

(6) 適応型重回帰分析法に基づく地震動距離減衰式算定法

武蔵工業大学 正会員 ○星谷 勝
武蔵工業大学 学生員 丸山 収

1. はじめに

本研究は従来のバッチ処理に基づく、いわば固定型重回帰分析^{1,2}の代わりに拡張カルマンフィルターを用いれば、シーケンシャル処理による適応型重回帰分析が可能となることを示したものである。この方法によれば、新しくデータが得られたときには、いままでのデータに拘ることなく、順次改善された実験式を求めることができる。また、従来の重回帰分析では、容易に求められない非線形関係の回帰式や、要因の中に定性的な分類項目などで与えられるものが含まれていても解析できるようになっている。

近年、データ・ベースの議論がされ、各事業所で地震記録などのデータ蓄積がなされている。それらを用いた距離減衰式の算定などに対して、拡張カルマンフィルターアルゴリズム³を基本とした適応型の重回帰分析法が有効であることを述べる。

2. 拡張カルマンフィルターへの定式化

従来のバッチ処理に基づく固定型重回帰分析法については、参考文献 (1), (2) に委ねることにして、ここでは、拡張カルマンフィルターを用いたシーケンシャル処理による適応型重回帰分析の定式化を行う。

結果を Y , 要因を X_i ; $i=1, 2, 3, \dots, m$ とすると、ある結果に対するいくつかの説明要因の関係式は、(1) 式ようになる。

$$\hat{Y} = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_m, a_1, a_2, a_3, \dots, a_\ell) \quad (1)$$

また、(2) 式に示す n 組の実験データが与えられているとする。

未知係数 a_i は n 組の実験データ、 $Y_K, X_{1K}, X_{2K}, \dots, X_{mK}$; ($K=1, 2, \dots, n$) を用いて、実験値と推定値の自乗誤差の期待値 $E[(Y_i - \hat{Y}_i)^2]$ を最小にするように決定される。拡張カルマンフィルターアルゴリズムは、シーケンシャルにデータを取り込みながら、実験値 Y_i と推定値 \hat{Y}_i の自乗誤差を最小にする未知係数 a_i の最適推定値を漸化的に求めることのできるアルゴリズムなのである。次に、拡張カルマンフィルターを用いて未知係数 a_i を推定するためには、(1) 式に示した回帰式を、状態方程式および観測方程式へと表現しアルゴリズム中に組み込むことが必要である³。ここで、状態量を $a_1, a_2, a_3, \dots, a_\ell$ とすると状態方程式は (3) 式となる。また、観測方程式は、(1) 式から得ることができ、その表現によってはバッチ処理とシーケンシャル処理の使いわけが可能である。

$$\begin{bmatrix} Y_1 & X_{11}, X_{21}, X_{31}, \dots, X_{m1} \\ Y_2 & X_{12}, X_{22}, X_{32}, \dots, X_{m2} \\ \vdots & \vdots \\ Y_k & X_{1k}, X_{2k}, X_{3k}, \dots, X_{mk} \\ \vdots & \vdots \\ Y_n & X_{1n}, X_{2n}, X_{3n}, \dots, X_{mn} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_\ell \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix} + V \quad (3)$$

状態方程式

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(X_{11}, X_{21}, \dots, X_{m1}, a_1, a_2, \dots, a_\ell) \\ f(X_{12}, X_{22}, \dots, X_{m2}, a_1, a_2, \dots, a_\ell) \\ \vdots \\ f(X_{1n}, X_{2n}, \dots, X_{mn}, a_1, a_2, \dots, a_\ell) \end{bmatrix} + W \quad (4)$$

観測方程式 (batch処理)

$$[Y_k] = [f(X_{1k}, X_{2k}, \dots, X_{mk}, a_1, a_2, \dots, a_\ell)] + W \quad (5)$$

($k=1, 2, \dots, n$)

観測方程式 (Sequential処理)

(4) 式はバッチ処理型、(5) 式はデータを1個ずつ処理する場合の観測方程式である。その際、(1) 式の結果と要因の関係式が、線形関係に変換されることは前提とせず、一般的な非線形関係の式に適用可能であり非常に汎用性があるものと思われる。

3. 数値解析例

表-1. 解析データ

(I) 回帰式が $f(x)$ として与えられる場合

非線形重回帰分析：本研究では、固定型の重回帰分析（固定型）、拡張カルマンフィルターを1回のみ用いる方法（EK法）および著者らが提案している拡張カルマンフィルターアルゴリズムに重み付きグローバルな繰り返しを併用した方法（EK-WGI法）の3つの手法について検討を行なった。

no	X ₁	X ₂	Y	no	X ₁	X ₂	Y
1	0.05	5.0	15.284	11	0.82	5.4	75.140
2	0.48	3.0	21.023	12	0.46	7.1	28.174
3	0.23	2.0	11.158	13	0.02	2.7	10.505
4	0.02	6.0	17.105	14	0.06	4.9	15.149
5	0.59	2.5	28.105	15	0.08	4.3	14.091
6	0.57	5.2	31.688	16	0.24	3.6	14.520
7	0.68	5.7	45.364	17	0.15	2.6	11.317
8	0.33	1.6	12.407	18	0.82	4.8	73.940
9	0.56	2.2	24.844	19	0.32	2.8	14.553
10	0.44	6.8	26.625	20	0.55	6.7	33.043

まず、回帰式が $Y = e^{a_1 X_1} + a_2 X_2 + b$ の様にと与えられた場合には、線形関係の式に変換することができず固定型の重回帰分析は容易にできないとされている^{1,2}。そこで、 $a_1 = 5.0, a_2 = 2.0$ および $b = 4.0$ としてあらかじめ与えて、 X_1, X_2 の値に対する正解値 Y を求め、これをデータとして用いて（表-1）、EK法およびEK-WGI法により解析を行なった。

表-2. 推定結果

	初期値			推定値		
	a ₁	a ₂	b	a ₁	a ₂	b
EK法	1.0	1.0	1.0	5.06	0.82	10.22
EK-WGI法	4.5	1.5	3.5	5.00	2.00	4.04
EK-WGI法	1.0	1.0	1.0	5.00	2.00	4.00

表-2の推定結果から、こうした非線形回帰式の場合に、EK法による推定結果は初期値の影響を強く受ける。与えた初期値が正解値と比較してかけ離れた場合には良い結果は得られなかった。しかし、追加されたデータについて解析する際には、これまでの回帰式の傾向を参考にして解析すれば良いと思われる。一方、EK-WGI法は精度のよい結果を与えた。

表-3. 解析データ（文献2から引用）

(II) 層別因子を含む場合

回帰式は $Y = aX + b$ とした。ただし、 a および b は層別因子の関数で、例えば j 個の水準があるとき

$$a = a_1 X_{j1} + a_2 X_{j2} + \dots + a_j X_{jj} \quad (6)$$

$b = b_1 X_{j1} + b_2 X_{j2} + \dots + b_j X_{jj}$ である。 X_{jj} は、ダミー変数で、表-3のデータで A_1 水準のものであれば、 $[X_1, X_2, X_3, X_4] = [1, 0, 0, 0]$ となる。

no	A ₁		A ₂		A ₃		A ₄	
	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
1	30	8.0	34	9.1	27	15.0	16	23.4
2	28	10.5	19	19.4	20	21.0	16	28.2
3	30	8.2	22	20.5	14	24.2	20	29.5
4	29	13.0	25	14.2	18	15.3	16	22.2
5	28	10.1	22	11.0	12	17.3	6	40.2
6	17	16.2	25	19.1	18	24.7	16	36.6
7	24	16.1	22	16.0	13	23.9	12	35.5
8	22	13.4	23	11.1	21	20.2	11	42.1
9	30	13.0	28	12.0	24	13.6	9	42.5
10	30	7.3	24	17.1			22	25.8
11	25	14.0	30	13.3				
12			24	8.9				

まず、 A_1, A_2, \dots, A_4 の水準ごとの解析結果を表-4に示す。次に層別因子を無視して解析した結果を表-5に示す。層別因子を無視して解析する場合、EK法およびEK-WGI法では、データの処理の順序は、 A_1 水準のNO.1~NO.11、 A_2 水準のNO.1~NO.12、 \dots 、最後に A_4 水準のNO.1~NO.10とした。

表-4. 推定結果

	水準	初期値		推定値		R
		a	b	a	b	
固定法	A ₁			-0.571	27.02	0.762
	A ₂			-0.512	27.03	0.514
	A ₃			-0.481	28.39	0.564
	A ₄			-1.190	49.74	0.754
EK法	A ₁	1.0	10.0	-0.571	27.02	
	A ₂	1.0	10.0	-0.512	27.03	
	A ₃	1.0	10.0	-0.481	28.39	
	A ₄	-0.250	20.0	-0.481	28.39	
EK-WGI法	A ₁	-0.574	27.98	-0.481	28.39	
	A ₂	1.0	10.0	-1.190	49.74	
	A ₃	1.0	10.0	-0.571	27.02	
	A ₄	1.0	10.0	-0.512	27.03	
EK-WGI法	A ₁	1.0	10.0	-0.481	28.39	
	A ₂	-0.250	20.0	-0.481	28.39	
	A ₃	-0.574	27.98	-0.481	28.39	
	A ₄	1.0	10.0	-1.190	49.74	

表-5. 推定結果

	初期値		推定値		R
	a	b	a	b	
固定法			-1.188	44.62	0.831
EK法	1.0	1.0	-1.188	44.62	
EK-WGI法	1.0	1.0	-1.188	44.62	

を与えた場合、および $A_3(3)$: 層別因子を無視して解析した場合の A_2 水準のおわりの推定値、 $a = -0.574$, $b = 27.98$ を初期値として、それぞれ A_3 水準についてのみ解析した場合である。また、 R は重相関係数である。表-4より各水準ごとの解析結果の固定法、EK法およびEK-WGI法の推定値は全く一致している。回帰式が線形関係の式であるので、 $A_3(1)$, $A_3(2)$ および $A_3(3)$ の任意の初期値に対しても初期値の影響は殆んど残らないものと思われる。層別因子を無視した解析でも、固定法、EK法およびEK-WGI法の推定結果は全く一致した。このような線形回帰式の場合は推定するパラメータの追従性は非常に良いものと思われる。

次にEK法による解析のパラメータ \hat{a} の変動を図-1に示す。図-1より各水準ごとの推定値は、それぞれの水準の傾向に従って変動しながら最終的に固定法による結果と等しい推定値へと収束している。層別因子を無視した解析でも最終的に $\hat{a} = -1.188$ となっている。 A_3 水準に注目して、層別因子を無視した場合と $A_3(3)$ の推定結果を比較する。 A_3 水準の初めの時点では両方のパラメータの初期値は同じであるが、 $A_3(3)$ の方は、 A_3 水準のみの解析結果に一致した。これは、初期の誤差の共分散値を $A_3(3)$ の方は $P(t_0/t_0) = 100.0$ ($i=j, 0, 0$) $i=1\sim 3$ と仮定したのに対し、層別因子を無視した場合は、 $A_1\sim A_3$ 水準のデータを処理した後の共分散値となっているためであると思われる。従って、層別因子を無視した解析では、共分散値の中に A_1 および A_2 水準の情報を考慮しながら A_3 水準のデータを処理しており、また $A_3(3)$ の方は、 A_3 水準のみの傾向に従っていると思われる。パラメータ \hat{b} についても同様の結果が得られた。

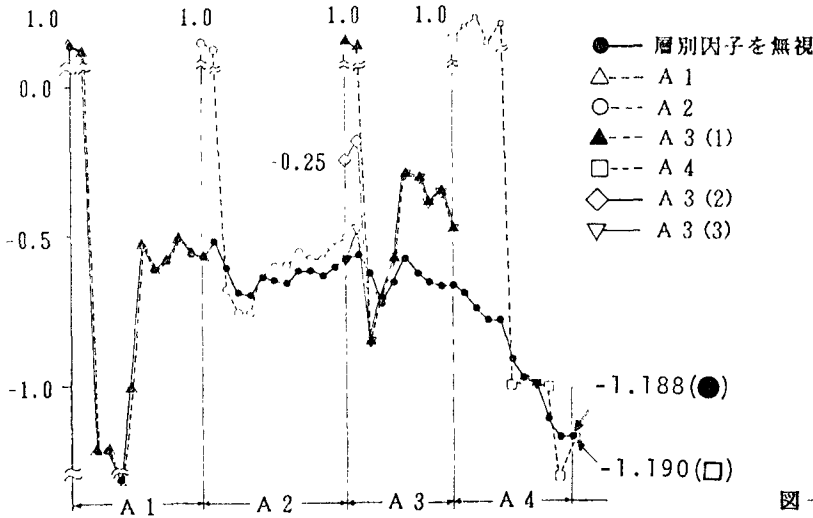


図-1. パラメータ \hat{a} の変動

4. 地震動距離減衰式算定への応用

(i) 解析に用いた強震記録：解析対象としたのは、わが国の地盤上でSMAC-B2型強震計より得られた水平最大加速度 50gal以上、マグニチュード 5.0以上および震源深さ 60km 未満の加速度強震記録であり、2 @ 176 個の水平成分を有する。図-2に解析対象記録の地盤種別ごとの頻度分布を示す。地盤条件は、道路橋示方書耐震設計編に従い1種（道路橋示方書の1種）、2種（同、2+3種）および、3種（同、4種）の3種類に分類した。2 @ 176個のデータのうち地盤種別ごとのデータ数は、1種が68個、2種が71個、

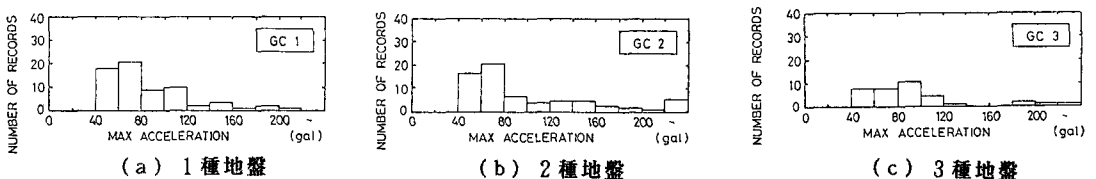


図-2. 最大加速度の頻度分布

3種が37個である。

(ii) 水平方向最大地震動の距離減衰式

最大地震動の距離減衰式に関しては、これまで、多くの算定式が提案されているが、本研究では土研資料1993号を参考にして次式を用いた。

$$X(M, \Delta, GC_i) = a(GC_i) * 10^{\frac{b(GC_i) * M}{c(GC_i)}} * (\Delta + \Delta_0)^{-c(GC_i)} \quad (7)$$

ここで、X：最大地震動 (gal), M：気象庁マグニチュード、 Δ ：震央距離 (km), Δ_0 ： Δ が小さい範囲のXを調整する距離の指標 $\Delta_0=30$ km, GC_i ：地盤種別 (i=1,2,3), $a(GC_i)$, $b(GC_i)$, $c(GC_i)$ ：地盤種別ごとに定められる係数である。

次に、(7)式の両辺の常用対数を取り線形化する。

$$\log X(M, \Delta, GC_i) = \log a(GC_i) + b(GC_i) * M + c(GC_i) * \log(\Delta + \Delta_0) \quad (8)$$

推定結果をバッチ処理に基づく固定法と比較するために、解析に際しては(8)式を用いた。

(iii) 解析結果

表-6は各パラメータの地盤種別ごとの推定結果および固定法により求められた回帰式の重相関係数を示す。さらに図-3、図-4および図-5には、地盤種別ごとの回帰式を示した。表-6より、固定法、EK法およびEK-WGI法による推定結果は全く一致している。ここでは、紙面の都合上省略したが、年代順に強震記録をEK法により解析した結果から、従来のバッチ処理法よりも地震動の特性の傾向を把握しながら予測できるものと思われる。また、(7)式を直接用いたEK法およびEK-WGI法による解析では良い結果が得られなかった。これは、非線形の場合、初期値の影響を受けやすいためと、表-6に示した重相関係数が低い値となっているためであると思われる。このことは、適応型回帰で同定が困難となる限界を知れば、そのときのデータが有する重相関係数値を回帰可能性を判定するベースにすることもできよう。特に、地震動データのようにRが小さい(表-6)とき、経験式の有意性を数理的に判断するときの手段に適応型回帰式は有用かもしれない。

表-6. 推定結果

		log a	a	b	c	R
1種	固定法	1.928	84.723	0.121	-0.405	0.2839
	EK法	1.928	84.723	0.121	-0.405	
	EK-WGI法	1.928	84.723	0.121	-0.405	
2種	固定法	1.681	47.973	0.220	-0.564	0.4822
	EK法	1.681	47.973	0.220	-0.564	
	EK-WGI法	1.681	47.973	0.220	-0.564	
3種	固定法	1.507	32.137	0.194	-0.423	0.3916
	EK法	1.507	32.137	0.194	-0.423	
	EK-WGI法	1.507	32.137	0.194	-0.423	

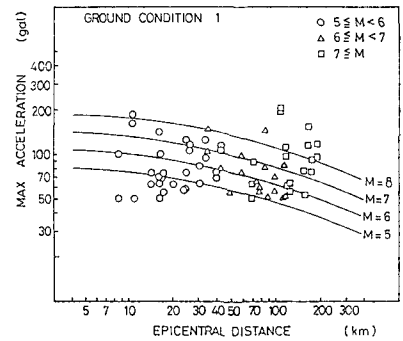


図-3. 1種地盤に対する回帰式

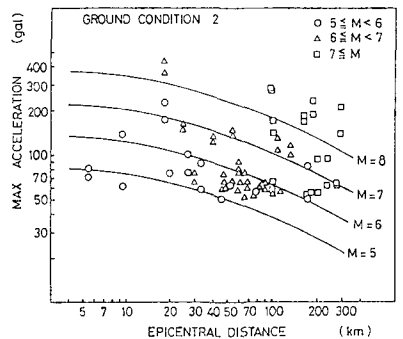


図-4. 2種地盤に対する回帰式

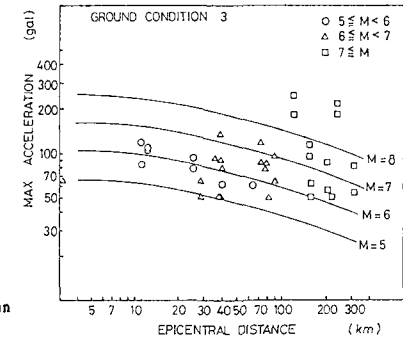


図-5. 3種地盤に対する回帰式

参考文献：1 河口：多変量解析入門，森北出版 2 奥野他：多変量解析法，日科技連

3. A. H. Jazwinski: Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, 1970

4. M. Hoshiya and E. Saito: Structural Identification by Extended Kalman Filter, Jour. of Eng. Mech., ASCE, Vol. 110, No. 12, Dec., 1984

5. 土木研究所彙報, No. 1-8, Vol. 32-38, 41

6. 土田, 倉田他：港湾地域強震観測年報