

## (66) 二次元液状化解析法の安定性と精度の検討

京都大学防災研 柴田 徹 岐阜大学工学部 岡 二三生  
 N K K 大石 博 (株)日建設計 角南 進  
 (株)鴻池組 中島 豊 岐阜大学大学院 ○加藤 満

### 1. はじめに

近年、有効応力法と呼ばれる液状化解析法の進歩は著しく、Zienkiewicz らに代表されるように数多くの成果が報告されているが<sup>1)</sup>、液状化解析法の信頼性を確かめることは解析を進めるにあたって重要なことである。そこで本研究では、筆者の一人がすでに開発している有限要素法と差分法を用いた二次元液状化解析プログラム<sup>2)</sup>を改良し、信頼性の確認としてスキームの安定性と精度の検討を行った。なお砂の構成式としては、より一般的な三次元応力下での土の挙動を表現できる足立、岡の繰返し弾塑性構成式<sup>3)</sup>(1988)、時間積分についてはニューマークのβ法、質量マトリックスは lumped mass modelを用いた。

### 2. スキームの安定性について<sup>4)5)</sup>

本解析ではBiotの二相混合体理論に基づいた支配方程式に立脚したCoupleなスキームを用いているが、ここではそのスキームの安定性について検討する。用いた支配方程式は一次元スカラー型のものであり、変位を  $u$ 、間隙水圧を  $p$  であらわすと、参考文献6)より次のようになる。なお、水圧は圧縮を正としている。

$$[M]\{\ddot{u}_n\} + [K]\{u_n\} - [Q]\{p_n\} = \{F\} \quad \text{---①}$$

$$[Q]^T\{u_n\} + [\alpha]\{p_n\} = 0 \quad \text{---②}$$

ここで、 $[M]$ :土の質量マトリックス、 $[K]$ :剛性マトリックス、 $[Q]$ :体積ひずみ、節点変位に関するマトリックス、 $[\alpha]$ :透水に関するマトリックス、 $\{F\}$ :荷重項

次にステップを  $n+1$  にして、①、②式を次のようにあらわす。

$$m \ddot{u}_{n+1} + k \dot{u}_{n+1} - q p_{n+1} = f \quad \text{---③}$$

$$q \dot{u}_{n+1} + h p_{n+1} = f' \quad \text{---④}$$

ニューマークのβ法<sup>7)</sup>より

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t \dot{u}_n + \Delta t^2 \ddot{u}_n / 2 + \beta_2 \Delta t^2 \Delta \ddot{u}_n / 2 \quad \text{---⑤}$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \Delta t \ddot{u}_n + \beta_1 \Delta t \Delta \ddot{u}_n \quad \text{---⑥}$$

ここで、

$$\ddot{u}_{n+1} = \ddot{u}_n + \Delta \ddot{u}_n \quad \text{---⑦}$$

において

$$\ddot{u}_{n+1} = \lambda \ddot{u}_n \quad \text{---⑧}$$

という解があるとする、 $|\lambda| \leq 1$ であれば $\ddot{u}$ は収束するが、

$$\lambda = (1+z) / (1-z) \quad \text{---⑨}$$

とすると、複素数  $z$  の実部が負であれば  $|\lambda| \leq 1$  という条件を満たす。

⑤~⑧式から、③、④式は  $\ddot{u}_{n+1}$ 、 $\dot{u}_{n+1}$ 、 $u_{n+1}$ 、 $\ddot{u}_n$ 、 $\dot{u}_n$ 、 $u_n$  を消去することにより、 $\Delta \ddot{u}_n$  と  $p_{n+1}$  に関する式  $J(z)$  であらわすことができるが、 $\det |J(z)| = 0$  という条件から、 $z$  に関する3次方程式ができる。ここでRouth-Hurwitz の定理<sup>8)</sup>より、 $z$  の実部が負であるためには方程式の  $z$  の係数が全て正でなければならない。また、 $m > 0$ 、 $k > 0$ 、 $h > 0$  であるから、次の条件式が得られる。(解法の詳細は参考文献4)、5)をご覧ください)

$$\beta_2 - \beta_1 \geq 0 \quad \text{---⑩}$$

$$2\beta_1 - 1 \geq 0 \quad \text{---⑪}$$

Table 1 地盤定数と入力波

質量 $\rho$	0.184 [t/m <sup>3</sup> ]	$C_{ke}$	$0.226 \times 10^{-4}$
初期透水係数 $K_a$	$1.16 \times 10^{-5}$ [m/sec]	$M_w^*$	1.1
異方圧密比 $K_0$	0.5	$M_r^*$	1.28
初期間隙比 $e_0$	1.0	$G'$	160
バイリニア基準 $\sigma_{v12}$	2.0 [tf/m <sup>2</sup> ]	$G_0$	100 [tf/m <sup>2</sup> ]
膨潤指数 $\kappa$	$0.30 \times 10^{-2}$		

入力波  $F = A_0 \sin(2\pi f_1 t) \sin(2\pi f_2 t)$

$A_0$ : 振幅 [m/sec<sup>2</sup>]  $f_1, f_2$ : 振動数 [Hz]

$$\beta_1 \geq 0 \quad \text{---(10)}$$

いま、 $\beta_1 = 0.5, \beta_2 = 2\beta = 0.5$  を用いているため、(10)、(11)、(12)式は全て成り立つ。よって、このスキームは《安定》であるといえる。なお、最も安定するといわれている $\beta_1 = 0.6, \beta_2 = 2\beta = 0.65^{(7)}$ の場合も(10)、(11)、(12)式は全て成り立ち、《安定》であるといえる。

しかし、同じ支配方程式でも次のような増分形であらわしたスキームの場合、

$$m \Delta \ddot{u}_n + k \Delta u_n - q p_{n+1} = f - q p_n \quad \text{---(13)}$$

$$q \Delta u_n + \Delta t h p_{n+1} = f' \quad \text{---(14)}$$

$$\text{ただし、} p_{n+1} = p_n + \Delta p_n \quad \text{---(15)}$$

今度は(13)、(14)式を $\Delta \ddot{u}_n$ と $\Delta p_n$ であらわして、前の例と同様に解くと、次の条件式が得られる。

$$2\beta_2 - 2\beta_1 - 1 \geq 0 \quad \text{---(16)}$$

$$2\beta_1 - 1 \geq 0 \quad \text{---(17)}$$

$$\beta_1 \geq 0 \quad \text{---(18)}$$

$$2\beta_1 + 1 \geq 0 \quad \text{---(19)}$$

このとき、(17)~(19)式は成り立つが(16)式は成り立たない。従って、このスキームは安定条件を満たさないため《不安定》といえる。

そこで次に、以上の安定性の検討により《安定》、《不安定》と判断された2種類のスキームを実際に用いた場合の解析例を示す。Fig. 2、Fig. 3はFig. 1のような基盤は非排水、固定、側方は非排水鉛直方向のみ固定、上方は排水可という境界条件のモデル地盤を用いて、Table 1に示す地盤定数の条件で液化弾性解析を行ったときの要素40における過剰間隙水圧-時間関係の例であるが、《安定》と判断されたスキーム③、④で解析を行ったFig. 2の方は、過剰間隙水圧の値が時間経過に関係無くほとんど0という弾性体にみられる安定した傾向を示しているのに対し、《不安定》と判断されたスキーム⑬、⑭で解析を行ったFig. 3の方は発散傾向を示している。また、ここには示していないが、節点46の変位、加速度、速度の時間履歴では、あるステップ数（この例では200ステップ）までは両スキームの解析結果とも全く同じ傾向を示すのだが、《不安定》と判断されたスキームの方は、あるステップ以降で異常振動が始まり、その後発散に向かう。それに伴って変位や速度も発散すること

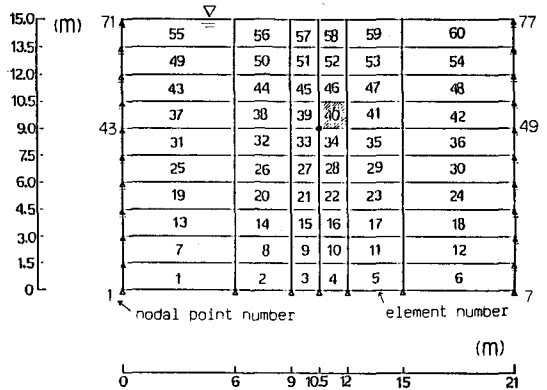


Fig. 1 有限要素メッシュ

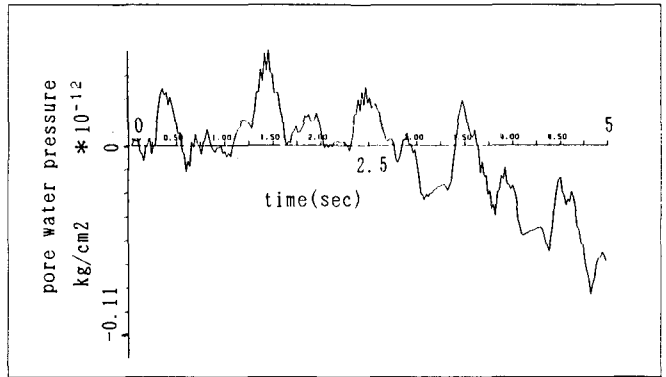


Fig. 2 過剰間隙水圧-時間関係

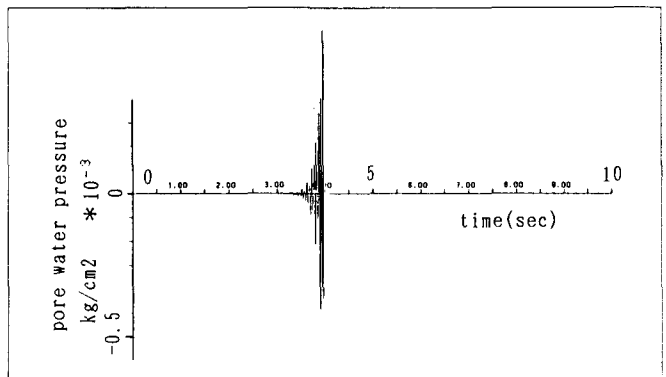


Fig. 3 過剰間隙水圧-時間関係

も確認できた。この傾向は過剰間隙水圧でも同様であった。なお、この例では時間増分  $\Delta t = 0.02 \text{ sec}$  を用い、入力加速度の最大値は  $20 \text{ gal}$ 、振動数  $f_1 = 1.0 \text{ Hz}$ 、 $f_2 = 0.05 \text{ Hz}$  を用いた。

ここに示したのはほんの一例であるが、この例からも分かるように、スキームは慎重に取り扱う必要があり、安定性の検討は解析を行うにあたって重要であると思われる。

### 3. 精度の検討

ここでは本研究において提案した解析法の精度の検討を行うため、無次元化による変位  $u$  と時間  $t$  の関係について解析的な解が得られている、一次元半無限弾性体の表面に Table 2 に示すような荷重、すなわちステップ荷重が作用した場合、正弦波荷重が作用した場合、スパイク荷重が作用した場合それぞれの解と、本解析による数値解と比較する。解析解は Simon らが Laplas 変換を用いて求めたものである<sup>9)</sup>。Table 3 に用いた基本パラメータを示し、Fig. 4、Fig. 5、Fig. 6 にステップ荷重が作用した場合、正弦波荷重が作用した場合、スパイク荷重が作用した場合それぞれの数値解と解析解の比較を示した。図中の破線は Simon らの解析解であり丸印は本解析の数値解である。解析の結果、本研究において提案した解析法による数値解は、全ての場合において解析解を定性的によく再現できるが、数値解の変位はメッシュサイズに依存することがわかった。そのため数値解は、Fig. 7 に示すように、ステップ荷重、正弦波荷重の場合では深さ  $10 \text{ m}$  の地盤を深さ方向  $15$  個に等分割したモデル地盤、スパイク荷重の場合は  $20$  個に等分割したモデル地盤での解析結果について示してある。境界条件は両モデル地盤とも、基盤は固定、側方は水平方向固定、上方のみ排水可である。なお、ここでは水の加速度は固相の加速度と等しいとして水の圧縮性を考慮している。また、ニューマークの  $\beta$  法で  $\beta = 0.25$ 、 $\beta_1 = 0.5$  を用い、時間増分  $\Delta t = 0.002 \text{ sec}$  を用いた。

### 4. 参考文献

- 1) Zienkiewicz, O. C. & Shiomi, T., 1984, Int. J. Num. & Anal. Methods in Geomechanics, Vol. 8, pp. 71-96.
- 2) Okada, F. & Abe, T., 1984, 8th WCEE, Vol. 3, pp. 111-118.
- 3) 岡二三生、大野康年：中部支部研究発表会講演概要集, 1988.
- 4) Park, K. C., 1983, Int. J. Num. Methods in Engineering, Vol. 19, pp. 1669-1673.
- 5) Chan, A. H. C., 1988, "A unified finite element solution to static and dynamic problems of geomechanics", Swansea 大学博士申請論文.
- 6) 阿部徳男：土の非時間依存性構成式とその応用、岐阜大学修士論文、1984.
- 7) 戸川隼人：有限要素法による振動解析、サイエンス社、pp. 41-44.
- 8) 例えば、三井斌友：数値解析入門、朝倉書店、1985.
- 9) Simon, B. R., Zienkiewicz, O. C. & Paul, D. K., 1984, Int. J. Num. & Anal. Methods in Geomechanics, Vol. 8, pp. 381-398.

Table 2 荷重条件

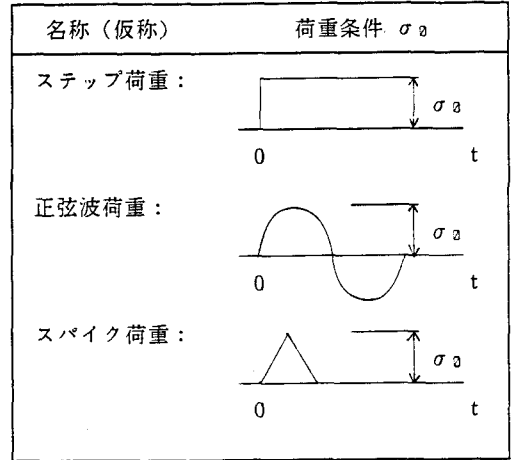


Table 3 基本パラメーター

ヤング係数 $E$	3000 [kg./m <sup>2</sup> ]	$\mu$	1250	$\alpha = 1, \quad \kappa = 0.9730, \quad K_s = \infty$ $Q = \frac{\beta(\lambda + 2\mu)}{\alpha(1 - \alpha\beta)} = 0.1201 \times 10^6$ $K_r = \frac{n}{\frac{1}{Q} - \frac{\alpha - n}{K_s}} = 0.3999 \times 10^5$
ポアソン比 $\nu$	0.2	$\beta = \rho_r / \rho$	0.9730	
密度 $\rho$	0.306 [kg./m <sup>3</sup> ]	$\lambda$	833.3	
水の密度 $\rho_r$	0.2977 [kg./m <sup>3</sup> ]	間隙率 $n$	0.333	
透水係数 $k$	$0.4883 \times 10^{-2}$ [m./sec]			

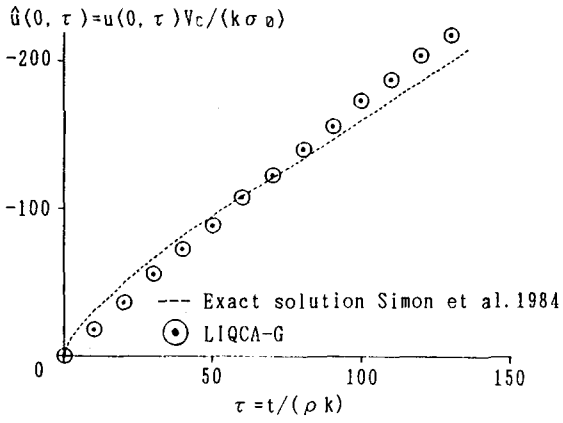


Fig. 4 ステップ荷重解析比較図

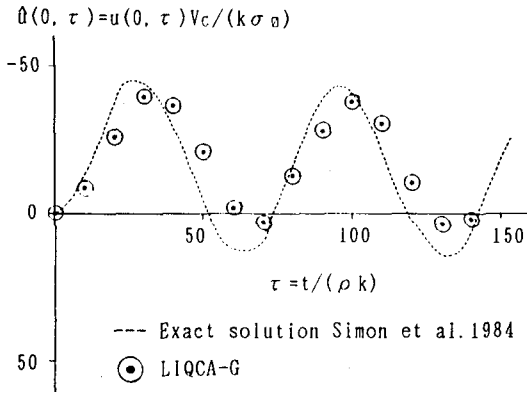


Fig. 5 正弦波荷重解析比較図

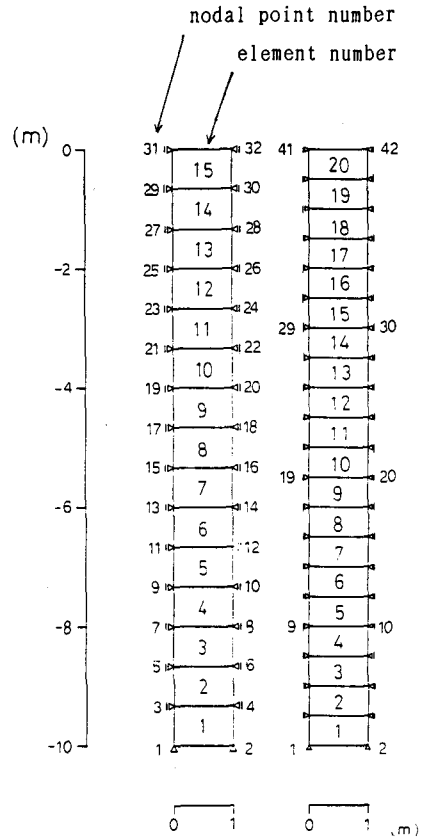


Fig. 7 有限要素メッシュ

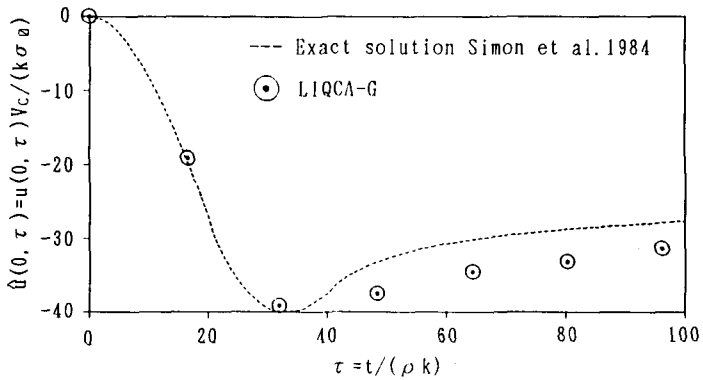


Fig. 6 スパイク荷重解析比較図