

(71) 多地点の地震観測記録を含む時空間確率過程のシミュレーション ——多入力線形システム理論に基づく方法——

埼玉大学工学部 川上 英二
東京ガス 小野 牧夫

1. 目的

トンネル、パイプライン、地中埋設管路等の地震波動の伝播に伴う動的応答解析、耐震設計を行う場合、まず、管路・地盤・基盤を力学的にモデル化し、地盤または基盤における地震動を入力する必要がある。入力波として、過去に観測された強震記録を用いるのは現実的であり、設計結果に説得力がある。しかし、これらは一地点での記録であることが多い。地盤または基盤からの地震入力、管路に沿った各点で与える必要があり、この各点での変位の時刻歴を、つまり、時空間の関数としての地震波形をどのように想定するかは、管路の応答に支配的な影響を及ぼすため重要な問題である。

地震波の水平方向のみかけ伝播速度として、石油パイプライン基準のように地盤のせん断波速度を用いるか、アレー観測記録の相互相関関数のピークから求められた値を用いるかでは結果が著しく異なる可能性がある。合理的であるという点では、みかけ速度としては後者の値を用いるのが妥当であるが、この場合、波形が場所によらず同一であると仮定し、波形の変形の影響を無視すると、危険な設計を行う可能性がある。

このような観点から著者らはこれまでに、観測記録を含む時空間確率過程をシミュレートする方法として、

- ① 二重フーリエ級数を用いる手法¹⁾²⁾、
- ② 従来の多変数の確率過程を拡張する方法³⁾、
- ③ ARモデルを用いる方法⁴⁾

を既に展開している。また、盛川・亀田⁵⁾によりフーリエ係数に関する条件付確率密度関数に基づく方法が、丸山・星谷⁶⁾、土岐・佐藤・清野・水谷⁷⁾によって Kriging 手法による方法が提案されている。

本研究では従来の線形システム理論に基づく方法⁸⁾を展開する。これは、非観測地点の地震波形を、観測記録を入力とする線形システムの出力として取り扱うものである。そして、時間について定常な場において複数の観測記録が与えられている場合を想定し、これら観測記録を含む時空間関数としての地震波形をシミュレートするための手法を開発することを目的としている。

2. 条件

地盤の変位を互いに相関を有する複数の確率過程と考える。この時空間確率過程は、次の2つの条件を満足するものと仮定する。

条件(A)：時空間確率過程の相互相関関数は、想定した相互相関関数に一致する。

条件(B)：時空間確率過程は、幾つかの観測地点においては観測波形に一致する。

3. 理論

地点 x_i ($i=1, 2, \dots, I$) を対象とし、この中の地点 x_k ($k=1, 2, \dots, K$) (観測地点) において観測記録 $u_k(t)$ がサンプルとして得られているとする。このとき、非観測地点 x_v ($v=K+1, K+2, \dots, I$) における地震波形 $u_v(t)$ を次式で表す。

$$u_v(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{n=-N}^N H_{vk}(\omega_n) U_k(\omega_n) \exp(i\omega_n t) + z_v(t) \quad (1)$$

ただし、 $U_k(\omega_n)$ は観測記録の複素フーリエ係数であり、 $H_{vk}(\omega_n)$ は未知の複素係数である。上式の物理的

な意味を考えると、 $u_v(t)$ を、観測記録 $u_k(t)$ ($k=1, \dots, K$)を入力とする線形システムの出力波形とすれば、 $H_{vk}(\omega_n)$ は振動数応答関数と考えることができる。また、 $z_v(t)$ は付加雑音である。

上式を用いて非観測地点における地震波形 $u_v(t)$ をシミュレートするためには、複素係数 $H_{vk}(\omega_n)$ と付加雑音 $z_v(t)$ を求める必要がある。

【複素係数 $H_{vk}(\omega_n)$ の算定】

式(1)で $u_v(t)$ と $z_v(t)$ をそれぞれフーリエ級数に展開すると次式を得る。

$$U_v(\omega_n) = \sum_{k=1}^K H_{vk}(\omega_n)U_k(\omega_n) + Z_v(\omega_n) \quad (n=-N, \dots, N) \quad (2)$$

ただし、 $U_v(\omega_n)$ は非観測地点における地震波形 $u_v(t)$ の複素フーリエ係数、 $Z_v(\omega_n)$ は付加雑音 $z_v(t)$ の複素フーリエ係数である。

式(2)の両辺に $U_c^*(\omega_n)$ ($c=1, \dots, K$) ($*$: 共役複素数) を乗じてアンサンブル平均をとると、

$$E[U_c^*(\omega_n)U_v(\omega_n)] = \sum_{k=1}^K H_{vk}(\omega_n)E[U_c^*(\omega_n)U_k(\omega_n)] + E[U_c^*(\omega_n)Z_v(\omega_n)] \quad (3)$$

ここで、付加雑音 $z_v(t)$ は観測記録 $u_c(t)$ ($c=1, \dots, K$)と無相関であると仮定すると、上式は、

$$S_{cv}(\omega_n)\Delta\omega = \sum_{k=1}^K H_{vk}(\omega_n)S_{ck}(\omega_n)\Delta\omega \quad (4)$$

上式をマトリックス表示すると次の連立一次方程式となる。

$$\begin{bmatrix} S_{1v}(\omega_n)\Delta\omega \\ \vdots \\ S_{Kv}(\omega_n)\Delta\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}(\omega_n)\Delta\omega & \cdots & S_{1K}(\omega_n)\Delta\omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{K1}(\omega_n)\Delta\omega & \cdots & S_{KK}(\omega_n)\Delta\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{v1}(\omega_n) \\ \vdots \\ H_{vK}(\omega_n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

式(5)を $v=K+1, K+2, \dots, I$ について解くことにより、複素係数 $H_{vk}(\omega_n)$ を決定することができる。

【付加雑音 $z_v(t)$ ($v=K+1, K+2, \dots, I$)のシミュレーション】

式(2)の両辺に $U_w^*(\omega_n)$ ($w=K+1, \dots, I$)をかけてアンサンブル平均をとると、

$$E[U_w^*(\omega_n)U_v(\omega_n)] = \sum_{k=1}^K H_{vk}(\omega_n)E[U_w^*(\omega_n)U_k(\omega_n)] + E[U_w^*(\omega_n)Z_v(\omega_n)] \quad (6)$$

となる。式(2)(6)と、観測記録と付加雑音との無相関性

$$E[U_k^*(\omega_n)Z_v(\omega_n)] = 0 \quad (k=1, \dots, K) \quad (7)$$

より、付加雑音 $z_v(t)$ ($v=K+1, K+2, \dots, I$)は次式のようなクロススペクトルをもつことがわかる。

$$S_{z, wv}(\omega_n)\Delta\omega = E[Z_w^*(\omega_n)Z_v(\omega_n)] = S_{wv}(\omega_n)\Delta\omega - \sum_{k=1}^K H_{vk}(\omega_n)S_{wk}(\omega_n)\Delta\omega \quad (v, w = K+1, K+2, \dots, I) \quad (8)$$

従って、式(8)で求まるクロススペクトルを有する付加雑音 $z_v(t)$ をシミュレートすればよいことになる。従来のシミュレーション手法⁹⁾¹⁰⁾を用いると、付加雑音 $z_v(t)$ は次式によりシミュレートすることができる。

$$z_v(t) = \sum_{m=K+1}^v \sum_{n=-N}^N F_{vm}(\omega_n)\sqrt{\Delta\omega} \cdot \exp\{i(\omega_n t + \phi_{mn})\} \quad (9)$$

ここで、式(9)の $F_{vm}(\omega_n)\sqrt{\Delta\omega} = F_{vm}^*(\omega_{-n})\sqrt{\Delta\omega}$ は、付加雑音のスペクトルマトリックスを次のように分解して求めることができる。

$$\begin{bmatrix} S_{z, (K+1)(K+1)}(\omega_n)\Delta\omega & \cdots & S_{z, (K+1)I}(\omega_n)\Delta\omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{z, I(K+1)}(\omega_n)\Delta\omega & \cdots & S_{z, II}(\omega_n)\Delta\omega \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} F^{(K+1)(K+1)*}(\omega_n)\sqrt{\Delta\omega} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ F^{(K+1)*}(\omega_n)\sqrt{\Delta\omega} & \cdots & F^{(K+1)*}(\omega_n)\sqrt{\Delta\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F^{(K+1)(K+1)}(\omega_n)\sqrt{\Delta\omega} \cdots F^{(K+1)}(\omega_n)\sqrt{\Delta\omega} \\ \vdots \\ F^{(K+1)}(\omega_n)\sqrt{\Delta\omega} \end{pmatrix} \quad (10)$$

また、位相角 $\phi_{nn} = -\phi_{n(-n)}$ は、 $0 \sim 2\pi$ の範囲で互いに独立な一様乱数とする。

このように、非観測地点における地震波形は、観測記録 $u_k(t)$ と、互いに相関を有する付加雑音 $z_v(t)$ とからシミュレートすることができる。

一方、別解として、式(1)により非観測地点 $x_v (v=K+1, \dots, I)$ の中の一地点 x_{K+1} の地震波形 $u_{K+1}(t)$ をまずシミュレートする方法も考えられる。次に、この波形を観測記録に加えて、 K を $K+1$ に置き換えて $u_{K+2}(t)$ を同様にしてシミュレートする。以下同様に、シミュレートした波形を順次観測記録に加えていくことにより、全ての非観測地点における地震波形をシミュレートする方法である。

4. 数値計算結果

観測波形としては、Imperial Valley地震(1940年5月18日、マグニチュード7.1)のEl Centroの地点で観測された南北方向の変位記録(図-1、最大値 = 10.9 cm)、および、別に決定した2地点(6km地点、12km地点)での波形を使用した。

想定した相互相関関数を図-2, 3, 4 に示す。図-2 は波動の伝播速度を $c=1,000\text{m/sec}$ 、変形定数¹⁾⁻⁴⁾を $\alpha=0.2 \times 2\pi$ とした場合(例-1)、図-3 は $c=2,000\text{m/sec}$ 、 $\alpha=0.2 \times 2\pi$ とした場合(例-2)、図-4 は $c=1,000\text{m/sec}$ 、 $\alpha=0.1 \times 2\pi$ とした場合(例-3)である。ただし、ここでは、場所に関しても定常であり、各地点の波動のパワースペクトルは同一なものと考え、図-2, 3, 4 中の太線 $R^{\text{opt}}(0, \tau)$ は、図-1 の観測波形の自己相関関数とした。

波形をシミュレートする地点は、地点間の距離が400mで、直線上に並んだ0km地点から12km地点までの合計31地点とした。この中、観測記録が3地点(0km地点、6km地点、12km地点)で与えられている場合を想定し、時空間地震波形をシミュレートした(図-5, 6, 7)。

伝播速度が同じで変形定数が違う場合の波形サンプル(図-5と図-7)を比較すると、波動の伝播に伴う波形の変形の程度が異なっていることがわかる。変形定数が同じで伝播速度が違う場合の波形サンプル(図-5と図-6)を比較すると、波形のピークの伝播の速度が異なっている様子がわかる。また、波形サンプルから求めた相互相関関数は、想定した相互相関関数に近似的なものになった。

参考文献

- 1) 川上：土木学会論文報告集, No.410, 1989.
- 2) 川上：第8回日本地震工学シンポジウム, 1990.
- 3) 川上・小野：土木学会論文報告集, No.441, 1992.
- 4) 川上・小野：埼玉大学工学部建設系研究報告, Vol.22, 1992.
- 5) 盛川・亀田：都市耐震センター研究報告, 京都大学防災研究所, 1991.
- 6) 丸山・星谷：土木学会第47回年次学術講演会, I-342, 1992.
- 7) 土岐・佐藤・清野・水谷：土木学会第47回年次学術講演会, I-340, 1992.
- 8) 小野・川上：土木学会第47回年次学術講演会, I-636, 1992.
- 9) Shinozuka, M, and Jan, C.-M.: Journal of Sound and Vibration, Vol.25, No.1, 1972.
- 10) 星谷：土木学会論文報告集, No.270, 1978.

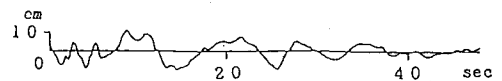


図-1 Imperial Valley地震(1940)の観測波形

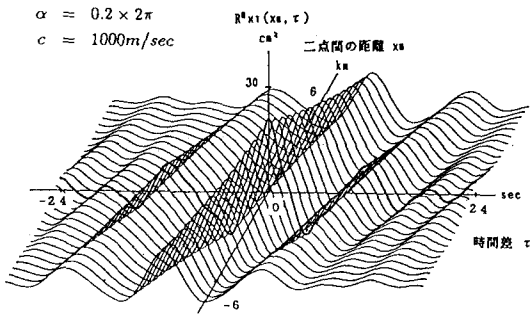


図-2 想定した相互相関関数 $R^{\alpha_{XT}}(x_0, \tau)$
(例-1)

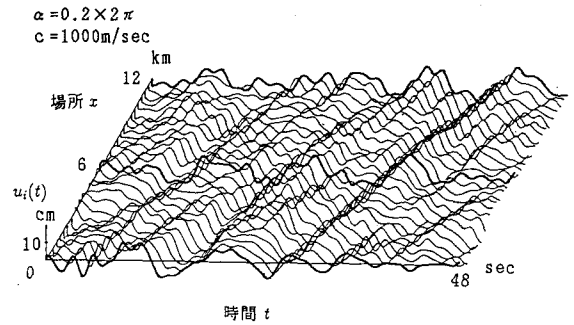


図-5 時空間地震波形のサンプル $u_i(t)$
(観測地点数=3, 例-1)

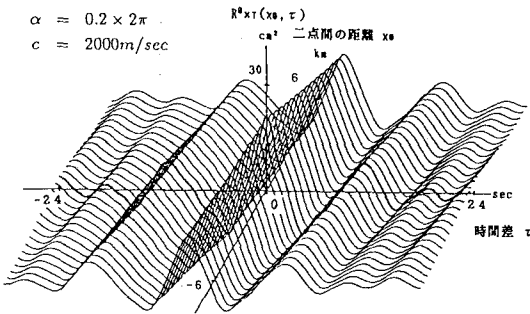


図-3 想定した相互相関関数 $R^{\alpha_{XT}}(x_0, \tau)$
(例-2)

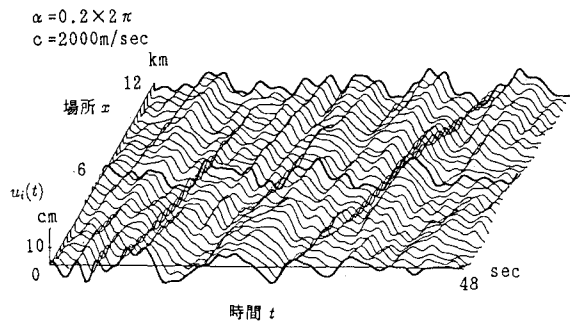


図-6 時空間地震波形のサンプル $u_i(t)$
(観測地点数=3, 例-2)

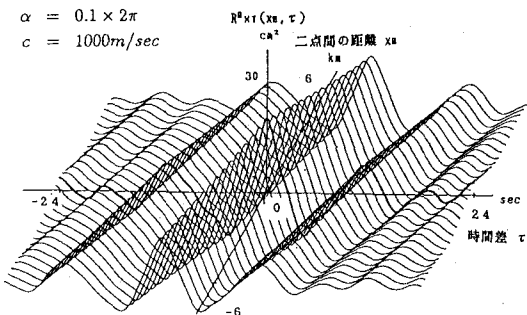


図-4 想定した相互相関関数 $R^{\alpha_{XT}}(x_0, \tau)$
(例-3)

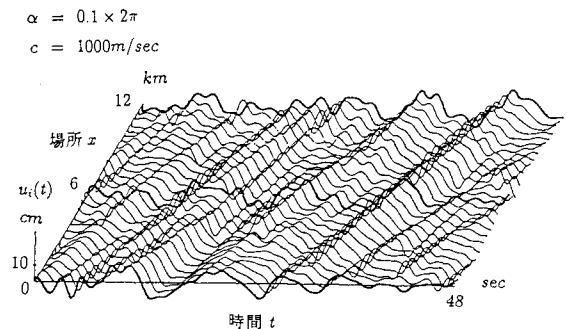


図-7 時空間地震波形のサンプル $u_i(t)$
(観測地点数=3, 例-3)

(連絡先: 〒338 浦和市下大久保255, 埼玉大学工学部建設工学科)