

(22) 確率特性を有する3次元不整形地盤の地震応答特性

宮崎大学工学部 原田 隆典 (株) 奥村組 西川 博敏 宮崎大学工学部研究生 房前 和朋

1. はじめに 局所的な地形・地盤条件が地震動の特性にどの様に影響するかを見るために、地表面の地形が水平方向に変動する不整形地盤の地震応答を解析し、その特性を地表面の地震動の振動数-波数スペクトルおよびコヒーレンス関数によって検討したので報告する。

2. 不整形地盤の応答の基礎式 円筒対称性を有する波動問題に対して直交座標系 (x, y, z) における変位場 (u, v, w) は新たな座標系 (x', y', z') における2次元問題としての $P-SV$ 波および SH 波による変位場 (u', v', w') によって構成することができる (図1参照)。

$$u(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) = \frac{\kappa_x}{\kappa} u'(\kappa, z, \omega) - \frac{\kappa_y}{\kappa} v'(\kappa, z, \omega) \quad (1-a)$$

$$v(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) = \frac{\kappa_y}{\kappa} u'(\kappa, z, \omega) + \frac{\kappa_x}{\kappa} v'(\kappa, z, \omega) \quad (1-b)$$

$$w(\kappa_x, \kappa_y, z, \omega) = w'(\kappa, z, \omega) \quad (1-c)$$

ここに、 κ_x, κ_y は波数、 ω は振動数を表す。波数 κ は x' 軸方向の波数である。また、 (x, y, z) 座標と (x', y', z') 座標の回転角 θ は次式で与えられる。

$$\kappa = \sqrt{\kappa_x^2 + \kappa_y^2} = \kappa_{x'}, \quad \cos \theta = \frac{\kappa_x}{\kappa}, \quad \sin \theta = \frac{\kappa_y}{\kappa} \quad (2)$$

$P-SV$ 波および SH 波による変位場 (u', v', w') は次のようなマトリックス方程式の解として与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{B}(x', z) = \mathbf{A}_0(z) \mathbf{B}(x', z) \quad (3)$$

ここに、 \mathbf{B} は変位-応力ベクトル、 \mathbf{A}_0 はオペレータで次のように与えられる。

$$\mathbf{B}_{SH}(x', z) = \text{col} [v', \tau_{y'z'}], \quad \mathbf{B}_{P-SV}(x', z) = \text{col} [u', w, \tau_{x'z}, \tau_{zz}] \quad (4)$$

$$\mathbf{A}_{0SH}(z) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu^*} \\ -\mu^* \partial_{x'x'} - \rho\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_{0P-SV}(z) = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_{x'} & \frac{1}{\mu^*} & 0 \\ -b\partial_{x'} & 0 & 0 & b/\lambda^* \\ -a\partial_{x'x'} - \rho\omega^2 & 0 & 0 & -b\partial_{x'} \\ 0 & -\rho\omega^2 & -\partial_{x'} & 0 \end{pmatrix} \quad (5-a)$$

ここに

$$a = \frac{4\mu^*(\lambda^* + \mu^*)}{\lambda^* + 2\mu^*}, \quad b = \frac{\lambda^*}{\lambda^* + 2\mu^*}, \quad \partial_{x'} = \partial/\partial x', \quad \partial_{x'x'} = \partial^2/\partial x'^2 \quad (5-b)$$

ここに、 μ^*, λ^* は複素ラーメの定数、 ρ は媒質の密度を表す。上式において、変位-応力ベクトルおよびオペレータは振動数 (時間特性として $\exp(-i\omega t)$ を仮定) の関数であるが簡単のため省略している。以後も省略するものとする。ところで図2に示すように不整形な境界上では、変位と応力ベクトルが連続でなければならないため、この不整形境界の接面上で定義される新たな変位-応力ベクトル \mathbf{b} を導入する必要が生じる。不整形境界の位置 $z(x')$ は次のように与えられるものとする

$$z(x') = z + f(x') \quad (6)$$

不整形境界上の変位-応力ベクトル \mathbf{b} の第一近似解 \mathbf{b}^I は次のように与えられる。

$$\mathbf{b}^I(\kappa, f) = \mathbf{B}^I(\kappa, z) + \int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa - \kappa') \mathbf{J}(\kappa, \kappa') \mathbf{B}^0(\kappa', z) d\kappa' \quad (7)$$

ここに、 \mathbf{B}^0 は水平成層地盤における変位場の変位-応力ベクトルを表す。また、 \mathbf{J} は SH 波、 $P-SV$ 波に対して、以下のように与えられる散乱係数マトリックスである。

$$\mathbf{J}_{SH}(\kappa, \kappa') = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho C_s^2} \\ \rho C_s^2 \kappa \kappa' - \rho\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (8-a)$$

$$\mathbf{J}_{P-SV}(\kappa, \kappa') = \begin{pmatrix} 0 & -i\kappa' & \frac{1}{\rho C_s^2} & 0 \\ \{2(\frac{C_s}{C_p})^2 - 1\}i\kappa' & 0 & 0 & \frac{1}{\rho C_p^2} \\ 4\rho C_s^2\{1 - (\frac{C_s}{C_p})^2\}\kappa\kappa' - \rho\omega^2 & 0 & 0 & \{2(\frac{C_s}{C_p})^2 - 1\}i\kappa \\ 0 & -\rho\omega^2 & -i\kappa & 0 \end{pmatrix} \quad (8-b)$$

式(8)において C_s, C_p は複素 S 波速度, 複素 P 波速度であり媒質の材料減衰定数を D_s, D_p とすると弾性 S 波速度 C_s^0 , 弾性 P 波速度 C_p^0 と次のような関係にある。

$$C_s = C_s^0(1 + iD_s), \quad C_p = C_p^0(1 + iD_p) \quad (9)$$

3. 不整形地表面を有する一層地盤の応答 図3に示すような剛体基盤上にある不整形地表面を有する一層地盤の地震応答を考察する。地表面上では応力ベクトルは零でなければならないので 変位-応力ベクトルは次のように表される。

$$\mathbf{b}(\kappa, f) = \mathbf{B}(\kappa, f) = \text{col} [\mathbf{U}(\kappa, f), 0] \quad (10)$$

したがって, 式(7)で与えられる境界接面上での変位-応力ベクトルの一次近似式は, 次のようになる。

$$\mathbf{B}^I(\kappa, f) = \mathbf{B}^I(\kappa, 0) + \int_{-\infty}^{\infty} f(\kappa - \kappa') \mathbf{J}(\kappa, \kappa') \mathbf{B}^0(\kappa', 0) d\kappa' \quad (11)$$

ここで, 次式のような条件を満足する伝達関数を用いると

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{P}(\kappa, z, z_0) = \mathbf{A}_0(\kappa, z) \mathbf{P}(\kappa, z, z_0), \quad \mathbf{P}^{-1}(\kappa, z, z_0) = \mathbf{P}(\kappa, z_0, z) \quad (12)$$

剛体基盤 $z(x') = H$ における変位-応力ベクトルは $z(x') = 0$ における変位-応力ベクトルに変換することができる。すなわち

$$\mathbf{B}(\kappa, 0) = \mathbf{P}(\kappa, 0, H) \mathbf{B}(\kappa, H) \quad (13)$$

ここで, 入力地震動は x' 軸方向に水平伝播速度 c で伝わる平面波であらわされ基盤から入射されるものとする。基盤の変位-応力ベクトルは次のように表現される。

$$\mathbf{B}(\kappa', H) = \mathbf{B}(\kappa_0, H) \delta(\kappa' - \kappa_0), \quad \kappa_0 = \frac{\omega}{c} \quad (14)$$

ここに, δ はデルタ関数である。式(13),(14)を式(11)に代入すると

$$\mathbf{B}^I(\kappa, f) = \mathbf{P}(\kappa, 0, H) \mathbf{B}^I(\kappa, H) \delta(\kappa - \kappa_0) + f(\kappa - \kappa_0) \mathbf{J}(\kappa, \kappa_0) \mathbf{P}(\kappa_0, 0, H) \mathbf{B}^0(\kappa_0, H) \quad (15)$$

式(15)に式(10)を考慮すると散乱変位場 $\mathbf{U}(\kappa, f)$ を決めることができる。

4. 不整形地表面を有する一層地盤の地表面変位場の振動数-波数スペクトル 式(15)から散乱変位場 $u'(\kappa, 0, \omega)$, $v'(\kappa, 0, \omega)$, $w'(\kappa, 0, \omega)$ を決めることができる。これを式(1)に代入することにより座標系 (x, y, z) における変位場 (u, v, w) が求められる。ここで基盤における地震動の主要振動部分は定常確率過程で近似できるものとする。さらに, 地表面の不整形性も等方均質確率場で近似できるものとする, 結果的に応答の変位場は定常-均質確率波であることになる。したがって, 例えば基盤地震動の水平変位 u_g に対する応答変位 u の振動数-波数スペクトルは次のように与えられる。

$$\begin{aligned} S_{uu}(\kappa_x, \kappa_y, \omega) &= |u(\kappa_x, \kappa_y, \omega)|^2 \\ &= \left[|A(\frac{\kappa_x}{\kappa})^2 + C(\frac{\kappa_y}{\kappa})^2|^2 \delta(\kappa_x - \kappa_x^0, \kappa_y - \kappa_y^0) + |B(\frac{\kappa_x}{\kappa})^2 + D(\frac{\kappa_y}{\kappa})^2|^2 S_{ff}(\kappa_x, \kappa_y) \right] S_{u_g u_g}(\omega) \end{aligned} \quad (16)$$

ここに, S_{ff} は不整形関数 $f(x')$ の波数スペクトルを表わす。 $f(x')$ に対して等方均質確率場であるという仮定は問題の円筒対称性を保つために必要である。式(16)に現れる A, B, C, D は次式のように与えられる。

$$A = \frac{(\gamma^2 + \kappa^2)\nu\gamma}{R} [(\gamma^2 - \kappa^2) \cos \nu H + 2\kappa^2 \cos \gamma H] \quad (17-a)$$

$$B = A_0 \frac{[4\kappa\kappa_0(\gamma^2 - \nu^2) - (\gamma^2 + \kappa^2)^2]\gamma}{R} [\nu\gamma \cos \nu H \sin \gamma H + \kappa^2 \cos \gamma_0 H \sin \nu_0 H] \quad (17-b)$$

$$C = \frac{1}{\cos \gamma H}, \quad D = \frac{\gamma_0 \sin \gamma H}{\cos \gamma H \cos \gamma_0 H} \left(\frac{\kappa \kappa_0 - \kappa_0^2}{\gamma \gamma_0} - \frac{\gamma_0}{\gamma} \right) \quad (17-c, d)$$

$$R = 4\kappa^2 \nu \gamma (\gamma^2 - \kappa^2) + \nu \gamma [4\kappa^4 + (\gamma^2 - \kappa^2)^2] \cos \nu H \cos \gamma H - \kappa^2 [4\nu^2 \gamma^2 + (\gamma^2 - \kappa^2)^2] \sin \nu H \sin \gamma H \quad (17-e)$$

ここに

$$\nu^2 = \left(\frac{\omega}{C_p} \right)^2 - \kappa^2; \quad \text{Re} \nu \geq 0; \quad \text{Im} \nu \geq 0, \quad \gamma^2 = \left(\frac{\omega}{C_s} \right)^2 - \kappa^2; \quad \text{Re} \gamma \geq 0; \quad \text{Im} \gamma \geq 0 \quad (18)$$

また、 A_0, ν_0, γ_0 は $\kappa = \kappa_0 = \omega/c$ のとき、 A, ν, γ の値を意味する。もしも、 $P-SV$ 波の波動方程式で上下方向の変位 w' が零であると仮定すると A, B は次のように簡単化される。

$$A = \frac{1}{\cos \frac{C_p}{C_s} \nu H}, \quad B = \frac{\frac{C_p}{C_s} \nu_0 \sin \frac{C_p}{C_s} \nu H}{\cos \frac{C_p}{C_s} \nu H \cos \frac{C_p}{C_s} \nu_0 H} \left(\frac{\kappa \kappa_0 - \kappa_0^2}{\nu \nu_0} - \frac{\nu_0}{\nu} \right) \quad (19)$$

最後に、振動数依存自己相関関数は、振動数-波数スペクトルのフーリエ変換によって与えられる。

$$R(\xi_x, \xi_y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\kappa_x, \kappa_y, \omega) e^{i(\kappa_x \xi_x + \kappa_y \xi_y)} d\kappa_x d\kappa_y \quad (20)$$

上式は数値積分によって計算することができる。

5. 数値計算例 不整形表層地盤の伝達特性を見るために入力地震動のパワースペクトルは $S_{u_g u_g}(\omega) = 1$ とし、 x 軸に対し 45 度方向に伝播速度 $c = 523 \text{ m/s}$ で伝わる平面波とする。地盤のパラメータとしては次下的ものを用いた。

$$C_p = 573 \text{ m/s}, \quad C_s = 191 \text{ m/s}, \quad H = 100 \text{ m}, \quad D_p = D_s = 0.3 \quad (21)$$

地表面の不整形性を表す $f(x, y)$ の波数スペクトルとしては次式のものを用いた。

$$S_{ff}(\kappa_x, \kappa_y) = \begin{cases} \frac{2\sigma_{ff}^2}{\pi \kappa_u^2} \cos^2\left(\frac{m\pi}{\kappa_u} \kappa\right) & 0 \leq \kappa \leq \kappa_u \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (22)$$

ここに、 $m = 4, \kappa_u = 4\pi/100, \sigma_{ff} = 20$ 。このデータによると水平地表面を有する表層地盤の S 波による 1 次固有振動数は $\omega_1 = 3 \text{ rad/s}$ となる。式 (22) を図 4 に示す。図 5 は式 (16) と式 (17) で与えられる振動数-波数スペクトルを 3 つの振動数毎に $\kappa_{x \max} = \kappa_{y \max} = 0.04 \text{ rad/m}$ の領域に対してプロットしたものである。図 5 によると振動数が高くなると波数平面全体にパワーが分散してくるがこのような傾向は SMART-1 アレー記録から求められた振動数-波数スペクトルにも見ることができる。もっと簡単な近似式の有効性を見るために、図 6 に図 5 と同じ条件で式 (16) と式 (19)、式 (17-c)、式 (17-d) で与えられる振動数-波数スペクトルをプロットした。図 6 の形状も振幅もほとんど図 5 と同じであるため上下方向の変位を零として導いた近似式の妥当性が示されたものと思われる。最後に図 7 に近似式による振動数-波数スペクトルと式 (20) から計算された振動数依存自己相関関数 $R_{u_u}(\xi_x, \xi_y, \omega)/R_{u_u}(0, 0, \omega)$ を図 5、図 6 と同じ振動数毎に $\xi_{x \max} = \xi_{y \max} = 750 \text{ m}$ の領域に対してプロットした。

参考文献 [1] 西川 博敏 宮崎大学修士論文 1991 [2] 房前 和朋 宮崎大学卒業論文 1991

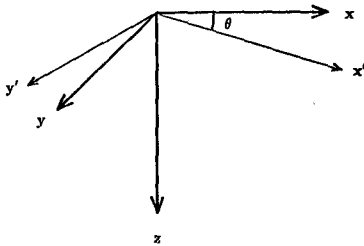


図1 座標変換

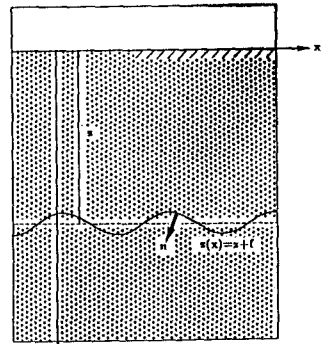


図2 不整形境界地盤モデル

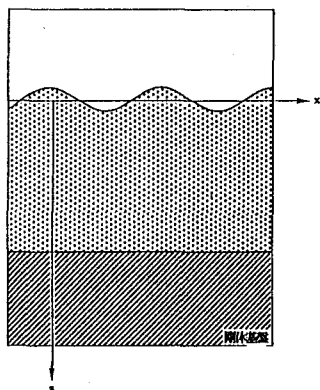


図3 不整形地表面モデル

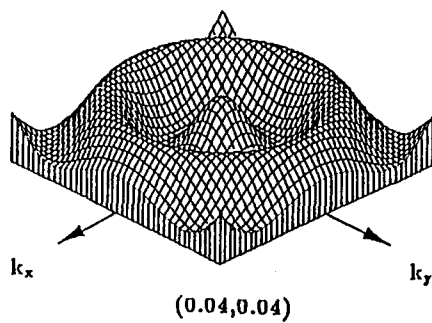
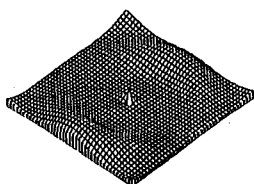
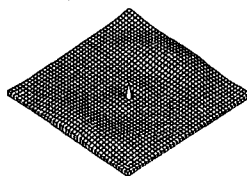


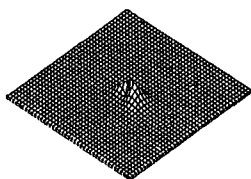
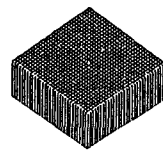
図4 地表面の不整形性を表す $f(x, y)$ の波数スペクトル



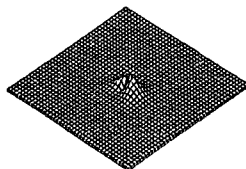
$\omega = 1$ (Max = 0.306)



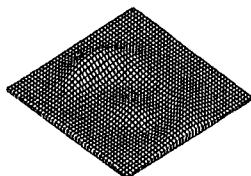
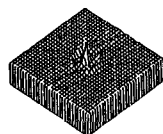
$\omega = 1$ (Max = 1.135)



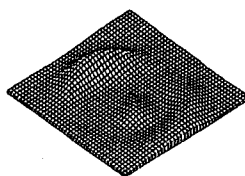
$\omega = 3$ (50.346)



$\omega = 3$ (50.346)



$\omega = 6$ (9.191)



$\omega = 6$ (9.219)



図5 不整形地表面 厳密解

図6 不整形地表面 近似解

図7 コヒーレンス関数