

(102) 強度および外力のばらつきと不確実性を考慮した盛土の地震時信頼性

金沢大学工学部 北浦 勝

1. まえがき

盛土などの土構造物の地震時の信頼性解析に当っては、強度はもとより外力である地震動強度も統計的性質を有する確率変量であるから、それらの確率密度関数があらかじめわかっていないなければならない。しかるに確率密度関数の形状が例えば正規分布関数であるとわかっている場合でも、サンプル数が少ないかゆえにその関数形を規定する平均値や分散などの母数が不確定な量としてしか取り扱えない場合がある。このときには強度や外力が本来有しているばらつきは元より、その母数の中に含まれる不確実性をも考慮に入れた信頼性解析を実行する必要がある。このように複雑な条件を取り込んだ解析の厳密解を得ることは困難であるので、ふつうはモンテカルロ法によって解を求めている。この方法では結果の精度を上げるために長い演算時間を要するが、パラメタの数が増すとその時間が急激に増加するという難点がある。Rosenbluethによって提案された Point Estimate Method (PEM法)を用いると、この点が改善され、しかも工学的に受容できる精度の解を得ることが知られている。

そこで本研究では、盛土の強度や地震動の平均値および分散にばらつきは元より不確実性がある場合の盛土の破壊確率をPEM法を用いて解析し、破壊確率の平均値のみならず変動係数によってそのあいまいさをも積極的に評価しようとしたものである。

2. Point Estimate Method

本研究では、①盛土の強度に関与するパラメタ、例えば土の粘着力はある確率密度関数を有する確率変量であること、②しかし確率密度関数を規定する平均値や分散などの母数も不確定な量であり、これもある確率密度関数を有する確率変量であること、③母数の確率密度関数は定かたなく、3次までのモーメントしかわからないこと、④外力に関与するパラメタである地震動の強さなどについても同様であること、と仮定している。

PEM法は First Order Second Moment 法の一つであり、分布形状は定かたないパラメタの数次までのモーメントのみから、そのパラメタより成る強度や外力に注目し、構造物の破壊確率を推定する方法である。本研究では2点推定法を用いるので、以下の解析に必要な点に絞って2点推定法の概略を述べる。¹⁾

X なる確率変数の関数として与えられる $Y=Y(X)$ を考える。 X の確率密度関数はわかっていないが、3次までのモーメントはわかっているものとする。このとき X の確率密度関数 $f_X(x)$ は $x=x_+$ と $x=x_-$ なる2点でのみ値を有し、次式のように与えられる。

$$f_X(x) = P_+ \delta(x-x_+) + P_- \delta(x-x_-) \quad (1)$$

ここに P_+ 、 P_- はそれぞれ $x=x_+$ 、 $x=x_-$ に対応する確率である。確率密度関数 $f_X(x)$ は x に関して $-\infty$ から $+\infty$ まで積分すると1となる性質のものであるから、

$$P_+ + P_- = 1 \quad (2)$$

なる関係を得る。次に、 X の平均値 \bar{X} 、分散 σ_X^2 、3次モーメント $\mu_X \sigma_X^3$ は定義により、それぞれ次式で与えられる。

$$P_+ x_+ + P_- x_- = \bar{X} \quad (3)$$

$$P_+ (x_+ - \bar{X})^2 + P_- (x_- - \bar{X})^2 = \sigma_X^2 \quad (4)$$

$$P_+ (x_+ - \bar{x})^3 + P_- (x_- - \bar{x})^3 = \gamma_x \sigma_x^3 \quad (5)$$

以上の式(2)~(5)を連立させて解くことにより、 x_+ 、 x_- 、 P_+ 、 P_- は次式のように求まる。なおここでは簡単のために $\gamma_x = 0$ 、すなわち確率密度関数が対称形であると仮定している。

$$x_+ = \bar{x} + \sigma_x, \quad x_- = \bar{x} - \sigma_x, \quad P_+ = P_- = \frac{1}{2} \quad (6)$$

これらの値を用いることにより、 γ の n 次モーメントは次式のように計算される。

$$\begin{aligned} E[\gamma^n] &= \int \gamma^n f_\gamma(x) dx = \int \gamma^n(x) [P_+ \delta(x-x_+) + P_- \delta(x-x_-)] dx \\ &= P_+ \gamma^n(x_+) + P_- \gamma^n(x_-) \\ \text{又は} &= P_+ \gamma_+^n + P_- \gamma_-^n \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 $\gamma_+ = \gamma(x_+)$ 、 $\gamma_- = \gamma(x_-)$

本節の最初に述べた仮定に基づき、本研究では4節で母数の不確実性を取り込んでいく過程でPEM法を適用する。

3. 盛土の破壊確率

盛土の破壊を円弧すべりとし、図-1に示すようにすべりの中心 P と半径 r を仮定すると、鉛直線で n 分された斜面の円弧 AB 内に含まれる土塊の安全率 F_s は次式で表わされる。

$$F_s = \frac{\gamma \sum_{i=1}^n \{ C_i l_i + (W_i \cos \alpha_i - k_r W_i \sin \alpha_i) (1 - U_i) \tan \phi_i \}}{\sum_{i=1}^n (W_i x_i + k_r W_i y_i)} \quad (8)$$

ここに、 C_i ：第 i 帯片の土の粘着力、 l_i ：第 i 帯片の長さ、 $W_i = \gamma_i V_i$ ：第 i 帯片の土の重さ、 γ_i ：第 i 帯片の土の単位体積重量、 V_i ：第 i 帯片の土の体積、 α_i ：第 i 帯片の土の底面が水平軸となす角度、 k_r ：水平震度、 U_i ：第 i 帯片の過剰間隙水圧比、 ϕ_i ：第 i 帯片の土の内部摩擦角、 x_i 、 y_i ：第 i 帯片の重心と円弧すべりの中心 P との距離の水平方向、鉛直方向の大きさ。

ところで式(8)および図-1においては地震力を各帯片の重心の位置に作用させているが、簡単のために円弧上に作用させることも多い。そこでここでもこの仮定を採用し、 $y_i/r \doteq \cos \alpha_i$ 、 $x_i/r = \sin \alpha_i$ と置くことにより、式(8)は、

$$F_s = \frac{\sum_{i=1}^n \{ C_i l_i + \gamma_i V_i (\cos \alpha_i - k_r \sin \alpha_i) (1 - U_i) \tan \phi_i \}}{\sum_{i=1}^n \gamma_i V_i (\sin \alpha_i + k_r \cos \alpha_i)} \quad (9)$$

のように書き直せる。なお実質的には式(9)は水平方向の地震動によるすべりの力について見た安全率となっている。

式(9)の分子が円弧すべりに対する強度にほぼ対応し、分母が外力にほぼ対応している。この式の強度や外力を構成する各種パラメータは確率密度関数を有する確率変数であるから、盛土の破壊確率は同様の次式で表わされる(図-2)。

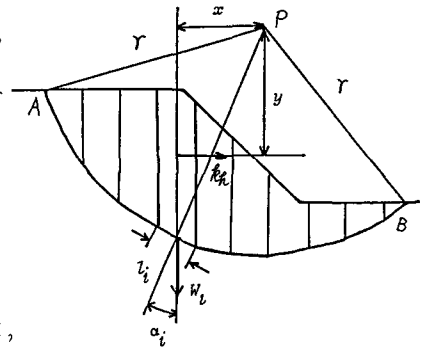


図 1 円弧すべり面を仮定した斜面の安定計算モデル

$$P_f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_R(r) f_S(s) dr ds \quad (10)$$

ここに、 P_f ：盛土の破壊確率、 $f_R(r)$ 、 $f_S(s)$ ：強度と外力の確率密度関数。ところで、例えば C_i と δ_i は互いにほぼ独立であると考えるのが、隣り合う帯片同士の例えば C_n は一般に大きな相関を有しているものと考えられるので、これらの関係を忠実に反映した強度や外力の確率密度関数を作り上げることは容易でない。そこで本研究では簡単のためにすべてのパラメータは互いに独立であると仮定する。また震度 k_R 以外の各パラメータは平均値および分散が次式で与えられる正規分布であると仮定すると、強度および外力の確率密度関数も正規分布となり、その平均値および分散は次式で与えられる。ただし k_R の確率密度関数については述べる。

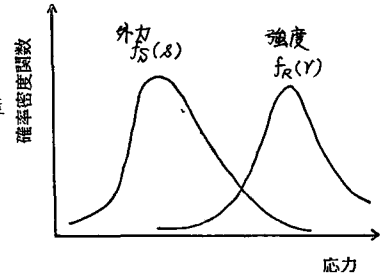


図-2 荷重と抵抗の分布

\bar{z} ：平均値、 σ_z^2 ：分散、ただし、 $z = C_i, \phi_i, \delta_i, U_i, R, S$ 。

$$\bar{R} = \sum_{i=1}^n \{ \bar{C}_i l_i + \bar{\delta}_i V_i (\cos \alpha_i - k_R \sin \alpha_i) (1 - \bar{U}_i) \tan \bar{\phi}_i \} \quad (11)$$

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n \{ \bar{\delta}_i V_i (\sin \alpha_i + k_R \cos \alpha_i) \} \quad (12)$$

$$\sigma_R^2 = \sum_{i=1}^n \{ \sigma_{C_i}^2 l_i^2 + V_i^2 (\cos \alpha_i - k_R \sin \alpha_i)^2 E[\delta_i^2] E[(1 - U_i)^2] E[\tan^2 \phi_i] - \{ \bar{\delta}_i V_i (\cos \alpha_i - k_R \sin \alpha_i) (1 - \bar{U}_i) \tan \bar{\phi}_i \}^2 \} \quad (13)$$

$$\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^n \{ \sigma_{\delta_i}^2 V_i^2 (\sin \alpha_i + k_R \cos \alpha_i)^2 \} \quad (14)$$

一般に、 $E[z^2] = \sigma_z^2 + \bar{z}^2$ であるから、式(13)の右辺はすべて各パラメータの平均値と分散で表わされる。従ってある水平震度 k_R に対して盛土の破壊確率 $P_f(k_R)$ は次式で与えられる。

$$P_f(k_R) = \Phi\left(\frac{\bar{S} - \bar{R}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}}\right) \quad (15)$$

ここに $\Phi(x)$ は誤差関数を表わし、次式で定義される。ただし、 m, σ^2 はそれぞれ x の平均値と分散を示す。

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (16)$$

4. PEM法による盛土の破壊確率

3. において各水平震度 k_R ごとの盛土の破壊確率を求めたが、 C_i などの各パラメータの平均値や分散が不確実性を含んでいる場合には、ばらつきはもとより不確実性をも考慮に入れた破壊確率を求める必要がある。予備的検討から分散の不確実性が破壊確率に及ぼす影響は平均値によるそれよりも一般に小さいことがわかったので、ここでは平均値の不確実性のみ注目して解析を進める。2. において誘導した式(7)を多変数関数に拡張して式(15)

に適用することにより、ばらつきと不確実性とを取り込んだ破壊確率を得ることができる。すなわち2点推定法においては図-3にあるように確率変数 z の平均値 \bar{z} を平均値の平均値 $\bar{\bar{z}}$ から平均値の標準偏差 σ_z だけずらす操作を取り込むことになる。

式(15)が k_R のみならず

$\bar{C}_i, \bar{\phi}_i, \bar{\delta}_i, \bar{U}_i$ の関数であることと考慮して、同式と次のように書き改める。

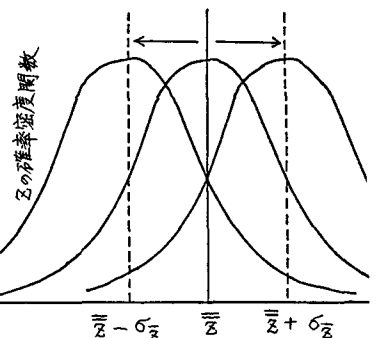


図-3 PEM (2点推定法)

$$P_f = P_f(\bar{c}_i, \bar{\phi}_i, \bar{\gamma}_i, \bar{U}_i, k_R) \quad (17)$$

P_f と1回の地震に対する盛土の破壊確率とすると、 P_f^n の期待値は次式のように表わされる。

$$\begin{aligned} E[P_f^n] &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P_f^n(\bar{c}_i, \bar{\phi}_i, \bar{\gamma}_i, \bar{U}_i, k_R) [P_{\bar{c}_i-} \delta(\bar{c}_i - \bar{c}_{i-}) + P_{\bar{c}_i+} \delta(\bar{c}_i - \bar{c}_{i+})] \\ &\quad \times \dots \times [P_{\bar{U}_i-} \delta(\bar{U}_i - \bar{U}_{i-}) + P_{\bar{U}_i+} \delta(\bar{U}_i - \bar{U}_{i+})] \\ &\quad \times [P_{\bar{k}_R-} \delta(\bar{k}_R - \bar{k}_{R-}) + P_{\bar{k}_R+} \delta(\bar{k}_R - \bar{k}_{R+})] f_{k_R}(k_R, \bar{k}_R) d\bar{c}_i \dots d\bar{U}_i d\bar{k}_R dk_R \\ &= \int [P_{\bar{c}_i-} P_{\bar{\phi}_i-} \dots P_{\bar{k}_R-} P_f^n(\bar{c}_i, \bar{c}_{\bar{c}_i-}, \dots, \bar{c}_{\bar{U}_i-}, k_R) f_{k_R}(k_R, \bar{k}_R) \\ &\quad + \dots + P_{\bar{c}_i+} P_{\bar{\phi}_i+} \dots P_{\bar{k}_R+} P_f^n(\bar{c}_i, \bar{c}_{\bar{c}_i+}, \dots, \bar{c}_{\bar{U}_i+}, k_R) f_{k_R}(k_R, \bar{k}_R)] dk_R \quad (18) \end{aligned}$$

ここに、 $f_{k_R}(k_R, \bar{k}_R)$ はある一定期間中に発生する最大地震動の震度の確率密度関数である。

5. 数値計算例

数値計算に用いた各パラメタの平均値の平均値 $\bar{\sigma}$ 、変動係数 δ_{σ} 、平均値の変動係数 $\delta_{\bar{\sigma}}$ は表-1のとおりである。同表には破壊確率の平均値 \bar{P}_f 、および変動係数 δ_{P_f} も記してある。 k_R に相当する最大地震加速度の確率密度関数として、東京における75年間のそれを用いた²⁾(図-4)。なお Case No. 6 までは過剰間隙水圧の発生を考慮しない場合であり ($U=0$)、Case 7 は過剰間隙水圧比 U と 0.5

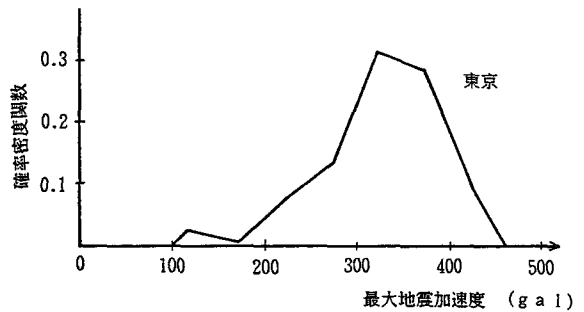


図-4 75年間に於ける最大地震加速度の確率密度

の一定にしたものである。各パラメタに不確実性のない ($\delta_{\bar{\sigma}}=0$) 場合の \bar{P}_f は 15% 程度であるが、すべてのパラメタの不確実性すなわち変動係数 $\delta_{\bar{\sigma}}$ を 0.1 とすると、 \bar{P}_f は 19% にまで上昇し、 δ_{P_f} が 0 から 54% にまで大きくなる。すなわち P_f のばらつきが増加が目される。 $\delta_{\bar{\sigma}}$ の一部のみが 0.1 から 0.2 まで大きくなると、当然のことながら \bar{P}_f はもとより δ_{P_f} も一

表-1 パラメタおよび破壊確率

Case#	\bar{c} (%)	δ_c	$\delta_{\bar{c}}$	$\bar{\sigma}$ (%)	δ_{σ}	$\delta_{\bar{\sigma}}$	$\bar{\phi}$ (%)	δ_{ϕ}	$\delta_{\bar{\phi}}$	\bar{k}_R	δ_{k_R}	$\delta_{\bar{k}_R}$	\bar{P}_f	δ_{P_f}
1	1.2	0.3	0	1.8	0.05	0	25	0.1	0	0.34	0.21	0	0.155	0
2	"	"	0.1	"	"	0.1	"	"	0.1	"	"	0.1	0.187	0.54
3	"	"	0.2	"	"	"	"	"	"	"	"	"	0.198	0.69
4	"	"	0.1	"	"	0.2	"	"	"	"	"	"	0.204	0.76
5	"	"	"	"	"	0.1	"	"	0.2	"	"	"	0.199	0.69
6	"	"	"	"	"	"	"	"	0.1	"	"	0.2	0.198	0.49
7*	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	"	0.1	0.733	0.16

*のみ $U=0.5$ 。他は $U=0$

般には増加している。 δ_{k_R} が 0.2 となる場合のみ δ_{P_f} は Case 2 よりもやや低下しており、地動加速度の不確実性の増加は盛土の破壊を確実に増加するように作用している。本シミュレーションの範囲内では土の単位体積重量の不確実性が結果に最も大きな影響を及ぼしている。過剰間隙水圧比を 0.5 にまで引き上げると、 \bar{P}_f は Case 2 の4倍にまで増加し、しかも δ_{P_f} は $1/3$ に低下しており、 U の増加は、すなわち地盤の液状化は盛土の破壊確率を確実に増大させることがよくわかり、 U の評価に特に配慮すべきであることが知られる。

研究実施に当ってプログラム開発で元大学院生稲木英憲氏、大学院生日比野友亮君に協力して頂いた。研究費の一部は科学研究費総合研究(A)(研究代表者小堀為雄)によった。記して感謝します。

参考文献 1) Rosenblueth: Proc. of Nat. Acad. Sci., Vol. 72, No. 10, 1975. 2) 後藤 豊田: 土論報, No. 159, 1968.