

(209) バイリニア復元力特性を有する1自由度系の定常応答特性に基づく  
免震支承の合理的特性値

佐賀大学理工学部 井嶋 克志

1. まえがき

交番荷重下においても、安定したバイリニア復元力特性を有し、且つ設置が容易な支承の開発により、免震橋梁が実現しつつある。この免震支承は、履歴吸収エネルギーの増大を図る点から、桁重量による地震時降伏後のせん断変形に伴う崩壊を起こさないかぎり、桁と取付け道路とのクリアランス内での降伏後の大きな変形を許容するものである。

一方、免震支承の設計において、非線形であるバイリニア系の地震応答から直接その合理的特性値を得るためには試行錯誤を要し、また、得られた特性値が最適であるとは限らない。したがって、線形系を仲介として、等価線形化における仮定に基づき、線形系の特性値からバイリニア系の特性値を決定することが、実用的且つ合理的と考えられる<sup>3)</sup>。

本研究は、本来弱非線形定常応答に対してではあるが、その理論的明確さ故普及しているCaugheyによるバイリニア系のKryloff-Bogoliuboff解(K-B解と呼ぶ。)<sup>4)</sup>に対して、弱非線形に限定しない定常応答の厳密解を求め、それらの比較および等価線形化における仮定の検証を行ったものである。さらに、この結果に基づき、バイリニア型免震支承の合理的特性値の決定法について考察を行った。

2. 1自由度バイリニア系の定常応答の厳密解

完全降伏型構造物の地震応答現象を解明する観点から、既に、完全弾塑性モデルの定常応答の厳密解については、幾つかの文献に示されている<sup>2)</sup>。バイリニア型免震支承においては、永久変形があまりに大きくなることは望ましくないため、2次剛性は正の必要があり、また、積極的にその非線形復元力特性を利用することから、単に最適震度として表される降伏荷重だけでなくバイリニア復元力の1次剛性、2次剛性についても検討が必要となる。

図1のバイリニアヒステリシスループを参考に、正弦波入力におけるAB間およびBC間の質点の定常応答の運動方程式は、それぞれ式(1)、式(2)で表される。

$$m\ddot{y} + k_1 y - (k_1 - k_2)(y_1 + y_2) / 2 = m\alpha \cos(\omega t - \phi) \quad (1)$$

$$m\ddot{y} + k_2 y - (k_1 - k_2)(y_1 - y_2) / 2 = m\alpha \cos(\omega t - \phi) \quad (2)$$

ここに、 $m$ は質点の質量、 $\alpha$ 、 $\omega$ 、 $\phi$ はそれぞれ入力の加速度振幅値、円振動数、および入力と応答変位の位相角である。

完全弾塑性系の応答は、点Bでの変位と速度の連続条件の基に、式(1)、(2)を解くのに対し、バイリニア系ではB点の加速度の連続条件も加えて解けば、次式を得る。

$$\begin{aligned} & (1 - \mu + \mu \cos \frac{\theta}{\lambda} + \cos \sqrt{\mu} \frac{\pi - \theta}{\lambda}) a - \mu \left\{ \frac{\cos \theta / \lambda}{1 - \lambda^2} + \frac{\cos \sqrt{\mu} (\pi - \theta) / \lambda}{\mu - \lambda^2} + \frac{(1 - \mu) \cos \theta}{(1 - \lambda^2)(\mu - \lambda^2)} \right\} \cos \phi \\ & - \mu \left\{ \frac{\lambda \sin \theta / \lambda}{1 - \lambda^2} - \frac{\lambda \sin \sqrt{\mu} (\pi - \theta) / \lambda}{\sqrt{\mu} (\mu - \lambda^2)} + \frac{(1 - \mu) \sin \theta}{(1 - \lambda^2)(\mu - \lambda^2)} \right\} \sin \phi = 2f_y^* \quad (3) \end{aligned}$$

$$\left( -\frac{\sin \theta}{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\sin \sqrt{\mu} \pi - \theta}{\lambda} \right) a + \left\{ \frac{\sin \theta / \lambda}{1 - \lambda^2} - \sqrt{\mu} \frac{\sin \sqrt{\mu} (\pi - \theta) / \lambda}{\mu - \lambda^2} + \lambda \frac{(1 - \mu) \sin \theta}{(1 - \lambda^2)(\mu - \lambda^2)} \right\} \cos \phi$$

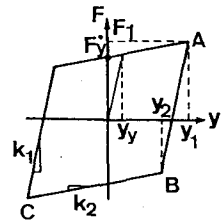


図1

$$-\left\{ \frac{\lambda \cos \theta / \lambda}{1 - \lambda^2} + \frac{\lambda \cos \sqrt{\mu}(\pi - \theta) / \lambda}{\mu - \lambda^2} + \lambda \frac{(1 - \mu) \cos \theta}{(1 - \lambda^2)(\mu - \lambda^2)} \right\} \sin \phi = 0 \quad (4)$$

$$-\left( \cos \frac{\theta}{\lambda} + \cos \frac{\sqrt{\mu}(\pi - \theta)}{\lambda} \right) a + \left\{ \frac{\cos \theta / \lambda}{1 - \lambda^2} + \mu \frac{\cos \sqrt{\mu}(\pi - \theta) / \lambda}{\mu - \lambda^2} + \lambda^2 \frac{(1 - \mu) \cos \theta}{(1 - \lambda^2)(\mu - \lambda^2)} \right\} \cos \phi$$

$$+ \left\{ \frac{\lambda \sin \theta / \lambda}{1 - \lambda^2} - \sqrt{\mu} \frac{\lambda \sin \sqrt{\mu}(\pi - \theta) / \lambda}{\mu - \lambda^2} + \lambda^2 \frac{(1 - \mu) \sin \theta}{(1 - \lambda^2)(\mu - \lambda^2)} \right\} \sin \phi = 0 \quad (5)$$

ここに、 $\mu = k_2/k_1$ 、 $\lambda = \omega/\sqrt{(k_1/m)}$ 、 $f_y^* = F_y^*/(m\alpha)$ 、 $a = F_1/(m\alpha)$ 、 $\theta$ は半周期における復元力の1次剛性位相角、 $F_y^*$ はヒステリシスループにおける2次剛性直線の切辺荷重、 $F_1$ は復元力振幅値であり、 $a$ は入力加速度により除された無次元応答絶対加速度を意味する。無次元変位を $\beta = k_1 y_1/(m\alpha)$ とすれば、

$$\beta = (a - f_y^*)/\mu \quad (6)$$

が成り立つ。

式(3) - (5)は、質点の応答が定常であれば成立するから、 $\mu$ 、 $\lambda$ 、 $f_y^*$ を既知として上式から $a$ 、 $\theta$ 、 $\phi$ を解けば、共振曲線を求めることができる。また、 $\mu$ および $\theta$ をパラメータとして $\phi = \pi/2$ と置くことにより、位相共振振動数 $\lambda_{res}$ 、このときの無次元応答変位 $\beta_{res}$ および無次元加速度 $a_{res}$ を求めることができる。

### 3. Kryloff-Bogoliuboff解に基づく位相共振特性

バイリニア系の位相共振応答について、K-B解に対して厳密解で使用した無次元化を行えば、次のような式が得られる。

$$\lambda_{res} = \sqrt{\mu + (\theta - \sin \theta \cos \theta)(1 - \mu)/\pi} \quad (7)$$

$$\beta_{res} = \frac{\pi}{(1 - \mu)\sin^2 \theta} \quad (8)$$

$$f_y^* = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + \cos \theta} \quad (9)$$

### 4. 1自由度バイリニア系の共振曲線

図2-4に、入力の無次元振動数に対する無次元応答変位、無次元応答絶対加速度および位相角を示す。実線が厳密解、点線がK-B解であり、図中には数値積分による定常応答値も示している。計算例は、2次剛性と1次剛性の比が、0.3の場合である。厳密解と数値積分解は良く一致しているが、厳密解とK-B解には僅かに差異が見られ、K-B解の方が大きい値となる。また、全て

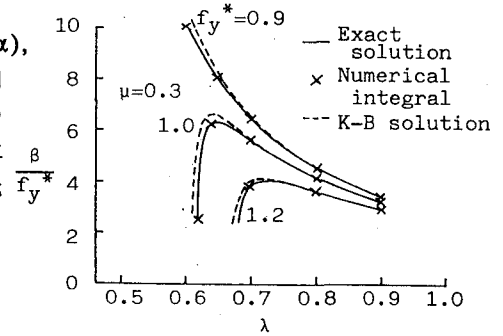


図2 無次元変位の共振曲線

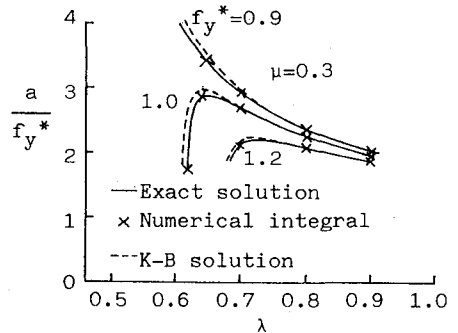


図3 無次元加速度の共振曲線

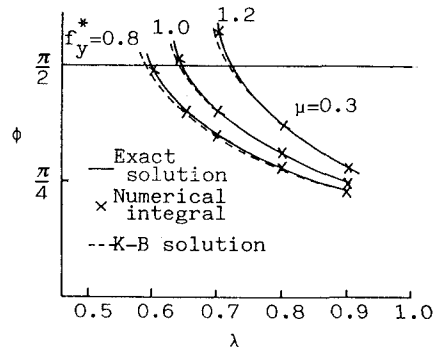


図4 変位と外力のピークの位相差

の解に言えることは、位相角が $\pi/2$ のときの無次元振動数のもとで、無次元変位、無次元加速度ともにピークとなり、線形ヒステリシス系では変位と加速度のピークの振動数には差異が生じるから、両者ともにバイリニア系との一致を同時に図ることはできない。

### 5. 1自由度バイリニア系の位相共振特性

図5-8に、復元力の1次剛性位相角 $\theta$ を横軸、剛比 $\mu$ をパラメータとした、位相共振時の無次元振動数、2次剛性直線の切辺荷重と外力の比、無次元加速度振幅値、無次元変位振幅値を示す。図中には、比較のため、点線でK-B解から得られた値も示している。

厳密解とK-B解の比較より、剛比 $\mu=0.05$ と小さい場合、且つ1次剛性位相角 $\theta$ が $\pi/2$ より小さい場合においてのみ、無次元位相共振振動数と無次元変位に2つの解の差が現われる。すなわち、K-B解における弱非線形の定義である、応答は入力振動数の正弦波のみで表されるという条件は、復元力の1次剛性位相角が大きい場合は剛比に係わらず、また、2次剛性と1次剛性の比が0.3程度以上の大きさであれば、1次剛性位相角に係わらず成立する。なお、無次元加速度が2つの解で良く一致しているのに対し、無次元変位では2つの解に比較的大きな差異が生じるのは、式(6)より分かるように、無次元加速度の2つの解における僅かな差も、変位応答には剛比が小さい程増幅された差として現われるからである。

無次元位相共振振動数には、比較のため1次剛性直線と2次剛性直線の割線を等価線形剛性とする無次元位相共振振動数も剛比0.05の場合のみ示している。この解はむしろ1次剛性位相角が小さいとき、K-B解に比べ、厳密解と比較的良好一致することが分かる。

免震支承の合理的バイリニア特性値の設定を念頭において、得られたバイリニア系の位相共振特性の厳密解から次のようなことが指摘できる。図6より、2次剛性切辺荷重と外力の振幅値の比 $f_y^*$ が一定であれば、位相共振時には剛比の値に係わらず復元力は同一の1次剛性位相角となる。なお、 $f_y^*$ が $\pi/4$ より小さい場合には、入力の変振動数 $\sqrt{(k_2/m)}$ の所で応答は無窮大となる。図7、8より無次元加速度応答と無次元変位応答では、最小値を取る復元力の1次剛性位相角は異なり、加速度および変位を同時に最小とするバイリニア系の合理的特性値の設定は不可能である。しかし、変位はほぼ $\theta=\pi/2$ において最小となり、加速度は $\theta=\pi/2$ より小さい所ではさらに減少するがそれほど大きくは見込めない。したがって、位相共振振動数を除いて $\theta=\pi/2$ 付近ではK-B解と厳密解は良く一致していることを含めて、1次剛性位相角が $\pi/2$ となるようにバイリニア系の特性値を設定することが得策と言える。

図9は、位相共振状態において、一定の入力の基にヒステリシスが囲む面積が一定であるならば、変位振幅値は一定となり得るか示したものである。すなわち、変位が位相共振で正弦波であれば、ヒステ

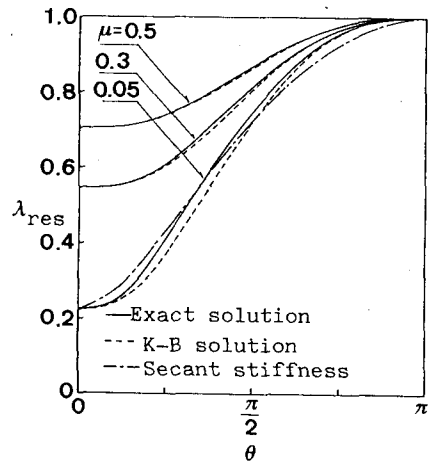


図5 無次元位相共振振動数

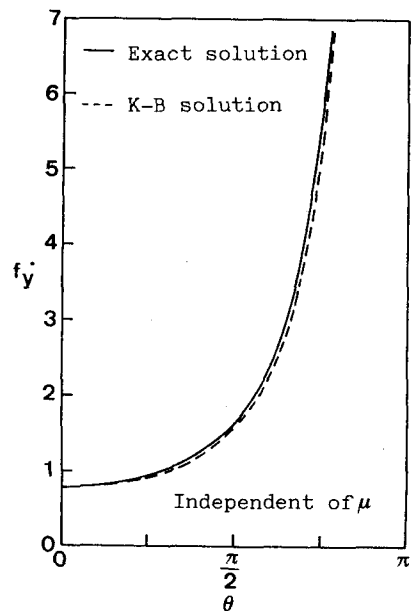


図6 位相共振時の $\theta$ と $f_y^*$

リシスが囲む面積と、外力の振幅値と変位振幅値の積として表される仕事との比は、一定値 $\pi$ となり、復元力の特性に係わらず、一定の外力に対してヒステリシスの囲む面積のみで変位は決定する。したがって、ヒステリシスが囲む面積と、外力と変位の積の比を次式より厳密解を用いて計算を行った。

$$c = \frac{\Delta W}{m\alpha y_1} = 4f_y^* \left\{ 1 - \frac{f_y^*}{(1-\mu)\beta} \right\} \quad (10)$$

ここに、 $\Delta W$ はヒステリシスが囲む面積である。

図より、剛比が小さい場合、1次剛性位相角が $\pi/4$ 付近で $c$ は $\pi$ より約4%小さい値となるが、剛比が大きい場合および剛比が小さくとも1次剛性位相角が $\pi/2$ 以上であれば $c$ はほぼ $\pi$ 一定と考えてよい。したがって、ヒステリシスが囲む面積の等価性の基に、線形系の特性値からバイリニア系の特性値を決定する場合には、1次剛性位相角は上記の範囲内において任意の値を取ることができる。

#### 6. バイリニア型免震支承の合理的特性値について

K-B解からの位相共振振動数およびヒステリシスの囲む面積の等価性に基づき、線形系からバイリニア系の特性値は次式より求めることができる<sup>3)</sup>。

$$k_1 = \{1 + 2h'(\pi - \theta + \sin \theta \cos \theta) / \sin^2 \theta\} k' \quad (11)$$

$$k_2 = \{1 - 2h'(\theta - \sin \theta \cos \theta) / \sin^2 \theta\} k' \quad (12)$$

$$F_y^* = mS_A \cdot \pi h' / (1 + \cos \theta) \quad (13)$$

ここに、 $k'$ 、 $h'$ は複素バネの実数部と等価減衰定数、 $S_A$ は線形加速度応答スペクトルである。

厳密解としての1自由度バイリニア系の位相共振特性の結果から、1次剛性位相角 $\theta$ が $\pi/2$ となるバイリニア系の特性値を上式より求めれば、位相共振応答において変位および加速度両方を最小ではないが、小さくできる免震支承の設計が可能となる。なお、橋脚剛性間との関係および支承製作上の制約から、1次剛性位相角として $\pi/2$ が達成できない場合は、K-B解と厳密解との一致性から、それより大きい位相角を採用することが妥当と思われる。

参考文献 1) (財)国土開発技術研究センター：道路橋の免震設計ガイドライン(案)、1988.3. 2) 田治見宏：建築振動学、コロナ社、pp.132-146、1969 3) 井嶋、後藤、和田：バイリニア型免震支承の合理的特性値の決定と実設計への応用、土木学会論文集、pp.117-126、1993.4. No. 465, I-23, 4) Caughey, T.K. : Sinusoidal Excitation of a System with Bilinear Hysteresis, ASME, pp.640-643, 1960.12.

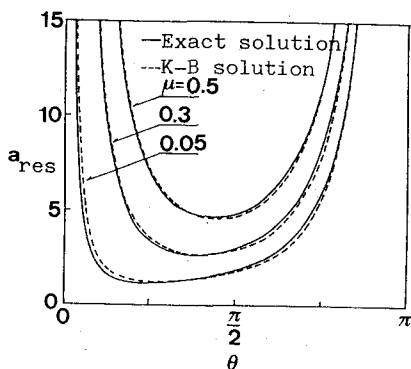


図7 無次元加速度の位相共振特性

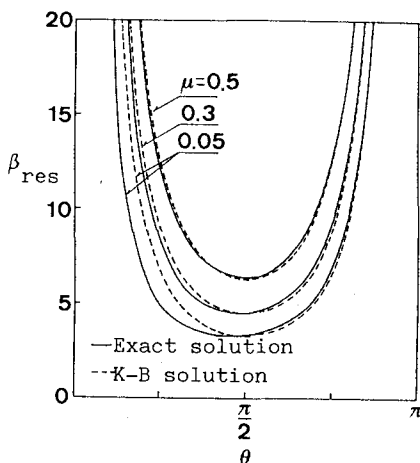


図8 無次元変位の位相共振特性

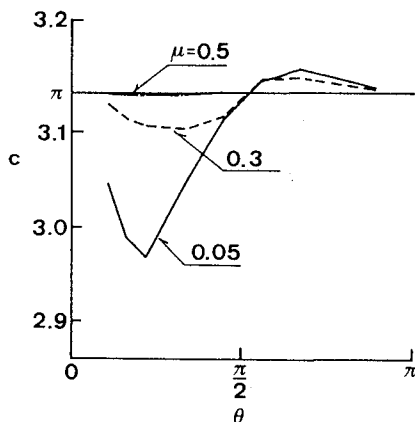


図9  $c = \frac{\Delta W}{m\alpha y_1}$  の位相共振特性