(18) 一地点の観測記録を含む地震波形の時空間関数のシミュレーションの方法

埼玉大学工学部　川上 英二

1．序文

トンネル，パイプライン，地中埋設管路等の地震波動の伝播に伴う動的応答解析，耐震設計を行う場合，これらの挙動は，応答変位法を用いて検討する事が多い．まず，管路・地盤・基盤を含む力学モデルを作成し，地盤または基盤における地震動を入力する必要がある．地盤または基盤からの地震入力は，管路に沿った各点で与える必要があり，この各点での変位の時刻歴を，つまり，時間及び空間の関数としての地震波形[1)-3)]をどのように想定するかは，管路の応答に支配的な影響を及ぼすため重要な問題である．

本研究の目的は，現実的で，波形の変形を考慮した，地中埋設構造物に対する時空間関数としての入力波をシミュレートするための手法を展開する事である．

まず，地盤の変位 $F(x,t)$ を埋設管路に沿った一次元の場所 x と時間 t とに関する二重フーリエ級数に展開する．関数 $F(x,t)$ は次の 2 つの条件を満足するものと仮定する．

1）従来の研究に基づき与えられた相互相関関数を満たす．この相互相関関数により，波動の伝播速度，波形の変形の程度（コヒーレンシー）等が与えられる．

2）一地点の観測地点においては観測記録を厳密に満たす．

これら２つの条件を満たす地盤変位をシミュレートする方法を，参考文献4)5)では二重フーリエ級数の係数を未知数として最適化問題として定式化した．本論文で示す理論は二重フーリエ級数の係数を変数変換する事により，未知数を位相角とし，最適化問題として定式化したものである．

2．理論

場所 x と時間 t における地盤の変位を $F(x,t)$ で表し，これを，$0 \le x \le X$，$0 \le t \le T$ の x-t 平面内の長方形領域で二重フーリエ級数に展開する．

$$F(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\{a_{mn}\cos(k_m x)\cos(\omega_n t)+b_{mn}\cos(k_m x)\sin(\omega_n t)+c_{mn}\sin(k_m x)\cos(\omega_n t)+d_{mn}\sin(k_m x)\sin(\omega_n t)\} \tag{1}$$

ただし，$k_m=2\pi m/X$，$\omega_n=2\pi n/T$である．この係数を，

$$\begin{Bmatrix} a_{mn} \\ b_{mn} \\ c_{mn} \\ d_{mn} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\delta_{mn} & \cos\eta_{mn} \\ -\sin\delta_{mn} & -\sin\eta_{mn} \\ -\sin\delta_{mn} & \sin\eta_{mn} \\ -\cos\delta_{mn} & \cos\eta_{mn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} g_{mn} \\ h_{mn} \end{Bmatrix} \tag{2}$$

のように変換すると，

$$F(x,t)=g_{00}+\sum_{n=1}^{\infty}g_{0n}\cos(\omega_n t+\delta_{0n})+\sum_{m=1}^{\infty}g_{m0}\cos(k_m x+\delta_{m0})+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\{g_{mn}\cos(k_m x+\omega_n t+\delta_{mn})+h_{mn}\cos(-k_m x+\omega_n t+\eta_{mn})\} \tag{3}$$

ただし，$h_{00}=h_{m0}=h_{0n}=0$，$\delta_{00}=0$，$\eta_{00}=\eta_{m0}=\eta_{0n}=0$，$(n,m=1,2,\ldots)$とおき，一般性を失うことなく，関数 $F(x,t)$ が与えられた場合に，係数g_{mn}，h_{mn}及び位相角δ_{mn}，η_{mn}が定まるようにした．また，右辺第4項は負の方向に進む波であり，第5項は正の方向に進む波である．

(1) 相互相関関数を満足する

位置 x ,時刻 t での変位 $F(x,t)$ と，位置 x_0，時間 τ だけ異なる点での変位 $F(x+x_0,t+\tau)$ を掛け合わせ，場所 x，時間 t で平均する．そして，相互相関関数 $R_{XT}(x_0,\tau)$ を求める．

$$R_{XT}(x_0,\tau)= g_{00}{}^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}g_{0n}{}^2\cos(\omega_n\tau) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{2}g_{m0}{}^2\cos(k_m x_0)$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(g_{mn}{}^2+h_{mn}{}^2)\cos(k_m x_0)\cos(\omega_n\tau)+\frac{1}{2}(-g_{mn}{}^2+h_{mn}{}^2)\sin(k_m x_0)\sin(\omega_n\tau)\right] \quad (4)$$

本式と，距離 x_0，時間差 τ の関数である相互相関関数 $R_{XT}(x_0,\tau)$を，二重フーリエ級数に展開した式（式(1)と同様に展開し，係数を$A_{mn},B_{mn},C_{mn},D_{mn}$で表す）と，係数を比較すると，例えば$m\neq0$，$n\neq0$ の場合，次式を得る．

$$A_{mn} = (g_{mn}{}^2+h_{mn}{}^2)/2$$
$$B_{mn} = 0$$
$$C_{mn} = 0$$
$$D_{mn} = (-g_{mn}{}^2+h_{mn}{}^2)/2 \quad (5)$$

(2) 観測地点においては観測記録を厳密に満たす

次に，2) の条件に対しては，観測点の位置 $x=x_s$ を固定して考え，時刻 t のみの関数として変位 $F(x_s,t)$を考え，式(1)(2)より二次元のフーリエ級数に展開されたものを，時刻 t のみのフーリエ級数に書き直す．

$$F(x_s,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{m=0}^{\infty}\{g_{mn}\cos(k_m x_s+\delta_{mn})+h_{mn}\cos(k_m x_s-\eta_{mn})\}\cos(\omega_n t)\right.$$
$$\left.+\sum_{m=0}^{\infty}\{-g_{mn}\sin(k_m x_s+\delta_{mn})+h_{mn}\sin(k_m x_s-\eta_{mn})\}\sin(\omega_n t)\right] \quad (6)$$

一方，従来のスペクトル解析で行われているように，各観測点での変位記録 $F(x_s,t)$ は時刻 t のみの関数と考えることができ，時刻 t でフーリエ級数に展開すると

$$F(x_s,t)= \sum_{n=0}^{\infty}\{\alpha_{sn}\cos(\omega_n t)+\beta_{sn}\sin(\omega_n t)\} \quad (7)$$

となり，観測記録より係数α_{sn}，β_{sn} が求められる．式(6)(7)の右辺のcos,sinの係数を比較し，次の関係式を得る．

$$\alpha_{sn}=\sum_{m=0}^{\infty}\left[g_{mn}\{\cos(k_m x_s)\cos(\delta_{mn})-\sin(k_m x_s)\sin(\delta_{mn})\}\right.$$
$$\left.+h_{mn}\{\cos(k_m x_s)\cos(\eta_{mn})+\sin(k_m x_s)\sin(\eta_{mn})\}\right]$$
$$\beta_{sn}=\sum_{m=0}^{\infty}\left[g_{mn}\{-\cos(k_m x_s)\sin(\delta_{mn})-\sin(k_m x_s)\cos(\delta_{mn})\}\right.$$
$$\left.+h_{mn}\{-\cos(k_m x_s)\sin(\eta_{mn})+\sin(k_m x_s)\cos(\eta_{mn})\}\right] \quad (8)$$

実測波形が距離軸方向に M 波まで，時間軸方向に N 波までの展開で近似できるものと仮定し，本式の m,n に関する無限級数を有限な級数 ($0\leq m\leq M$, $0\leq n\leq N$)とし，マトリクス表示する．

(3) 最適化問題への置き換え

結局，以上の問題は，制約条件を式(8)として，次の目的関数を最小とする変数 $\cos(\delta_{mn})$，$\sin(\delta_{mn})$，$\cos(\eta_{mn})$，$\sin(\eta_{mn})$を求める最適化問題になる．

$$\Delta_n = \sum_{m=0}^{M} f[\cos(\delta_{mn}),\sin(\delta_{mn}),\cos(\eta_{mn}),\sin(\eta_{mn})] \longrightarrow \text{minimum } (=0) \quad (9)$$

ただし，正弦関数と余弦関数とが満足すべき関係より，

$$
f[\cos(\delta_{mn}),\sin(\delta_{mn}),\cos(\eta_{mn}),\sin(\eta_{mn})]
\begin{cases}
= 0 & (m=0,n=0 \text{ の場合}) \\
= \{\cos^2(\delta_{0n})+\sin^2(\delta_{0n})-1\}^2 & (m=0,n\neq 0 \quad 〃 \ ) \\
= \{\cos^2(\delta_{m0})+\sin^2(\delta_{m0})-1\}^2 & (m\neq 0,n=0 \quad 〃 \ ) \\
= \{\cos^2(\delta_{mn})+\sin^2(\delta_{mn})-1\}^2 + \{\cos^2(\eta_{mn})+\sin^2(\eta_{mn})-1\}^2 & (m\neq 0,n\neq 0 \quad 〃 \ )
\end{cases} \qquad (10)
$$

まず，仮定した相関関数$R_{xr}(x_0,\tau)$から，係数$A_{mn},B_{mn},C_{mn},D_{mn}$を計算する．次に，式(5)を用いて，$g_{mn},h_{mn}$（正の値を用いるとしても一般性を失わない）を求める．一方，観測波形$F(x_s,t)$より，式(7)の一次元フーリエ級数の係数α_{sn}，β_{sn}を求める．次に，式(8)を条件として，式(9)の値Δ_nを最小にする変数$\cos(\delta_{mn}),\sin(\delta_{mn}),\cos(\eta_{mn}),\sin(\eta_{mn})$を求める．その際，注目すべきことは，式(8)-(10)より，この条件付最適化問題が，場所軸の波数 m に関しては連成しているが，時間軸の波数 n に関しては，連成していないことである．このため，各 n に関する最適化問題を別々に解けば良い事になる．こうして求められた変数 $\cos(\delta_{mn}),\sin(\delta_{mn}),\cos(\eta_{mn}),\sin(\eta_{mn})$を式(2)(1)に代入すれば，地盤の変位 $F(x,t)$ が求められる．

3．数 値 計 算 例

本手法を適用した計算結果の一例を以下に示す．ただし，最適化の数値計算に使用したプログラムは，東京大学大型計算機センター，数値計算プログラム・ライブラリ，非線形最適化プログラム MPLSUMT[7] である．まず，時間領域としては $0 \le t \le 4\text{sec}$ を，場所領域としては，$0 \le x \le 4\text{km}$ を設定する．Goto, Kameda[8]による地震波のパワースペクトルに対する経験式を用いて，時間軸方向の成分としては N=8 の場合，即ち，0.25Hz刻みに 0Hz から2Hzまで 9 つの成分が重なりあった波形を作成し，これを観測波形とした（図ー1 参照）．また，波が正方向に伝播し，また，二地点間距離が離れる程，相関が減少するような，相互相関関数を図ー2 に示すように仮定した．未知数の初期値としては$\delta_{mn} = \eta_{mn} = \pi/4$ を用いた．

計算された時空間関数としての波形を図ー1 に，この波形の相互相関関数を図ー3 に示す．図ー2 と図ー3 の相互相関関数はよく一致しており，仮定した相互相関関数及び観測記録を満たす収束結果が得られている事がわかる．

4．結 論

地震波動の伝播に伴う埋設管路の挙動は，応答変位法を用いて検討される事が多いが，本方法においては，地震入力の時刻歴を管路に沿った各点でどのように与えるかが重要な問題である．本研究の目的は，観測された一地点での強震記録を正確に満足する，時間と場所との連続的な時空間関数としての地盤変位を合理的にシミュレートする事である．

地盤の変位を，埋設管路に沿った場所と時間とに関する二重フーリエ級数に展開し，次の 2 つの条件，

1）与えられた相互相関関数を満たす，

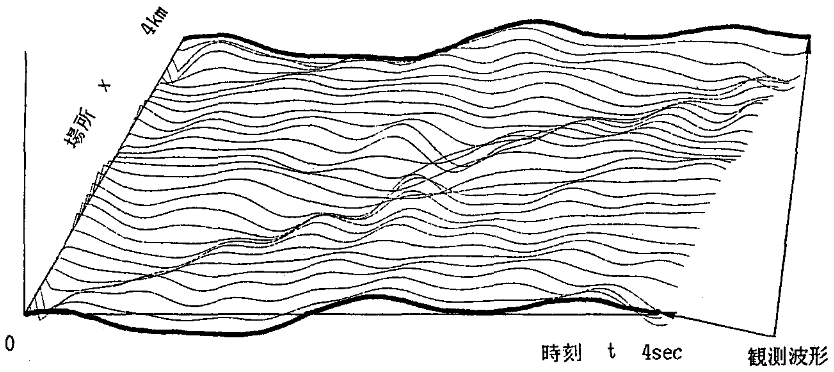
2）観測地点においては観測記録を厳密に満たす，

を満足するものと仮定した．そして，二重フーリエ級数の係数を最適化手法により算定するための二種類のアルゴリズムを展開した．

次に，観測波形及び相互相関関数を想定し，これより時空間関数としての波形をシミュレートした．そして，得られた波形が，仮定した相互相関関数及び観測記録を満足している事を示した．

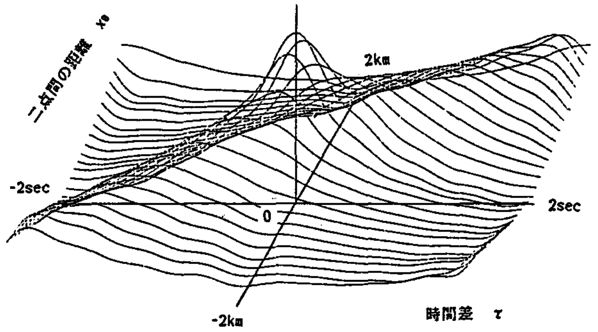
謝辞

本研究をまとめるにあたり埼玉大学工学部渡辺啓行先生に貴重な御助言を頂きました．数値計算を行うにあたり，埼玉大学建設工学科の学生であった田中淳・小嶋伸一・城内正徳君にご協力を頂きました．ま

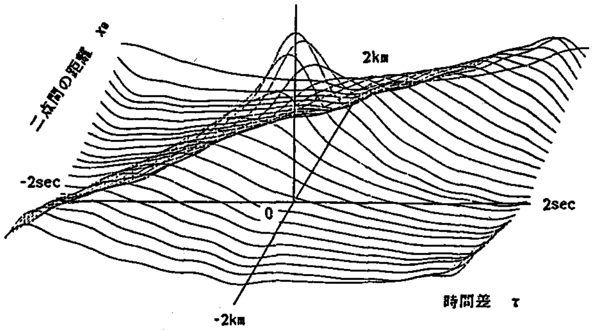


図－1 観測波形，および，波形の時空間関数 F(x,t)

た，文部省科研費（重点領域研究(1)，代表者：佐武正雄教授）の御援助を受けました．記して感謝の意を表します．



図－2 仮定した相互相関関数 Rxt(x0，τ)



図－3 求められた波形の相互相関関数 Rxt(x0，τ)

参考文献

1) 星谷勝・石井清・栗田博昭：空間時間分布特性を有する地震動シミュレーション，土木学会論文集，No.386/I-8，1987.
2) Naganuma,T. Deodatis,G. and Shinozuka,M.:ARMA model for two-dimensional processes, Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol.113, No.2, 1987.
3) 否笠友紀・原田隆典：確率特性を有する地盤の応答と地震動の空間一時間特性について，土木学会第43回年次学術講演会，I-463，1988.
4) 川上英二：時間・空間の関数としての地震波形をアレー観測記録から推定する方法について，土木学会第43回年次学術講演会，I-462，1988.
5) 川上英二：時間・空間の関数としての地震波形をアレー観測記録から推定する方法について，科研費重点領域研究(1)報告書（代表者：佐武正雄教授），1988.
6) 川上英二：一地点の観測記録を満足する地震波形の時空間関数のシミュレーション，科研費重点領域研究(1)報告書（代表者：佐武正雄教授），1989.
7) HITAC 数値計算プログラム・ライブラリ，非線形最適化プログラム，MPLSUMT 解説書.
8) Goto,H. and Kameda H.: Statistical influence of the future earthquake ground motion, Proc., 4WCEE, Chile, Vol.1, A-1, 1969.