$$\beta=\sqrt{KD/4EI}=\sqrt{71{,}5\times 36/4\times 3.790{,}000\times 5610}=0{,}0132$$ －吋故に礎段中央部に於ける彎曲力率 M は

$$M=EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P\cosh\frac{\pi}{2}}{4\beta\sinh\frac{\pi}{2}}=\frac{996\times 2.5073}{4\times 0.0132\times 2..993}=20{,}650$$ （吋封度）

第二　礎段長が有效礎段長の四分の三なる場合

此の場合は礎段の兩端沈下する場合であるから（12）式第三段目に依りて礎段中央部の彎曲力率を計算するのであるがその前に $\beta x=3(\pi/2)/4=1.178=67°30'$ より計算を始むるを要す、卽ち次の樣にすれば明瞭である。

$$\beta x=\beta a=1.178=67°30'\ *$$

*とすれば

$\sin\beta a=0{,}9239$	$\sin\beta a\sinh\beta a=1.355$
$\cos\beta a=0{,}38.9$	$\sin\beta a\cosh\beta a=1.640$
$\sinh\beta a=1{,}469$	$\cos\beta a\sinh\beta a=0.5625$
$\cosh\beta a=1{,}777$	$\cos\beta a\cosh\beta a=0.681$

故に（11）式に依りて

$$\gamma=\frac{\sin\beta a\cosh\beta a-\cos\beta a\sinh\beta a-2\cos\beta a\cosh\beta a}{\cos\beta a\sinh\beta a-\sin\beta a\cosh\beta a}=\frac{1.640-0{,}5625-2\times 681}{5.5625-1.640}=0.264$$

$$\mu=\sin\beta a\cosh\beta a+\cos\beta a\sinh\beta a=1.640+0.5625=2.205$$

$$\delta=2\sin\beta a\sinh\beta a+\sin\beta a\cosh\beta a+\cos\beta a\sinh\beta a=2\times 1.355+1.640+0{,}5625=4.9125$$

$$\therefore\ \gamma\mu+\delta=0.264\times 2.2025+4{,}9125=5{,}4935$$

故に（12）式第三段目に依りて

$$M=EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{P}{2\beta(\gamma\mu+\delta)}\left\{(\gamma+1)\sin\beta a\sinh\beta a+\sin\beta a\cosh\beta a-\cos\beta a\sinh\beta a\right\}$$

$$=\frac{996}{2\times0.132\times5.4935}\left\{(0.264+1)1.355+1.640-0.5625\right\}=19,150 \quad (\text{吋封度})$$

第三　礎段長か有效礎段長の二分の一なる場合

此の場合は計算の順序及一般式は第二の場合と全く同じであるが計算上使用する數値は次の通りである。

$$\beta x=\beta a=(^{\pi}/_{2})/_{2}=0,785=45°$$

故に

$\sin\beta a = 0.7071$	$\mathrm{sih}\beta a\,\sinh\beta a=0.614$
$\cos\beta a = 0.7071$	$\mathrm{siu}\beta a\,\cosh\beta a=0.936$
$\sinh\beta a = 0.8682$	$\cos\beta a\,\sinh\beta a=0.614$
$\cosh\beta a = 1.324$	$\cos\beta a\,\sinh\beta a=0.936$ *

* 之等の數値を以て第二の場合の順序の如く計算すれば

$$M = 14,320 \text{ 吋封度}$$

第四　礎段長が有效礎段長の四分の一なる場合

此の場合も第二の場合の如く計算すれば

$$\beta x=\beta a=(^{\pi}/_{2})/_{4}=0.393 \fallingdotseq 22°30'$$

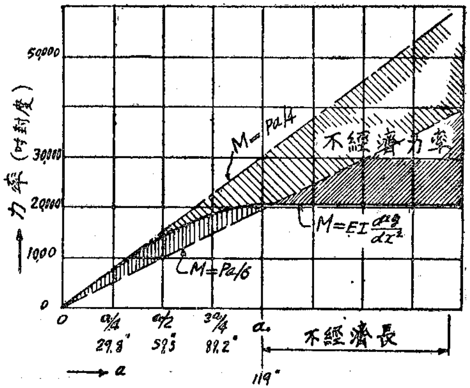
故に

$\sin\beta a = 0,3829$	$\sin\beta a\,\sinh\beta a=0.1545$
$\cos\beta a = 0,9239$	$\sin\beta a\,\cosh\beta a=0.4120$
$\sinh\beta a = 0,4035$	$\cos\beta a\,\sinh\beta a=0.373$
$\cosh\beta a = 1,078$	$\cos\beta a\,\sinh\beta a=0.995$

尙計算の結果のみ記すれば

$$M=EI\frac{d^2y}{dx^2}=7,450 \quad (\text{吋封度})$$

以上第一、第二、第三、第四に計算せる所の礎段の中央部に於ける彎曲力率を圖示せるものは次の第四圖中曲線にて表はされてゐるのである



第四圖

而して、上圖に於て曲線にて示されたるものは礎段長が零より有効礎段長になるまでは中央部の彎曲力率は增大すれども、礎段長が其れより長くなりても中央部の力率增大せざるを示してゐる。礎段長が有効礎段長と等しい時の土の反壓狀態は次に示す如き曲線で表はされる譯であるが

上圖は略三角形であるから次に示す樣に三角形の反壓狀態に就て中央部の彎曲力率を計算して見る。

三角形の反壓の時は中央部の彎曲力率は

$$M = \frac{1}{6} Pa \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (18)$$

であるから a を有效礎段長 a_0 と等しい場合及び a_0 の四分の三、二分の一、四分の一の場合に就て計算すれば

$a = a_0 = {}^{\pi}/_{4}\beta = 3,14/(2 \times 0,0132) = 119$ 吋

なる時は

$$M = \frac{996 \times 119}{6} = 19,750 \quad (\text{吋封度})$$

$a = 3a_0/_4 = 89,2$ 吋なる時は

$$M = \frac{996 \times 89.2}{6} = 14,800 \quad (\text{吋封度})$$

$a = a_0/_2 = 59,5$ 吋なる時は

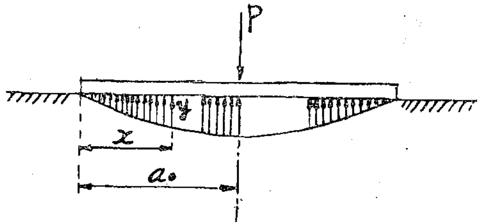
$$M = 9,890 \quad (\text{吋封度})$$

$a = a_0/_4 = 29,8$ 吋なる時は

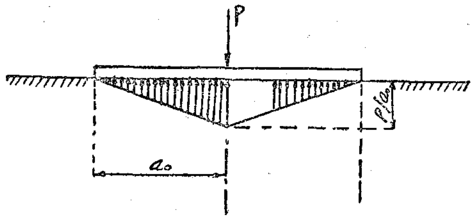
$$M = 4,950 \quad (\text{吋封度})$$

にして之等の M は直線變化にして第四圖に示す如し。

尚又從來一般に礎段の設計に當ては上の反壓狀態は荷重が



第　五　圖



第　六　圖

對稱的なる時は矩形に取つてゐたから矩形反壓に就て礎段中央部の彎曲力率 M を計算して見れば $a = a_0 = 119$ 吋なる時は $M = Pa/_4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$

$$= \frac{1}{4} 996 \times 119 = 26,800 \ (\text{吋封度})(\text{第七圖參照})$$

又 a が a_0 の四分の三、二分の一、四分の一なる時は M は

22,200、14,800、7,420 時封度となる。之等の M を圖示せるものは同じく第四圖の上方の直線變化のものである。今第四圖のものを見れば次の如き結論を下すことが出來る。

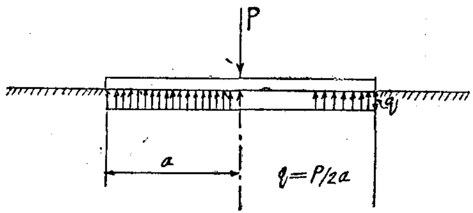
〔五〕結　論

卽ち單一荷重 P を受くる左右對稱の礎段の中央部の彎曲力率は

$$
\left.
\begin{array}{l}
\text{i)}\quad a < \dfrac{a_0}{2} \quad \text{なる時は} \\
\qquad M \doteqdot \dfrac{1}{4} Pa \cdots\cdots \\
\text{ii)}\quad a = \dfrac{3}{4} a_0 \quad \text{なる時は} \\
\qquad M \doteqdot \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{6}\right) Pa = \dfrac{5}{24} Pa \cdots\cdots \\
\text{iii)}\quad a = a_0 \quad \text{なる時は} \\
\qquad M \doteqdot \dfrac{1}{6} Pa \cdots\cdots
\end{array}
\right\} \quad (20)
$$

尙參考のために上の反壓狀態に應ずる礎段中央部の彎曲力率Mを種々なる礎段長に對して計算せる結果を表示せば次の第二表の如し。

第二表　礎段彎曲力表



第　七　圖

礎段長 ／ 力率Mの式	$a=a_0$	$a=\frac{3}{4}a_0$	$a=\frac{1}{2}a_0$	$a=\frac{1}{4}a_0$
$EI\frac{d^2y}{dx^2}$	20,650	19,150	14,320	7,450
$\frac{1}{4}Pa$	29,990	22,200	14,800	7,420
$\frac{1}{6}Pa$	19,750	14,800	9,890	4,950
$\frac{5}{24}Pa$	24,100	18,500	12,350	6,200

表中橫線を引きたるは實用上の簡便式として採用し得べき場合を示す。一例で言へば、礎段長 a が有効礎段長 a_0

の二分の一乃至四分の一以下なる時は $M = Pa/4$ なる式を以て礎段中央部の彎曲力率を計算しても略差支へなきを示す。同様にして $a=3a_0/4$ なる時は $M=5Pa/24$ 等以下同然。(結論參照)。

附　　録

A　礎段の兩端沈下るざる場合の式の別解

礎段の兩端沈下する場合の特殊の場合卽ち兩端の沈下が零なる場合であると言へるは前述概說の章 (12) 式の次に記す通りでありますが、其の解法を始めより兩端の沈下零なりとして出發しても結果に於て相違なき事を次に揭げておきます。

第四圖より次の還境條件があるなる。

$$\left.\begin{array}{llll}
\text{i)} & x=0 & \text{なる時} & y=0 \cdots\cdots \\
\text{ii)} & x=0 & \text{なる時} & \dfrac{d^2y}{dx^2}=0 \cdots\cdots \\
\text{iii)} & x=0 & \text{なる時} & \dfrac{d^3y}{dx^3}=0 \cdots\cdots \\
\text{iv)} & x=a_0 & \text{なる時} & \dfrac{dy}{dx}=0 \cdots\cdots \\
\text{v)} & x=a_0 & \text{なる時} & EI\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{1}{2}P\cdots\cdots
\end{array}\right\}\quad(21)$$

(21)の條件を (3) 式に代入する時は、

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{i)} & A+C=0 \cdots\cdots \\
\text{ii)} & B-D=0 \cdots\cdots \\
\text{iii)} & -A+B+C+D=0 \cdots\cdots \\
\text{iv)} & e^{\beta a_0}\left\{A(-\sin\beta a_0+\cos\beta a_0)+B(\cos\beta a_0+\sin\beta a_0)\right\}+e^{-\beta a_0}\left\{C(-\sin\beta a_0-\cos\beta a_0)+D(\cos\beta a_0-\sin\beta a_0)\right\}=0\cdots \\
\text{v)} & 2EI\beta^3\left[e^{\beta a_0}\left\{A(-\cos\beta a_0-\sin\beta a_0)+B(-\sin\beta a_0+\cos\beta a_0)\right\}+e^{-\beta a_0}\left\{C(\cos\beta a_0-\sin\beta a_0)+D(\sin\beta a_0-\cos\beta a_0)\right\}\right]=\dfrac{1}{2}P
\end{array}\right\}\quad(22)$$

(22) の i) ii) iii) を聯立に解くときは

$$A=B=C=D \cdots\cdots(23)$$

依つて（22）の iv）v）に（23）を代入して常數Aのみを殘す時は

$$\left.\begin{array}{l} A\cos\beta a_0\left(e^{\beta a_0}+e^{-\beta a_0}\right)=0 \cdots\cdots \\ -4\beta^3 A\sin\beta a_0\left(e^{\beta a_0}-e^{\beta a_0}\right)=\frac{1}{2}P \cdots\cdots \end{array}\right\}(24)$$

（24）上段より

$$\beta a_0 = \pi/_2 \cdots\cdots (25)^*$$

*故に（24）下段より

$$A=-\frac{P}{8\beta^3 EI\left(e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}\right)} \cdots\cdots (26)$$

$$=-\frac{P}{16\beta^3\ EI\sinh\frac{\pi}{2}}$$

故に（23）及（26）を以て（3）式を簡單にし双曲線函數を使用する時は

$$\left.\begin{array}{l} y=-\dfrac{P}{8\ \beta^3\ EI\sinh\frac{\pi}{2}}(\sin\beta x\cosh\beta x+\cos\beta x\sinh\beta x) \cdots\cdots \\ \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{P}{4\ \beta^2\ EI\sinh\frac{\pi}{2}}\cos\beta x\cosh\beta x \cdots\cdots \\ EI=\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{P}{4\ \beta^2 EI\sin\frac{\pi}{2}}\sin\beta x\cosh\beta x-\cos\beta x\sinh\beta x \cdots\cdots \\ EI=\dfrac{d^3y}{dx^3}=\dfrac{P}{2\ \sinh\frac{\pi}{2}}\sin\beta x\sinh\beta x \cdots\cdots \end{array}\right\}(27)$$

是卽概說の章の（15）式である。

Winkler　**の式の解**

概說（1）式の解（2）式は Winkler の式として知られてゐますが、これは 1881 年の出版になるものにして、今より五十年前のもので、仲々見る事の出來ぬものであるから止むを得ず次の樣にして解きました。原本を見ざる事なれば解法の道程は合つてゐるか否かわからぬが結果だけは一致してゐます。

概說 (1) 式より

$$\frac{d^4y}{dx^4}+4\beta y^4=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

但し $\beta=\sqrt[3]{KD/4EI}$

(23) 式の一解を

$$y=e^{mx}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

とすれば

$$\frac{d^4y}{dx^4}=m^4e^{mx}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

(29)及(30)を(28)に代入すれば

$$m^4e^{mx}+4\beta^4e^{mx}=0$$

$$\therefore\quad m^4+4\beta^4=0$$

$$\therefore\quad (m^2-2m\beta+2\beta^2)(m^2+2m\beta+2\beta^2)=0$$

$$\therefore\quad m^2-2m\beta+2\beta^2=0$$

或は $m^2+2m\beta+2\beta^2=0$

$$\therefore\quad m=\beta\pm i\beta$$

或は $m=-\beta\pm i\beta.$

依つて

$$m_1=\beta+i\beta.$$

$$m_2=\beta-i\beta.$$

$$m_3=-\beta+i\beta.$$

$$m_4=\beta-i\beta.$$

とすれば (29) は次の四つとなる

$$\left.\begin{aligned}
y_1&=e^{m1x}=e^{\beta x}\times e^{i\beta x}=a^{-\beta x}(\cos\beta.x+i\sin\beta.x\cdots\\
y_2&=e^{m2x}=e^{\beta x}\times e^{-i\beta x}=e^{-\beta x}(\cos\beta.x-i\sin\beta.x\cdots\\
y_3&=e^{m3x}=e^{\beta x}\times e^{i\beta x}=e^{-\beta x}(\cos\beta.x+i\sin\beta.x\cdots\\
y_4&=e^{m4x}=e^{\beta x}\times e^{-i\beta x}=e^{-\beta x}(\cos\beta.x+i\sin\beta.x\cdots
\end{aligned}\right\}(31)$$

從つて (28) 式の一般解は

$$y=C_1y_1+C_2y_2+C_3y_3+C_4y_4\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

但し $C_1\,C_2\,C_3\,C_4$ は常數、(31) を (32) に代入して簡單にすれば

$$y=e^{\beta x}\left\{(C_1+C_2)\cos\beta\cdot x+(C_1-C_2)i\sin\beta.x\right\}$$
$$+e^{-\beta x}\left\{C_3+C_4)\cos\beta.x+(C_3-C_4).i\sin\beta.x\right\}$$
$$=e^{\beta x}(A\cos\beta.x+B\sin\beta.x)+e^{-\beta x}(C\cos\beta x-D\sin\beta.x)(33)$$

是卽概說の (2) 式である。但し ABCD は常數、(虛數關係の演算は「オイラー」の公式參照) 〔完〕