

(29) 積分方程式法による不整形多層地盤の地震動解析

京都大学工学部 ○広瀬 壮一
 京都大学工学部 丹羽 義次
 京都大学大学院 安藤 賢一

1. はじめに

地盤の不整形性が地震動に大きい影響を与えることはよく知られており、その解析法として、差分法、有限要素法、積分方程式法をはじめ、数多くの数値解法が提案されている。しかしながら、いずれの解法も、あらゆる不整形地盤に適用できるわけではなく、各々、長所と短所を持っている。したがって、不整形地盤の地震動解析においては、解析しようとする地盤に適した解析法を選択することが得策であり、また、解析すべき地盤に適した解析法を開発することが望まれる。このような観点より、本研究は、不整形多層地盤の地震動解析に適した一解法を示すものである。ここで提案する解法は、波数領域における積分方程式であり、その定式化の基本的な考え方は、Waterman の提案した Transition-matrix 法¹⁾ に依っている。

2. 解析モデル

簡単のため、Fig. 1 に示すような2次元2層地盤における地震動を考えよう。領域 D_1 は、境界 ∂D_1 と境界 $(\partial D_2 + \partial S)$ によって囲まれた層で、もとは厚さ h_2 の様な水平層であったものが、境界 ∂S の部分だけしゅう曲したものである。領域 D_1 及び D_2 はそれぞれ等方均質な線形弾性体であると仮定し、材料定数は、密度 ρ 、ポアソン比 ν 、せん断剛性 μ によって与えられるものとする。ただし、領域 D_1 と領域 D_2 が接する境界 $(\partial D_2 +$

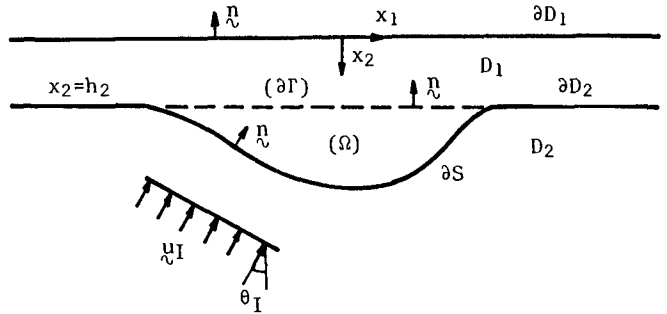


Fig.1 Model of a layered media.

$\partial S)$ 上では変位及び応力ベクトルが連続であるとし、境界 ∂D_1 は自由境界条件を満足しているものとする。さらに、不整形境界 ∂S によって生じる散乱波 $u_s (= u - u_F$; ただし、 u_F は不整形境界 ∂S がないと仮定した水平成層地盤における変位場を表す)は、領域 D_1 及び D_2 の無限遠方において放射条件を満足するものと仮定する。解くべき問題は、以上のような条件を満足する地盤に、調和平面波 u_1 (P波あるいはSV波)が入射した時の、自由表面 ∂D_1 上の地震動解析である。

3. 変位場の積分表現

まず、領域 D_1 における変位場の積分表現を導く。散乱波 $u_s^{(1)}$ (添字(1)は、領域 D_1 に関する量であることを意味する)は、無限遠方において放射条件を満足するので、Green(Somigliana)の公式より次式を満足する。

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\partial D_1} \mathcal{U}^{(1)}(x, \xi) \underline{u}_s^{(1)}(\xi) dS_\xi - \int_{\partial D_2 + \partial S} \{ \mathcal{U}^{(1)}(x, \xi) \underline{t}_s^{(1)}(\xi) - \mathcal{T}^{(1)}(x, \xi) \underline{u}_s^{(1)}(\xi) \} dS_\xi \\
 & = \begin{cases} \underline{u}_s^{(1)}(x) & x \text{ in } D_1 \\ \underline{0} & x \text{ in } D_1^c \text{ (} D_1^c \text{は } D_1 \text{の補領域)} \end{cases} \quad (1)
 \end{aligned}$$

ただし、 \underline{U} は、定常動弾性問題の基本解であり、 \mathcal{T} 及び \underline{t}_s は、それぞれ次式で定義される二重層核と応力ベクトルである。

$$\underline{T}(x, y) = \underline{U}(x, y) \underline{T}^y, \quad \underline{t}_S = \underline{T}^y u_S \quad (\underline{T}^y \equiv 2\mu \nu (1-2\nu)^{-1} \underline{n} \cdot \nabla + 2\mu (\underline{n} \cdot \nabla) \underline{1} + \mu \underline{n} \times \nabla \times).$$

一方、境界 ∂S と境界 $\partial \Gamma$ で囲まれた領域 Ω における変位場 $u_F^{(0)}$ に対して Green の公式を適用することにより次式を得る。

$$\int_{\partial \Gamma \rightarrow \partial S} \{ \underline{U}^{(0)}(x, y) \underline{t}_F^{(0)}(y) - \underline{T}^{(0)}(x, y) u_F^{(0)}(y) \} dS_y = \begin{cases} u_F^{(0)}(x) & x \text{ in } \Omega \\ 0 & x \text{ in } \Omega^c. \end{cases} \quad (2)$$

したがって、式(1)と(2)より、領域 D_1 における変位場の積分表現が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial D_1} \underline{T}^{(0)}(x, y) u_S^{(0)}(y) dS_y - \int_{\partial D_2} \{ \underline{U}^{(0)}(x, y) \underline{t}_S^{(0)}(y) - \underline{T}^{(0)}(x, y) u_S^{(0)}(y) \} dS_y \\ & - \int_{\partial S} \{ \underline{U}^{(0)}(x, y) \underline{t}^{(0)}(y) - \underline{T}^{(0)}(x, y) u^{(0)}(y) \} dS_y \\ & + \int_{\partial \Gamma} \{ \underline{U}^{(0)}(x, y) \underline{t}_F^{(0)}(y) - \underline{T}^{(0)}(x, y) u_F^{(0)}(y) \} dS_y = \begin{cases} u_S^{(0)}(x) & x \text{ in } D_1 \cap \Omega^c & (3.1) \\ u^{(0)}(x) & x \text{ in } \Omega & (3.2) \\ 0 & x \text{ in } D_1^c & (3.3) \end{cases} \end{aligned}$$

以上の手順に従えば、領域 D_2 における変位場の積分表現も容易に得ることができ、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D_2} \{ \underline{U}^{(0)}(x, y) \underline{t}_S^{(0)}(y) - \underline{T}^{(0)}(x, y) u_S^{(0)}(y) \} dS_y \\ & + \int_{\partial S} \{ \underline{U}^{(0)}(x, y) \underline{t}^{(0)}(y) - \underline{T}^{(0)}(x, y) u^{(0)}(y) \} dS_y \\ & - \int_{\partial \Gamma} \{ \underline{U}^{(0)}(x, y) \underline{t}_F^{(0)}(y) - \underline{T}^{(0)}(x, y) u_F^{(0)}(y) \} dS_y = \begin{cases} u_S^{(0)}(x) & x \text{ in } D_2 & (4.1) \\ u_F^{(0)}(x) & x \text{ in } \Omega & (4.2) \\ 0 & x \text{ in } D_2^c \cap \Omega^c & (4.3) \end{cases} \end{aligned}$$

式(3)及び(4)における field point x を境界へ極限移行すると、通常境界積分方程式(境界要素法)を得ることができ、数値的に解くことができる。しかしながら、ここでは多層地盤の地震動解析に適した波数領域の積分方程式を得るために、式(3)及び(4)をさらに変形する。

4. 基本解

その準備として、基本解 \underline{U} を次のように平面波 \mathcal{Q} の重ね合せとして表現する。

$$\underline{U}(x, y) = i(4\mu\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Q}_{(\pm)l}(\xi_1, \xi_2) \bar{\mathcal{Q}}_{(\pm)l}(\xi_1, y) \Pi_{(\pm)l}^{-1}(\xi_1) d\xi_1 \quad (5)$$

ただし、 $\mathcal{Q}_{(\pm)l}$ や $\Pi_{(\pm)l}$ 等は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{(\pm)l}(\xi_1, x) &= \underline{Q}_{(\pm)l}(\xi_1) \exp(i \underline{I}_{(\pm)l}(\xi_1) \cdot x), & \underline{I}_{(\pm)l}(\xi_1) &= (\xi_1, \Pi_{(\pm)l}) \\ \bar{\mathcal{Q}}_{(\pm)l}(\xi_1, x) &= \underline{Q}_{(\pm)l}(\xi_1) \exp(-i \underline{I}_{(\pm)l}(\xi_1) \cdot x), & \Pi_{(\pm)l}(\xi_1) &= \pm \sqrt{(k_l^2 - \xi_1^2)} \quad (\text{Im} \sqrt{(k_l^2 - \xi_1^2)} \geq 0) \\ \underline{Q}_{(\pm)1}(\xi_1) &= (\xi_1/k_2, \Pi_{(\pm)1}/k_2), & k_1 &: P \text{ 波の波数} \\ \underline{Q}_{(\pm)2}(\xi_1) &= (\Pi_{(\pm)2}/k_2, \mp \xi_1/k_2), & k_2 &: SV \text{ 波の波数} \end{aligned}$$

また、二重層核 \underline{T} は次のように表せる。

$$\underline{T}(x, y) = i(4\mu\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{Q}_{(\pm)l}(\xi_1, x) \underline{T}^y \bar{\mathcal{Q}}_{(\pm)l}(\xi_1, y) \Pi_{(\pm)l}^{-1}(\xi_1) d\xi_1 \quad (6)$$

ただし、式(5)、(6)において、符号 \pm は、放射条件を満足するように、条件 $x_2 \geq y_2$ に応じてとるものとする。

5. 波数領域における積分方程式

まず、式(4)を考える。 $x_2 < h_2$ として式(4.3)に、式(5)および(6)で定義された \underline{U} と \underline{T} を代入し、さら

に、フーリエ変換 $\int_{-\infty}^{\infty} \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(\omega)}(S_1, \lambda) d\lambda$ を作用させれば、

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{\partial D_2} \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(\omega)}(S_1, \lambda) \pm_{\pm}^{(\omega)}(\lambda) - \hat{I} \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(\omega)}(S_1, \lambda) \varphi_S^{(\omega)}(\lambda) \right\} dS_1 \\ & + \int_{\partial S} \left\{ \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(\omega)}(S_1, \lambda) \pm_{\pm}^{(\omega)}(\lambda) - \hat{I} \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(\omega)}(S_1, \lambda) \varphi_S^{(\omega)}(\lambda) \right\} dS_1 \\ & - \int_{\partial \Gamma} \left\{ \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(\omega)}(S_1, \lambda) \pm_{\mp}^{(\omega)}(\lambda) - \hat{I} \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(\omega)}(S_1, \lambda) \varphi_F^{(\omega)}(\lambda) \right\} dS_1 = \varrho \end{aligned} \quad (7)$$

さらに、 $\alpha_{\rightarrow l}^{(i)}$ 、 $\alpha_{\leftarrow l}^{(i)}$ を未知数として、散乱波 $\underline{u}_S^{(i)}$ と $\underline{u}_F^{(i)}$ を

$$\underline{u}_S^{(i)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \alpha_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1) \varphi_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1, \lambda) + \alpha_{\leftarrow l}^{(i)}(\lambda_1) \varphi_{\leftarrow l}^{(i)}(\lambda_1, \lambda) \right\} d\lambda_1 \quad (8.1)$$

$$\underline{u}_F^{(i)}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1) \varphi_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1, \lambda) d\lambda_1 \quad (8.2)$$

のように平面波の重ね合せとして表して、これを式(7)に代入して、境界($\partial S + \partial D_2$)における連続条件を考慮して整理すれば、次の波数領域における積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & 2\pi \alpha_{\rightarrow l}^{(i)}(S_1) \hat{I} \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \Big|_{\lambda_2=h_2} + \int I_{\partial S \rightarrow \partial \Gamma}(\varphi_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1, \lambda), \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda)) \alpha_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1) d\lambda_1 \\ & + 2\pi \alpha_{\leftarrow l}^{(i)}(S_1) \hat{I} \bar{\varphi}_{\leftarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \bar{\varphi}_{\leftarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \Big|_{\lambda_2=h_2} + \int I_{\partial S \rightarrow \partial \Gamma}(\varphi_{\leftarrow l}^{(i)}(\lambda_1, \lambda), \bar{\varphi}_{\leftarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda)) \alpha_{\leftarrow l}^{(i)}(\lambda_1) d\lambda_1 \\ & - 2\pi \alpha_{\rightarrow l}^{(i)}(S_1) \varphi_{\rightarrow l}^{(i)}(S_1, \lambda) \hat{I} \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \Big|_{\lambda_2=h_2} - \int I_{\partial S \rightarrow \partial \Gamma}(\bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda), \varphi_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1, \lambda)) \alpha_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1) d\lambda_1 \\ & = \int_{\partial \Gamma \rightarrow \partial S} \left\{ \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \pm_{\mp}^{(i)}(\lambda) - \hat{I} \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \varphi_F^{(i)}(\lambda) \right\} dS_1 \end{aligned} \quad (9)$$

ここで、 I は次式で定義される積分である。

$$I_{\partial S}(\underline{P}(\lambda), \underline{Q}(\lambda)) = \int_{\partial S} \hat{I} \underline{P}(\lambda) \cdot \underline{Q}(\lambda) dS_1$$

また、式(9)の誘導においては、境界($\partial D_2 + \partial \Gamma$)上の積分が解析的に行えることに注意されたい。例えば

$$\int_{\partial D_2 + \partial \Gamma} \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \hat{I} \varphi_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1, \lambda) dS_1 = 2\pi \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \hat{I} \varphi_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1, \lambda) \Big|_{\lambda_2=h_2} \delta(\lambda_1 - S_1) \quad \text{である。}$$

同様な誘導により、式(3)に対応する波数領域での積分方程式は、次式の形で表せる。

$$\begin{aligned} & -2\pi \left[\hat{I} \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \varphi_{\rightarrow l}^{(i)}(S_1, \lambda) \Big|_{\lambda_2=0} + \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \hat{I} \varphi_{\rightarrow l}^{(i)}(S_1, \lambda) \Big|_{\lambda_2=h_2} \right] \alpha_{\rightarrow l}^{(i)}(S_1) \\ & - 2\pi \left[\hat{I} \bar{\varphi}_{\leftarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \varphi_{\leftarrow l}^{(i)}(S_1, \lambda) \Big|_{\lambda_2=0} + \bar{\varphi}_{\leftarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \hat{I} \varphi_{\leftarrow l}^{(i)}(S_1, \lambda) \Big|_{\lambda_2=h_2} \right] \alpha_{\leftarrow l}^{(i)}(S_1) \\ & - \int I_{\partial S \rightarrow \partial \Gamma}(\varphi_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1, \lambda), \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda)) \alpha_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1) d\lambda_1 - \int I_{\partial S \rightarrow \partial \Gamma}(\varphi_{\leftarrow l}^{(i)}(\lambda_1, \lambda), \bar{\varphi}_{\leftarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda)) \alpha_{\leftarrow l}^{(i)}(\lambda_1) d\lambda_1 \\ & + 2\pi \hat{I} \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \varphi_{\rightarrow l}^{(i)}(S_1, \lambda) \Big|_{\lambda_2=h_2} \alpha_{\rightarrow l}^{(i)}(S_1) + \int I_{\partial S \rightarrow \partial \Gamma}(\bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda), \varphi_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1, \lambda)) \alpha_{\rightarrow l}^{(i)}(\lambda_1) d\lambda_1 \\ & = \int_{\partial S \rightarrow \partial \Gamma} \left\{ \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \pm_{\mp}^{(i)}(\lambda) - \hat{I} \bar{\varphi}_{\rightarrow m}^{(i)}(S_1, \lambda) \varphi_F^{(i)}(\lambda) \right\} dS_1. \quad (\text{複号同順}) \end{aligned} \quad (10)$$

式(9)と(10)は、 $\alpha_{\rightarrow l}^{(i)}$ 、 $\alpha_{\leftarrow l}^{(i)}$ 、 $\alpha_{\rightarrow l}^{(i)}$ を未知数とし、 I を積分核とする連立積分方程式であり、これを解いて求められる $\alpha_{\rightarrow l}^{(i)}$ 、 $\alpha_{\leftarrow l}^{(i)}$ 、 $\alpha_{\rightarrow l}^{(i)}$ を、式(8)に代入することによって、散乱波を求めることができる。なお、式(9)と(10)を解くにあたっては、積分を離散化して数値的に解かなければならない。

6. 数値解析例

数値解析例として、Fig.2に示すような \cos 形の不整形境界を有する2層地盤の地震動解析を行った。入射波は、調和平面SV波として鉛直下方から入射するものとする。なお、地盤の材料定数は図中に示した。

Fig.3は、入射波の波数 $ak_T^{(2)}$ が $\pi/2$ の場合(入射波長 $\lambda^I = 4a$) の自由表面上における変位振幅を表したものである。実線は、上層 D_1 の層厚 $h_2 = 0.1a$ の場合の解、破線は、 $h_2 = a$ の場合の解を表す。また、図中の記号○及び●は、境界積分方程式法により得られた解を表す。本解法による解は、境界積分方程式法による解とよく一致しており、本解析法の精度は十分であると考えられる。Fig.4は、入射波の波数 $ak_T^{(2)}$ が π の場合の自由表面上における変位振幅を表す。これらの図より明らかなように、入射波の波数が大きくなるにつれて、自由表面上の変位振幅の変化は大きくなり、複雑な挙動をとるようになる。また、上層の層厚 $h_2 = 0.1a$ の場合は、 $h_2 = a$ の場合に比べて自由表面上の変位振幅が大きくなる傾向がある。これは、層厚が厚い場合は、入射波によってもたらされたエネルギーが、窪んだ不整形部分に蓄えられることなく上層を伝わって両方向に逸散するのに対し、層厚が薄い場合は、入射波によるエネルギーが不整形部分に蓄積され、それが2次の波動源となって大きな振幅をもたらすためであると考えられる。

7. おわりに

本研究では、波数領域の積分方程式を誘導し、これを不整形2層地盤の地震動解析に適用した。ここで示した解法を一般的な多層地盤に拡張することは容易であり、特に、多層成層地盤のごく一部がしゅう曲したような地盤の解析には非常に有効な解法となる。このような場合には、しゅう曲していない残りの境界に関する積分核 I が恒等的に0となり、解くべきマトリックスが対角行列になるからである。今後は、以上のような利点を生かして、本解析法を様々な地盤の地震動解析に適用していく予定である。

参考文献

- 1) Waterman, P.C.: J. Acoust. Soc. Am., 45, 1417-1429, 1969.

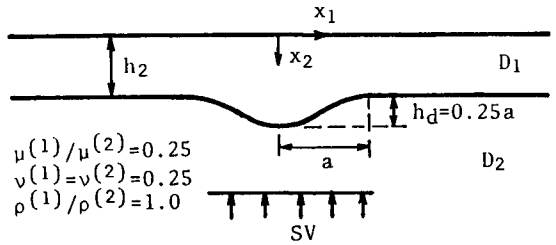


Fig.2 Model of a layered media.

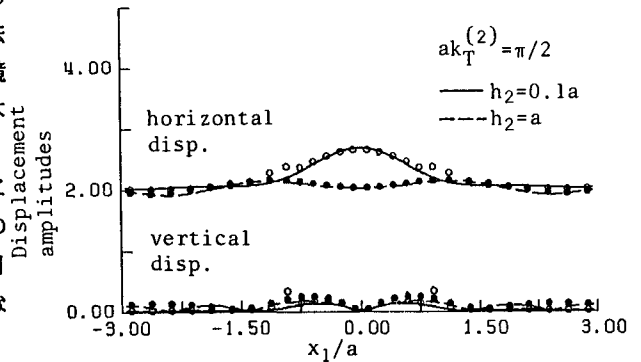


Fig.3 Amplitudes of surface displacements. —, ---: present method, O, ●: BIE.

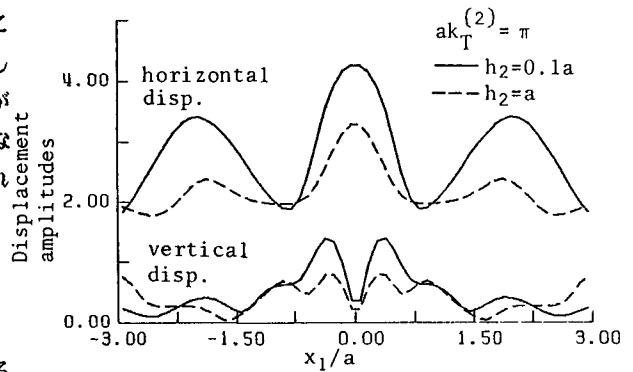


Fig.4 Amplitudes of surface displacements.