

(9) 表層地盤の確率応答と地震動の空間-時間パワースペクトル

宮崎大学工学部 原田隆典 コロンビア大学 篠塚正宣

1. まえがき 従来の地盤震動解析では、一般に、確定的な地盤定数(層厚、土質定数等)を与えて、有限要素法や重複反射理論により地盤の応答値が計算される。しかし、層厚や土質定数は場所とともに不規則に変わるものととらえる方がより現実に近いように思われる。そこで、本研究では、確率特性を有する水平地盤の地震応答を一般化座標の方法と摂動法を用いて解析し、その結果に基づいて地盤の特性を考慮した地震動の空間-時間パワースペクトル密度関数を提案する。また、この結果に基づいて地中埋設管路の地震時歪の実測結果(西尾、1987)を理論的な側面から検討する。

2. 確率特性を有する水平表層地盤の数学モデル 図-1に示すように第j層における層厚を $H_j(x)$ と表わし、 x に関する不規則関数とする。同じように、土質定数の代表値を $q(x, z)$ と表わすと、これは x と z の不規則関数と考えられるが、本研究では、第一近似として x のみの不規則関数と仮定し次のように表現できるものとする。

$$H_j(x) = H_j [1 + f_{H_j}(x)] \quad , \quad q(x, z) = q(z) [1 + f_q(x)] \quad (1)$$

ここに、 H_j と $q(z)$ は $H_j(x)$, $q(x, z)$ の x に関する期待値を表わす。すなわち

$$E[H_j(x)] = H_j \quad , \quad E[q(x, z)] = q(z) \text{ (deterministic function of } z) \quad (2)$$

したがって、式(1)の $f_{H_j}(x)$ と $f_q(x)$ はそれぞれ平均値=0で、層厚と土質定数の x に沿う不規則変動を表わす。式(1)において、 $E[f_{H_j}^2(x)] \leq 1$, $E[f_q^2(x)] \leq 1$, が成立するときはこの地盤はほぼ均質水平地盤と呼ぶことができよう。

3. 運動方程式 図-2に示すような剛体基盤から地震動を受ける表層地盤を考える。この地盤の全層厚は H とする。基盤における入力地震動は x 方向に伝播速度 c で伝播し、パワースペクトル $S_{u_b u_b}(\omega)$ を有する定常不規則波とする。

$$u_b(x, t) = u_b(t - \frac{x}{c}) \quad (3)$$

また、図-2に示すように基盤に対する相対変位を $u_r(x, z, t)$ とすると、 x, z 点における地盤の全変位 $u(x, z, t)$ は次のように表現できる。

$$u(x, z, t) = u_b(t - \frac{x}{c}) + u_r(x, z, t) \quad (4)$$

ここで、一般化変位(座標) $u^*(x, t)$ を導入し、相対変位を次のように仮定すると、

$$u_r(x, z, t) = u^*(x, t)\psi(z) \quad , \quad \psi(0) = 1 \quad (5)$$

式(4)は、また、次のように表現することができる。

$$u(x, z, t) = u_b(t - \frac{x}{c}) + u^*(x, t)\psi(z) \quad (6)$$

式(5), (6)において、 $\psi(z)$ は形状関数とかモード関数と呼ばれ、幾何学的境界条件を満足しなければならない。必ずしも必要ではないが、モード関数は式(5)のように規準化の方が都合のよい場合が多い。図-2の場合、幾何学的境界条件は次のようになる。

$$u_r(x, z, t) = 0 \quad \text{at } z = H \quad (7)$$

モード関数は幾何学的境界条件を満足するものであれば、どのような関数を仮定してもよいが、地震動を受ける地盤の主要振動モードに近い形状を仮定する方が、近似度はよい。本研究では、簡単のため、剛体基盤を有する一層均質地盤の1次モード形を採用するものとする。すなわち、

$$\psi(z) = \cos(\frac{\pi z}{2H}) \quad (8)$$

式(8)は、もちろん、式(5)と幾何学的境界条件、式(7)を満足している。

以上の条件のもとに、図-2に示す地盤内の微小要素 dx, dz に作用する力を考える。作用力として慣性力と復元力が考えられるが、これらを次式のような表現で与えるものとする。

$$F_I = \rho(x, z) \ddot{u}(x, z, t) dx dz, \quad F_R = k(x, z) u_T(x, z, t) dx dz \quad (9)$$

ここに、 $\ddot{u}(x, z, t)$ は x, z における地盤の絶対加速度、 $\rho(x, z)$ は x, z における単位面積当りの土の質量、 $k(x, z)$ は x, z における単位面積当りの復元力係数。ここで、式(1)で定義したような不規則地盤の考え方を導入すると、 $\rho(x, z)$ と $k(x, z)$ は次のように表現できることになる。

$$\rho(x, z) = \rho_z(z) [1 + f_\rho(x)], \quad k(x, z) = k_z(z) [1 + f_k(x)] \quad (10)$$

ここに $\rho_z(z)$ と $k_z(z)$ は $\rho(x, z)$ と $k(x, z)$ の平均値を表わし、 $f_\rho(x)$ 、 $f_k(x)$ は平均値=0の不規則関数である。仮想仕事の原理を用いると、次式が成立する。

$$\delta W = \int_0^H (F_I + F_R) \delta u_T = 0 \quad (11)$$

ここに $\psi(z)$ は仮定したモード関数であるので、 $\delta u_T = \psi(z) \cdot \delta u^*(x, t)$ となる。式(6)~(10)を式(11)に代入し、振動エネルギーの減衰を近似的に表わすために減衰定数 $h^*(x)$ を導入すると、次式のような一自由度振動方程式を得ることができる。

$$\ddot{u}^*(x, t) + 2h^*(x)\omega^*(x)\dot{u}^*(x, t) + [\omega^*(x)]^2 u^*(x, t) = -\beta \ddot{u}_b(t - \frac{x}{c}) \quad (12)$$

ここに、 $\omega^*(x)$ は地盤の基本固有振動数、 β は刺激係数。これらは次のように与えられる。

$$\omega^*(x) = \sqrt{\frac{[1 + f_k(x)] \int_0^H k_z(z) \psi^2(z) dz}{[1 + f_\rho(x)] \int_0^H \rho_z(z) \psi^2(z) dz}}, \quad \beta = \frac{\int_0^H \rho_z(z) \psi(z) dz}{\int_0^H \rho_z(z) \psi^2(z) dz} \quad (13)$$

しかし、また、これらは式(1)のような形式的な表現とすることもできる。すなわち、

$$\omega^*(x) = \omega_0 [1 + f(x)], \quad h^*(x) = h_0 [1 + h(x)] \quad (14)$$

ここに、 ω_0 と h_0 は $\omega^*(x)$ 、 $h^*(x)$ の平均値で、 $f(x)$ 、 $h(x)$ は平均値=0の不規則関数である。 $\omega^*(x)$ と $h^*(x)$ の変動係数 δ_{ω^*} 、 δ_{h^*} は、それぞれ $f(x)$ 、 $h(x)$ の標準偏差 σ_{ff} 、 σ_{hh} に等しい。

$$\delta_{\omega^*} = \sigma_{ff} \quad \text{and} \quad \delta_{h^*} = \sigma_{hh} \quad (15)$$

4. 地表面地震動変位の空間-時間パワースペクトル密度関数 ここでは、地表での地震動変位 $u(x, t) = u(x, 0, t)$ (式(6)参照)の2次元統計量を検討する。詳細は文献[1]に譲るが、 h_0 、 σ_{ff} 、 σ_{hh} は微小量と仮定して、摂動法を用いて式(12)を解く。更に、 $f(x)$ 、 $h(x)$ 、および $u_b(t-x/c)$ は統計的に互に独立であると仮定することにより、 $u(x, t)$ の空間-時間パワースペクトルを次のように求めることができる。

$$S_{uu}(\kappa, \omega) = S_{u_b u_b}(\omega) [\omega_0^4 + (2\beta + 4h_0^2 - 2)\omega_0^2 \omega^2 + (\beta - 1)\omega^4] |H(\omega_0, h_0, \omega)|^2 \delta(\kappa + \frac{\omega}{c}) \\ + S_{u_b u_b}(\omega) 4\beta^2 \omega_0^4 |H(\omega_0, h_0, \omega)|^4 S_{ff}(\kappa + \frac{\omega}{c}) \quad (16)$$

ここに、 $\delta(x)$ はデルタ関数、 $S_{u_b u_b}(\omega)$ は基盤での地震動変位 $u_b(t-x/c)$ のパワースペクトル密度関数、 $S_{ff}(\kappa)$ は地盤の卓越振動数の空間的变化を表わす $f(x)$ (式(14)参照) のパワースペクトル密度関数である。振動数応答関数 $H(\omega_0, h_0, \omega)$ は次のように与えられる。

$$H(\omega_0, h_0, \omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 12h_0\omega_0\omega}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (17)$$

これらの関数は基盤での地震動および地盤の卓越振動数の場所的な分布データと地盤の減衰定数の平均値より定めることができる。

図-3に式(16)の空間-時間パワースペクトルの形状を示す。パラメータとして以下のものを用いている。

$$S_{u_b u_b}(\omega) = \frac{0.25}{1 + (\frac{\omega}{3.8})^4} e^{-0.04\omega} \quad S_{ff}(\kappa + \frac{\omega}{c}) = \sigma_{ff}^2 \frac{b^3}{4\sqrt{\pi}} (\kappa + \frac{\omega}{c})^2 \exp[-\{\frac{b(\kappa + \frac{\omega}{c})}{2}\}^2] \quad (18)$$

ここに、 $\omega_0 = 6$ rad/sec, $h_0 = 0.2$, $\beta = 4/\pi$, $c = 600$ m/sec, $b = 100$ m, $\delta_{\omega^*} = 0.085$ を用いた。杉戸博士、亀田博

土の研究によると[4]、Subub(w)は地震のマグニチュードMと震央距離Δの関数で与えられるが、M=6.5、Δ=30 kmに対応するものとして式(18)のように近似した。Sff(k)は文献[1,2]の結果より仮定した。図-3には、3つの山が存在するが、k-w平面において、k=w/600の線上にある山は基盤での地震動が水平方向に600 m/secで伝播することに対応するものである。他の2つの山は、地盤の卓越振動数の空間的変動によるものに対応している。

5. 観測に基づく地中パイプの地震時歪の経験式に対する理論的解釈 パイプの地震時最大軸歪に関して、地盤条件の異なる4地点における地震観測結果と2つの模型実験結果を整理して、西尾(1987)[3]は次のような関係式を求めている。

$$\epsilon_{\max}^p / A_{\max} = 5.49 (NI)^{0.96} (\mu/\text{gal}) \quad (19)$$

ここに、A_{max}=地表での最大加速度(cm/s²)、NI=地盤の不均質性指標。これは次のように定義されている。

NI=管路に沿う各点(j=1...n)における地盤の卓越振動数ω_j^{*}と減衰定数h=0.1に対応する変位応答スペクトル値SD(ω_j^{*}, 0.1)の標準偏差

$$= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n [S_D(\omega_j^*, 0.1) - S_{D0}]^2} \quad (20)$$

ここに、SD0はSD(ω_j^{*}, 0.1)の平均値である。

式(20)の最大の特徴は、地震時のパイプ歪の予測しきに地震動の強さ(A_{max})に加えて地盤の不均質性の影響が取り込まれている点であろう。式(20)によると、同じ地震動の強さであっても地盤が不均質なほどNIの値が大きくなりパイプ歪が増加することになる。

前節の不規則地盤の解析で求められた統計量(式(16))から確率論的に地盤の最大軸歪を求めることが出来る。詳細は文献[1,2]に譲り、ここでは、結果のみを示す。

$$\epsilon_{\max} = 2\sqrt{2}\beta\sqrt{1+4h_0^2} \frac{\sigma_{ff}}{L_f^*} S_A(\omega_0, 8h_0^3) \quad (21)$$

ここにβ, h₀, ω₀は、それぞれ、刺激係数(4/π)、地盤の減衰定数、地盤の卓越振動数、である。L_f^{*}はf(x)の相関距離で見かけ波長をLfとすると、次のような関係が成り立つ[2]。

$$L_f^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \pi L_f \quad (22)$$

SA(ω₀, 8h₀³)は基盤での地震動の絶対加速度応答スペクトルの振動数ω₀、減衰定数8h₀³に対応する値である。今、加速度応答スペクトルの減衰定数による補正係数をα(h₀)とすると、地表の最大加速度A_{max}は地盤をω₀, h₀の1自由度震動系と考えれば、A_{max}は近似的にSA(ω₀, h₀)に等しいとけるから次式が成立する。

$$A_{\max} \approx S_A(\omega_0, h_0) = \frac{\alpha(h_0)}{\alpha(8h_0^3)} S_A(\omega_0, 8h_0^3) \quad (23)$$

また、変位応答スペクトルSD(ω₀^{*}, 0.1)は地盤の卓越振動数の関数であるから、SD(ω₀^{*}, 0.1)の標準偏差NIとω₀^{*}の標準偏差σ_{ω₀^{*}}の間には次の近似的関係が成立する。

$$NI \approx \left| \frac{dS_D(\omega^*, 0.1)}{d\omega^*} \right|_{\omega^*=\omega_0} \sigma_{\omega^*} = \gamma(\omega_0) \omega_0 \sigma_{ff} \quad (24)$$

さらに、篠塚、小池(1982)による交換係数δを導入すると、パイプ歪は地盤歪から次式により求めることができる。

$$\epsilon_{\max}^p = \delta \epsilon_{\max} \quad (25)$$

したがって、式(23)、(24)、(25)を式(21)に代入すると、理論的に次式を導くことができる。

$$\epsilon_{\max}^p / A_{\max} = \frac{2\sqrt{2} \sqrt{1+4h_0^2} \alpha(8h_0^3) \beta \delta}{L_f^* \omega_0^3 \alpha(h_0) \gamma(\omega_0)} \cdot NI \quad (26)$$

理論的な式では、パイプ歪は、NIに正比例するが、これは経験式(20)とほぼ同じ結果であることがわかる。

地盤、地形の複雑な地域に地中パイプの被害が多くなる傾向は過去の震害調査からしばしば指摘され

ているが、地盤の複雑さを表わす具体的な指標は片山、久保博士らによる地盤の卓越振動数の標準偏差による分類以外にないと思われるが、西尾による不均質性指標NIもまた、理論的な解釈が可能であり、有用な指標であると思われる。もしも、パイプ歪または、地盤歪を地震の規模と震央距離および地盤条件のある関係式で予測するものとなれば、NIを地盤条件の指標とすることもできよう。

(1)Harada, T. and M. Shinozuka, "Stochastic Analysis of Spatial Variability of Seismic Ground Deformation", Proc. of Recent Advances in Lifeline Earthquake Engineering, June 22-24, Princeton, 1987.

(2)Harada, T. and M. Shinozuka, "Ground Deformation Spectra", Proc. of 3rd US National Conference on Earthquake Engineering, Charleston, Aug. 24-28, 1986; or Stochastic Mechanics, Vol.1, pp.45-57, Edited by M. Shinozuka, Dept. of Civil Engineering and Engineering Mechanics, Columbia University, 1987.

(3)Nishio, N., "Mechanism of Seismic Strain in Buried Pipelines Based on Field Observations and Model Experiments", Proc. of 5th Canadian Conference on Earthquake Engineering, Ottawa, July 6-8, 1987.

(4)Sugito, M. "Earthquake Motion Prediction and Buried Pipe Response for Urban Seismic Damage Assessment", School of Civil Engineering, Kyoto University, October, 1986.

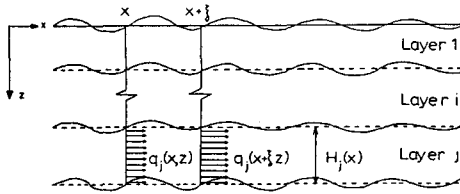


Fig. 1 Horizontal Soil Layers Showing Layer Depth $H_j(x)$ and Soil Property $q_j(x, z)$

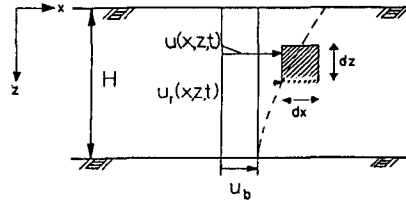


Fig. 2 Mathematical model of the Horizontally Homogeneous Ground, and its Notation

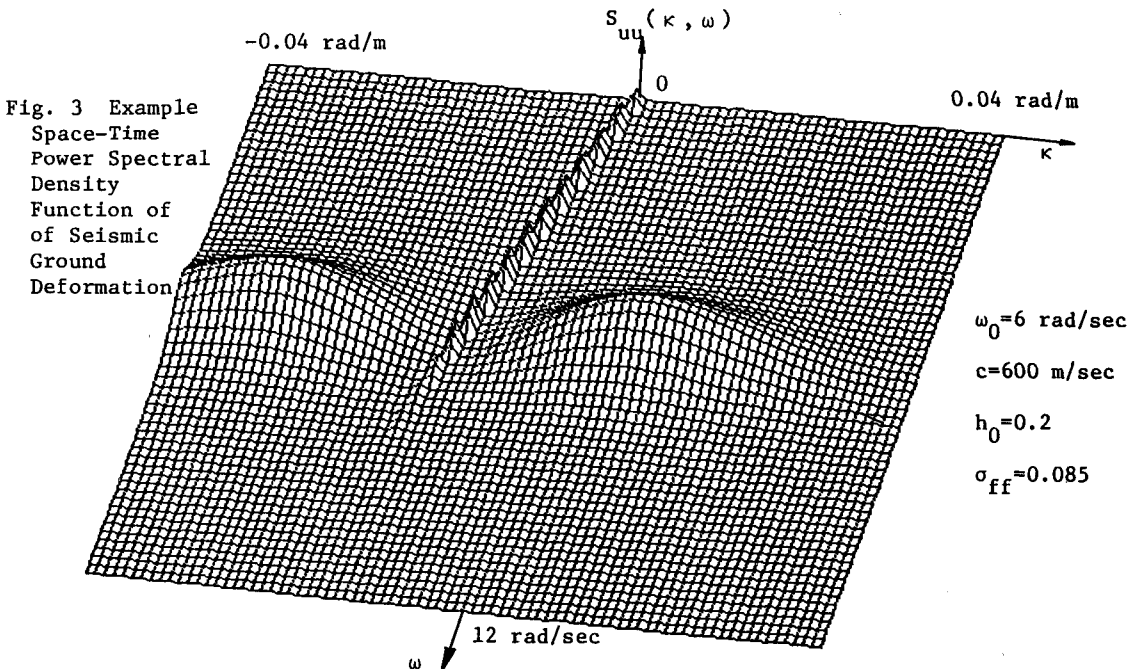


Fig. 3 Example Space-Time Power Spectral Density Function of Seismic Ground Deformation