

地震動のシミュレーションとその応用

京都大学工学部 正員 後藤尚男

京都大学工学部 正員 土岐憲三

1. 緒言

地震時における構造物の動的挙動は地震動そのものの特性にも影響されるが、構造物の造られる地盤の状態にも左右されるため、構造物の耐震設計における応答計算に当っては、その地盤に見合った地震動の記録を用いる必要がある。すなわち、同一の地震であっても地盤によって地震波のスペクトル構造が異なることはよく知られているが、現状では広範囲にわたる地盤や基盤ごとの代表的な地震動の記録は十分には得られていないため、耐震設計用の地震波形を人工的に作り出す試みがなされてきた。その一つの方法は地震動をパルスや単一正弦波が時間軸上にランダムに配列されたものとして、あるいはホワイトノイズで表わす方法であるが、その後、地表面における地震動は震源で発生した地震が地盤中を通過したものであることから、これを特定の周波数特性を持った振動系にランダムパルスやホワイトノイズが作用したときの応答として表示することが考えられた^{1),2)}。

一方、構造物の地震応答解析では応答スペクトルがその対象になる場合があるが、これは応答の最大値のみを問題にしているから、応答の持つ他の情報を無視していることになる。しかし、地震動を確率過程であると考えるならば、それに対する構造物の応答に確率量を導入することができ、応答の持つ情報をより多く取り入れた解析が可能となる。このような観点から、ここでは任意のスペクトルを持つ定常ガウス過程を確率変数を用いて直接に表現した後、これに非定常性を与えて得られる弱定常確率過程で地震動を表現し、1自由度の振動系で抽象されるような構造物にこのような地震動が作用したときの応答の時間的な移り変わり、応答の持つ確率量と固有振動数との関係などについて検討と考察を行った。

2. 地震動のシミュレーション

いま、次式のような、確率密度 $p(\eta)$ を持つ確率変数 ω と $0 \sim 2\pi$ で一様に分布するランダム位相角 θ 、時間 t をパラメータとする関数 $g(\eta; t)$ を考える。

$$g(\eta; t) = \cos(\eta t + \theta) \quad (1)$$

上式から明らかのように、 $g(\eta; t)$ は定常確率過程であり、期待値が0であるガウス過程である。

このとき、 $g(\eta; t)$ の自己相関関数 $R_g(t)$ は次式で与えられる。

$$R_g(t) = E[g(\eta; t)] = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} p(\eta) \cos \eta t d\eta \quad (2)$$

さらに、パワースペクトル密度 $S(\omega)$ は $R_g(t)$ のフーリエ変換であるから次式のごとくになる。

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_0^{2\pi} p(\eta) \cos \eta t e^{-i\omega t} d\eta = \frac{\pi}{2} p(\omega) \quad (3)$$

すなわち、式(1)で表わされる確率過程のパワースペクトル密度 $S(\omega)$ は周波数 ω の確率密度 $p(\omega)$ を $\pi/2$ 倍したものであることがわかる。したがって任意のスペクトル密度 $S(\omega)$ を持つ定常確率過

程 $g_N(t)$ は確率密度 $2S(\omega)/\pi$ を持つ N 個の変数 ω_n と ϕ_n とから次式により計算することができる。

$$g_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (4)$$

以上は定常確率過程としての取り扱いであるが、地震動は非定常な現象であるから、地震動を確率過程として表示するには、これを非定常確率過程として考えるのが妥当であろう。このためには、地震動の非定常性、すなわち地震動の強さの時間的変化についての知識が必要であるが、多くの地震記録についてのこのような解析は未だ十分ではなく、今後の研究に待たねばならない問題である。

そこで、ここでは式(1)で表わされる定常確率過程 $g(\tau; t)$ に確定時間関数 $f(t)$ を乗じたものを地震加速度 $\ddot{y}(t)$ とした。すなわち

$$\ddot{y}(t) = f(t) g(\tau; t) = a t \exp(-\alpha t) \cos(\tau t + \phi) \quad (5)$$

ここに、 a, α はいずれも定数である。 $g(\tau; t)$ はガウス過程であるから $\ddot{y}(t)$ もまた同じくガウス過程であり、式(1), (5) から

$$E[g(\tau; t)] = E[\ddot{y}(t)] = 0 \quad (6)$$

が成立する。また、 $\ddot{y}(t)$ の自己共変量 $\chi_{\ddot{y}\ddot{y}}(t_1, t_2)$ は

$$\begin{aligned} \chi_{\ddot{y}\ddot{y}}(t_1, t_2) &= E[\ddot{y}(t_1)\ddot{y}(t_2)] \\ &= \frac{1}{2} a^2 t_1 t_2 \exp\{-\alpha(t_1+t_2)\} \int_0^{\infty} p(\tau) \cos \tau(t_1-t_2) d\tau \end{aligned} \quad (7)$$

となる。したがって $\ddot{y}(t)$ の2乗平均 $\sigma_{\ddot{y}}^2$ は式(7)から次式で与えられる。

$$\sigma_{\ddot{y}}^2 = \chi_{\ddot{y}\ddot{y}}(t, t) = \frac{1}{2} a^2 t^2 \exp(-2\alpha t) \quad (8)$$

3. 1質点系の応答

1自由度の振動系で抽象できるような構造物に、式(5)で表わされる地震動が作用したときの応答について検討を進める。地震動加速度 $\ddot{y}(t)$ に対する1質点系の応答変位 $x(t)$ は周知のごとく次式で表わされる。

$$x(t) = - \int_0^t h(t-\tau) \ddot{y}(\tau) d\tau \quad (9)$$

$$\text{ここに、} \quad h(t) = \frac{1}{\omega_d} \exp(-\zeta t) \sin \omega_d t \quad (t \geq 0) \quad (10)$$

$$\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2} \omega_0, \quad \omega_0^2 = k/m, \quad \zeta = c/2m\omega_0$$

であり、 m, k, c はそれぞれ、質量、バネ定数、減衰係数である。また、応答速度、応答加速度はそれぞれ、

$$\dot{x}(t) = - \int_0^t \dot{h}(t-\tau) \ddot{y}(\tau) d\tau \quad (11)$$

$$\ddot{x}(t) = - \int_0^t \ddot{h}(t-\tau) \ddot{y}(\tau) d\tau - \ddot{y}(t) \quad (12)$$

となる。式(9), (11), (12) において $\ddot{y}(t)$ はガウス過程であり、その平均値は0であるから、応答 $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)$ もまた平均値0のガウス過程となる。

つまり、応答変位 $x(t)$ の自己共変量 $\chi_{xx}(t_1, t_2)$ は

$$\chi_{xx}(t_1, t_2) = E\{[x(t_1)][x(t_2)]\}$$

$$= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \chi_{ijij}(t_1, t_2) h(t_1 - t_1) h(t_2 - t_2) dt_1 dt_2 \quad (13)$$

となり、これに先に得た式(7)を用いると次式が得られる。

$$\chi_{xx}(t_1, t_2) = \frac{a^2}{2} \int_0^\infty \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \tau_1 \tau_2 \exp\{-\alpha(\tau_1 + \tau_2)\} h(t_1 - \tau_1) h(t_2 - \tau_2) p(\eta) \cos \eta(t_1 - t_2) d\tau_1 d\tau_2 d\eta \quad (14)$$

ここで、 $I_c(t; \eta) = \int_0^t \tau \exp(-\alpha\tau) h(t-\tau) \cos \eta\tau d\tau$, $I_s(t; \eta) = \int_0^t \tau \exp(-\alpha\tau) h(t-\tau) \sin \eta\tau d\tau$ (15), (16)

なる表示を用いると、式(14)は結局次式のごとくになる。

$$\chi_{xx}(t_1, t_2) = \frac{a^2}{2} \left\{ \int_0^\infty p(\eta) I_c(t_1; \eta) I_c(t_2; \eta) d\eta + \int_0^\infty p(\eta) I_s(t_1; \eta) I_s(t_2; \eta) d\eta \right\} \quad (17)$$

したがって、応答変位 $x(t)$ の二乗平均値 σ_x^2 は次式で与えられる。

$$\sigma_x^2 = \chi_{xx}(t, t) = \frac{a^2}{2} \int_0^\infty p(\eta) \{ I_c^2(t; \eta) + I_s^2(t; \eta) \} d\eta \quad (18)$$

また、応答速度 $\dot{x}(t)$ 、応答加速度 $\ddot{x}(t)$ の自己共変量、相互共変量はそれぞれ

$$\chi_{\dot{x}\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \chi_{xx}(t_1, t_2), \quad \chi_{\ddot{x}\ddot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \chi_{\dot{x}\dot{x}}(t_1, t_2)$$

$$\chi_{x\dot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} \chi_{xx}(t_1, t_2), \quad \chi_{\dot{x}\ddot{x}}(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} \chi_{\dot{x}\dot{x}}(t_1, t_2)$$

を与えられ、 $\dot{x}(t)$ 、 $\ddot{x}(t)$ の二乗平均 $\sigma_{\dot{x}}^2$ 、 $\sigma_{\ddot{x}}^2$ は次式のごとくになる。

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \chi_{\dot{x}\dot{x}}(t, t) = \frac{a^2}{2} \int_0^\infty p(\eta) \{ \dot{I}_c^2(t; \eta) + \dot{I}_s^2(t; \eta) \} d\eta \quad (19)$$

$$\sigma_{\ddot{x}}^2 = \chi_{\ddot{x}\ddot{x}}(t, t) = \frac{a^2}{2} \left[\int_0^\infty p(\eta) \{ \ddot{I}_c^2(t; \eta) + \ddot{I}_s^2(t; \eta) \} d\eta + 2t \exp(-\alpha t) \left\{ \int_0^\infty p(\eta) \ddot{I}_c(t; \eta) \cos \eta d\eta + \int_0^\infty p(\eta) \ddot{I}_s(t; \eta) \sin \eta d\eta \right\} + t^2 \exp(-2\alpha t) \right] \quad (20)$$

4. 確率スペクトル

確率過程 $x(t)$ が $x(t) = \xi$ を正の勾配を越える単位時間当りの回数 $N_+(\xi, t)$ は次式で与えられる³⁾

$$N_+(\xi, t) = \int_0^t \dot{x}(t) p_{\xi|\dot{x}\ddot{x}}(\xi, \dot{x}, \ddot{x}) d\dot{x} \quad (21)$$

ここに、 $p_{\xi|\dot{x}\ddot{x}}(\xi, \dot{x}, \ddot{x})$ は ξ, \dot{x} に関する同時確率密度関数である。いま、 $x(t)$ が応答変位とすれば、前述のごとく $x(t)$ 、 $\dot{x}(t)$ はガウス過程であるから、 $p_{\xi|\dot{x}\ddot{x}}(\xi, \dot{x}, \ddot{x})$ は (2) のガウス同時確率密度関数を用いることができる。これを式(21)に代入すると、

$$N_+(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x} \exp\left\{-\frac{1}{2} \left(\frac{\xi}{\sigma_x}\right)^2\right\} \left\{ \sqrt{1 - \rho_{\dot{x}\ddot{x}}^2} \exp\left\{-\frac{\rho_{\dot{x}\ddot{x}}^2}{2(1 - \rho_{\dot{x}\ddot{x}}^2)} \left(\frac{\xi}{\sigma_x}\right)^2\right\} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \rho_{\dot{x}\ddot{x}} \left(\frac{\xi}{\sigma_x}\right) \right\} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\rho_{\dot{x}\ddot{x}}}{\sqrt{2(1 - \rho_{\dot{x}\ddot{x}}^2)}} \frac{\xi}{\sigma_x}\right) \right\} \quad (22)$$

となる。ここに、 $\rho_{\dot{x}\ddot{x}} = \chi_{\dot{x}\ddot{x}}(t, t) / \sigma_x \sigma_{\dot{x}}$ である。

式(22)は時間 t における単位時間当りの値を与える関数であるから、これを $t=0$ から ∞ まで積分した値 $M+(\xi; 0, \infty)$ は1自由度系に式(5)で表わされる地震動が作用したときは、応答変位が正の勾配でレベル ξ を越える全回数を与える。しかし、地震時における構造物の応答の解析では、正の勾配でレベル ξ を越えることと、負の勾配でレベル $-\xi$ を越えることは同じ程度の意味を持っているが、応答に含まれる変動周期に比較して地震の強さの時間的変化が緩かである場合には、この両者の値はほぼ等しいものと考える。したがって、応答がレベル ξ 、 $-\xi$ をそれぞれ正、負の勾配で越える全回数 $M(|\xi|; 0, \infty)$ は

$$M(|\xi|; 0, \infty) = 2 \int_0^{\infty} N(\xi, t) dt \quad (23)$$

としてよい。また応答速度 $\dot{y}(t)$ が速度レベル v を越える全回数 $M(v; 0, \infty)$ についても、式(19)、(20)を用いて式(22)、(23)と同様の結果が得られる。一方、 $M(|\xi|; 0, \infty)$ 、 $M(v; 0, \infty)$ はいずれも ξ 、 v をパラメータとする α 、 ξ 、 ω_d の関数であるが、これをパラメータと考えれば、1自由度系の円周振動数 ω_d の関数とみなすことができるから、 ω_d と $M(|\xi|; 0, \infty)$ 、 $M(v; 0, \infty)$ の関係は一種のスペクトルと考えられる。また適宜、 $M(|\xi|; 0, \infty)$ 、 $M(v; 0, \infty)$ の値を固定して、 ξ 、 v を ω_d の関数として表わせば、これは応答の最大値をとるというプロセスの代わりに確率量を用いた応答スペクトルであると解してよい。

図-1は $a=115 \text{ cm/sec}^2$ 、 $\alpha=0.5/\text{sec}$ 、 $\xi=0.05$ 、 $\xi=\sqrt{\pi} \text{ cm}$ 、 $\omega_d=10\pi/\text{sec}$ の場合についての数値計算例である。A) 図は地震加速度の強さの時間的変化を表わしており、その他はこれに対する応答である。地震動は2secでその強さが最大になるが、応答はいずれも2.5~2.9secにたうれ、入力のパークと応答のパークには時間差があることを示している。また、 $N+(\xi, t)$ 曲線で囲まれた面積は1.20であることから、この場合2~3程度は応答変位が $\sqrt{\pi} \text{ cm}$ を越える可能性があることがわかる。その他の数値計算結果の詳細は講演時に譲る。

文献

- 1) Housner, G.W., and Jennings, P.C., "Generation of Artificial Earthquakes," Proc. ASCE, Vol. 90, EM1, 1964.
- 2) 藤塚正宣, 佐藤吉彦: 地震動のシミュレーションとこれに対する構造物の応答, 日本地震工学会シンポジウム(1966)講演集.
- 3) Rice, S.O., "Mathematical Analysis of Random Noise," Bell System Tech. J., 23(1944); 24(1945).

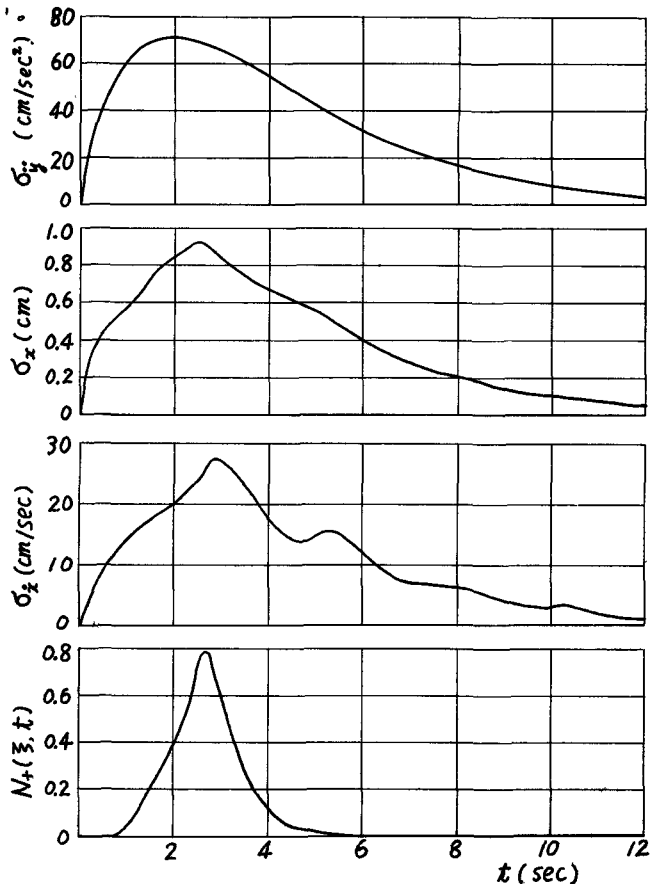


図-1 入力加速度とそれに対する応答