(41) 少数種類の構造物からなるライフラインシステムの耐震性の評価方法に関する一考察

埼玉大学工学部　正会員　川上 英二

1. 序論　地震時におけるライフラインシステムの機能の安全性を向上させるため、従来、2つの方法―各構造物の構造上の強度を増加するという方法と、システムの形状を合理的に定めて機能の安全性を増加するという方法―がとられている。それに伴い多くの研究がおこなわれ、特に後者の方法に関する研究が近年、Shinozuka・Takada・Kawakami[1]，田村・川上[2]，伯野・斉藤[3]，Isoyama・Katayama[4] 等により行なわれており、ライフラインシステムの信頼性を評価するための多くの方法が提案されている。しかし、以上提案されている方法はどれも、システムの形状を一定とし、地震荷重を確定量または特定の分布をする確率量であると仮定した場合のシステムの信頼性を扱っており、色々な大きさの地震荷重が作用した場合のシステムの信頼性の変化を算定するためには、または、複数のシステムの信頼性を比較するためには、多くの地震荷重と複数個のシステムとのそれぞれの組合せに対し、システムの信頼性を算定し、その値の変化を調べる必要があり、膨大な計算量が必要となる。以上の結果を簡単に見通し良く求める方法が望まれていると考える。また、従来、静定構造物，不静定構造物等に対して信頼性解析の方法が研究されているが、ライフラインシステムに対しても新しい信頼性解析の方法が必要であると考える。

本論文では、ライフラインシステムの多くは、少数個の種類の構造物が多数個集まり、システムを構成し機能している事に注目して、システムの信頼性を、荷重外力と構造物の強度とから求まる各種類の構造物の信頼性を用いて算定される関数と、システムの形状をネットワーク状にする事に影響されるシステムに固有な関数との2つの関数で表わす方法を展開した。更に、システムの機能の安全性指標を提案した。[5]

2. システムの信頼性の評価方法

(1) 1種類の構造物からシステムが構成されている場合　ライフラインシステムは多くの場合、少数種類の構造物が多数個集まって1つの機能を果している。上下水道の場合、多数個の管路の集合からシステムが主に構成され、鉄道・道路も類似断面をもつ構造物の単位の集合と考えられる。

1種類のm個の構造物からシステムが構成されている場合、x個の構造物が安全である事象A_x ($x=0,1,\cdots,m$)が互いに排反事象である事を用いると、システムが安全である事象S_sが生じる確率$_sP$は次の様に表わされる。

$$_sP = \mathrm{prob}(S_s) = \sum_{x=0}^{m} \mathrm{prob}(A_x, S_s) = \sum_{x=0}^{m} \mathrm{prob}(A_x)\cdot\mathrm{prob}(S_s \mid A_x) \qquad ---- \quad (1)$$

ただし、prob(・)は括弧内の事象が生じる確率を表わし、prob(・,・)は同時確率，prob(・|・)は条件付確率を表わす。また、本論文では、各構造物およびシステムの状態は安全または破壊の2つの状態の何れかで表わされるものと仮定する。

式(1)においてprob(A_x)はm個の構造物のうちx個の構造物が安全である確率であり、各構造物に働く外力と構造物の強度とによって決定され、システムの形状にはよらない値である。一方、prob($S_s|A_x$)は、m個の構造物のうちx個の構造物が安全である場合にシステムが安全である確率であり、外力または構造物の強度の大きさのどちらにも関係無く、システムの形状および、システムが安全であるために各構造物が満すべき条件によって決定される値である。この2つの確率をそれぞれxの関数 $A_x(x)=\mathrm{prob}(A_x)$，$S_x(x)=\mathrm{prob}(S_s|A_x)$と考えると、式(1)は

$$_sP = \sum_{x=0}^{m} A_x(x)\cdot S_x(x) \qquad -------- \quad (2)$$

と表わされる。今後、この2つの関数をそれぞれ「構造物の強度の関数」および「システムの形状の関数」と呼ぶ。

(2) 複数種類の構造物からシステムが構成されている場合　システムが複数種類の構造物から構成されている場合、システムの信頼性は式(1)と同様にして次式で表わされる。

$$_sP = \mathrm{prob}(S_s) = \sum_{x_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{x_n=0}^{m_n} \mathrm{prob}({}_1A_{x_1},\cdots,{}_nA_{x_n}, S_s) = \sum_{x_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{x_n=0}^{m_n} \mathrm{prob}({}_1A_{x_1},\cdots,{}_nA_{x_n})\cdot\mathrm{prob}(S_s \mid {}_1A_{x_1},\cdots,{}_nA_{x_n}) \ --- (3)$$

ただし、システムはn種類のそれぞれ$m_1,\cdots,m_n$個の構造物から構成されるとし、${}_iA_{x_i}$は第i種（$i=1,\cdots,n$）の構造物がx_i個安全である事象を表わしている。(1)と同様、確率関数$A_{x_1\cdots x_n}(x_1,\cdots,x_n)=\mathrm{prob}({}_1A_{x_1},\cdots,{}_nA_{x_n})$,
$S_{x_1\cdots x_n}(x_1,\cdots,x_n)=\mathrm{prob}(S_s|{}_1A_{x_1},\cdots,{}_nA_{x_n})$を用いて、システムが安全である確率は

$$ {}_sP=\sum_{x_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{x_n=0}^{m_n}A_{x_1\cdots x_n}(x_1,\cdots,x_n)\,S_{x_1\cdots x_n}(x_1,\cdots,x_n) \qquad ------ \quad (4)$$

と表わされる。ここでも、前と同様、システムの信頼性は構造物の強度の関数$A_{x_1\cdots x_n}(x_1,\cdots,x_n)$とシステムの形状の関数$S_{x_1\cdots x_n}(x_1,\cdots,x_n)$とに分離されている。以下3.では前者の構造物の強度の関数を、4.では後者のシステムの形状の関数を扱い、その結果を用いて5.でシステムの信頼性を再び扱う事にする。

3. 構造物の強度の関数

1種類の構造物からシステムが構成されている場合、構造物の強度の関数$A_X(x)$は、m個の構造物のうちx個が安全である事象が生じる確率である。ここで、構造物の信頼性を$g=\mathrm{prob}$(構造物の強度$R\geqq$荷重外力S)と定義し、構造物によらず一定であると仮定する。また、R, Sはすべて互いに独立であり、従って、各構造物の破壊が独立事象であると仮定する。この場合、二項分布の公式より、

$$A_X(x)=\binom{m}{x}g^x(1-g)^{m-x} \qquad ------- \quad (5)$$

と求められる。更に、二項分布は構造物の総数mが大きな値では平均値mg, 分散$mg(1-g)$の正規分布に近似される。

複数種類の構造物からシステムが構成されている場合、構造物の強度の関数は、同様にして

$$A_{x_1\cdots x_n}(x_1,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\binom{m_i}{x_i}g_i^{x_i}(1-g_i)^{m_i-x_i} \qquad ------- \quad (6)$$

となる。この関数は更に多次元正規分布で近似できる。

4. システムの形状の関数

(1) システムの形状の関数の算定方法(1) ── すべての順列組合せを考える方法 ──

システムの形状の関数$S_X(x)$または$S_{x_1\cdots x_n}(x_1,\cdots,x_n)$の厳密解は以下の手順に従い算定する事ができる。ただし、$S_X(x)$は$S_{x_1\cdots x_n}(x_1,\cdots,x_n)$で$n$が1の場合であるので、後者の場合について理論を進める。

① 第i種のm_i個の構造物に1からm_iの番号を割り当てる。この操作を$i=1,\cdots,n$の全種類の構造物についておこなう。

② $1\sim m_i$を並びかえて$m_i!$個の順列を作り、これらの順列の全種類についての組合せを求めると$\prod_{i=1}^{n}m_i!$個の順列組合せが得られる。

③ それぞれの順列組合せに対し、各順列を破壊しにくい構造物の順序に並んだ列、つまり(構造物の強度R)−(荷重外力S)の値が大きな順序に並んだ列であると考え、最初からx_i個の構造物は安全であり、それ以降の構造物は破壊するものと考える。$0\leqq x_i\leqq m_i$ ($i=1,\cdots,n$)の範囲のすべての整数のn種類の構造物についての全組合せを表わすベクトル$(x_1,\cdots,x_n)$に対して、システムが安全であるか否かをシステムの破壊の基準に従い判定する。

④ 構造物の種類により破壊確率が異なっていても、同一種類の構造物の間では信頼性の大小を確定できない場合には、②の$\prod_{i=1}^{n}m_i!$個の順列組合せそれぞれの発生確率は等しく$1/\prod_{i=1}^{n}m_i!$である。③の手順をすべての順列組合せに対して適用し、システムが安全となる順列組合せの数を$(x_1,\cdots,x_n)$ ($0\leqq x_i\leqq m_i$, $i=1,\cdots,n$)の関数として数え上げ、その数を$s(x_1,\cdots,x_n)$とおくとシステムの形状の関数の厳密解は、

$$S_{x_1\cdots x_n}(x_1,\cdots,x_n)=s(x_1,\cdots,x_n)\Big/\prod_{i=1}^{n}m_i! \qquad ------- \quad (7)$$

で算定される。

(2) システムの形状の関数の算定方法(2) ── モンテカルロ法による方法 ──

(1)で扱った様にすべての順列組合せを考える方法では、構造物の個数の増大に伴ない、順列組合せの総数($\prod_{i=1}^{n}m_i!$)は急速に増大するため、実際の複雑なシステムに対して(1)の方法は実用的でない。そこで、すべての順列を扱う代りに順列をランダムに生成し、システムの形状の近似関数をモンテカルロ法により算定する方法が考えられる。順列をランダムに生成するには、先ず$1\sim m_i$の自然数のそれぞれに対してランダムな数を発生させ割り当て、これらのランダム数を大きさの順に並び変え、同時に対応する$1\sim m_i$の自然数も並び変え、得られた自然数の列をランダムに取り出された順列と考える。上記以外の点では(1)の算定方法と全く同様である。

(3) システムの形状の関数の算定方法(3) — Tie-set または Cut-set を用いる方法 —

供給節点と需要節点とが連結の場合にシステムが安全であるとシステムの安全性について特に基準を設けた場合には、Tie-Set または Cut-set を用いてシステムの形状の関数を算定する事が可能である。各種類の構造物がそれぞれ x_i 個 $(i=1,\cdots,n)$ 安全である場合にシステムが安全である確率は、各種類の構造物に対する順列の最初の x_i 個の構造物の n 種類の構造物にわたっての組合せによって生じる構造物の集合 $S_{x_1\cdots x_n}$ に、少なくとも1つの Tie-Set が含まれる順列組合せの数の順列組合せの総数 $(\prod_{i=1}^{n} m_i!)$ に対する割合に等しい。つまり、

$$S_{x_1\cdots x_n}(x_1,\cdots,x_n)=\mathrm{prob}(S_S|{}_1A_{x_1},\cdots,{}_nA_{x_n})=\mathrm{prob}(\text{any Tie-set}\subset S_{x_1\cdots x_n})=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} m_i!}\,s(\text{any Tie-set}\subset S_{x_1\cdots x_n})$$
$$=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} m_i!}\sum_{h=1}^{NT}(-1)^{h-1}\sum_{j=1}^{NC_h} s\Big(\bigcup_{k\in I_j^h} T.S_k\subset S_{x_1\cdots x_n}\Big)=\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} m_i!}\sum_{h=1}^{NT}(-1)^{h-1}\sum_{j=1}^{NC_h}\prod_{i=1}^{n}\binom{x_i}{{}_iS_j^h}({}_iS_j^h)!\,(m_i-{}_iS_j^h)! \quad ---(8)$$

ただし、$s(\cdot)$ は括弧内の条件を満足する順列組合せの総数, $T.S_k$ は k 番目の Tie-set を構成する構造物の集合、NT は Tie-set の総数、$NC_h=\binom{NT}{h}$, I_j^h は NT個の Tie-set から h 個の Tie-set を取り出す組合せのうち j 番目の組合せを構成する要素である Tie-set の番号の集合、および、${}_iS_j^h=|\bigcup_{k\in I_j^h} T.S_k|_i$ は I_j^h の要素である番号の Tie-set の和集合を構成する構造物のうち、第 i 種類の構造物の総数を表わす。また、式(8)では大きさ m_i の列の最初の x_i 個の内に所定の ${}_iS_j^h$ 個を含む順列の数が $\binom{x_i}{{}_iS_j^h}({}_iS_j^h)!(m_i-{}_iS_j^h)!$ で求められる事を用いている。Cut-set を用いても Tie-set の場合と同様にして算定可能である。

(4) システムの形状の確率密度関数 $f(y)$, $f(y_1,\cdots,y_n)$ の導入

システムの形状の関数は、前述の $S_X(x)$ または $S_{x_1\cdots x_n}(x_1,\cdots,x_n)$ で表わされるが、ここで、構造物が1つも破壊しない場合におけるシステムの信頼性は 1 である事を用いると、

$$S_X(m)=\mathrm{prob}(S_S|A_m)=1 \quad ----(9) \qquad S_{x_1\cdots x_n}(m_1,\cdots,m_n)=\mathrm{prob}(S_S|{}_1A_{m_1},\cdots,{}_nA_{m_n})=1 \quad ----(10)$$

が成立する。また、ここではどんな安全なシステムに対しても、その場合に安全な構造物の集合を含む集合の構造物が安全であるシステムは安全である様な場合を考える。この場合、システムの形状の関数 $S_X(x)$, $S_{x_1\cdots x_n}(x_1,\cdots,x_n)$ は x, または $x_1,\cdots,x_n$ に関して単調増加関数である。

ここで1種類の構造物から構成されるシステムに対し次の関数を定義する。

$$f(y)=S_X(y)-S_X(y-1) \qquad ------ \quad (11)$$

ただし、$S_X(y)=0\ (y\leq -1)$ とする。式(9)(11)より次式が成立する。

$$\sum_{y=0}^{m} f(y)=1 \quad ------(12) \qquad S_X(x)=\sum_{y=0}^{x} f(y) \quad -------(13)$$

$f(y)$ は安全な構造物の総数が $(y-1)$ 個から更に1個増す事によるシステムの信頼性の増加分であり、上述した様にシステムの形状の関数が単調増加関数である場合には、$f(y)$ は非負である。そこで $f(y)$ をシステムの形状の確率密度関数と呼ぶ事にする。この関数の性質を表わす値として、平均値 $\bar{y}$, および分散 σ_y^2 を考える。

$$\bar{y}=\sum_{y=0}^{m} y f(y) \quad ---- \quad (14) \qquad \sigma_y^2=\sum_{y=0}^{m}(y-\bar{y})^2 f(y) \quad ----(15)$$

ここで、$\bar{y}$ が構造物の総数 m に比較して小さい程、冗長なシステムを表わしており、σ_y^2 は冗長度の分布の大きさを示しているものと考えられる。

(5) システムの形状の確率密度関数の性質

本関数の性質を、簡単なシステムのモデルについて調べた。

a) m 個の構造物からシステムが構成され、その内特定の ${}_1S_1'$ 個の構造物が安全である場合にシステムが安全である場合（需給節点が連結である場合にシステムが安全であると基準を設けた場合に、両節点の間には ${}_1S_1'$ 個の構造物から構成されている Tie-set が1つしか無いトリー状のシステムの場合）、式(8)(11)を用いるとシステムの形状の確率密度関数は

$$f(y)=\frac{{}_1S_1'(m-{}_1S_1')!\,(y-1)!}{m!\,(y-{}_1S_1')!} \qquad -------- \quad (16)$$

で表わされ、${}_1S_1'\leq y\leq m$ の範囲で正の値となり単調増加関数である。Fig.1 に $m=17$, ${}_1S_1'=5,10,15$ の場合について $f(y)$ を計算した結果を示してある。この図より、${}_1S_1'$ の値が大きい程、分布は右に寄っている事がわかる。

b) m 個の構造物からシステムが構成され、その内特定の ${}_1S_1'$ 個または ${}_1S_2'$ 個の構造物が安全である場合にシステ

ムが安全である場合（需給節点間にはそれぞれが${}_1S_1^1$個と${}_1S_2^1$個の構造物から構成されている２つのTie-setが存在する場合）、システムの形状の確率密度関数は、

$$f(y)=\frac{(y-1)!}{m!}\left[\frac{{}_1S_1^1(m-{}_1S_1^1)!}{(y-{}_1S_1^1)!}+\frac{{}_1S_2^1(m-{}_1S_2^1)!}{(y-{}_1S_2^1)!}-\frac{{}_1S_1^2(m-{}_1S_1^2)!}{(y-{}_1S_1^2)!}\right] \quad \text{--(17)}$$

と表わされる。ただし、２つのTie-setが同一構造物を含まず独立である場合には、次式${}_1S_1^2 \leqq {}_1S_1^1+{}_1S_2^1$で等号が成立し、同一構造物を１つ以上含むため従属である場合には不等号が成立する。Fig.2に$m=17$で$({}_1S_1^1, {}_1S_2^1, {}_1S_1^2)$の値がそれぞれ(5,5,10)，(5,10,15)，(5,5,8)，(5,10,13)である場合の関数$f(y)$を示してある。この図よりTie-setが２つの場合には１つの場合と異なり、極大値を有する関数になり得る事、特に２つのTie-setが独立な場合には$y=m$で零となる事、また、Tie-setを構成する構造物の数が多い程、分布は右に寄っている事がわかる。

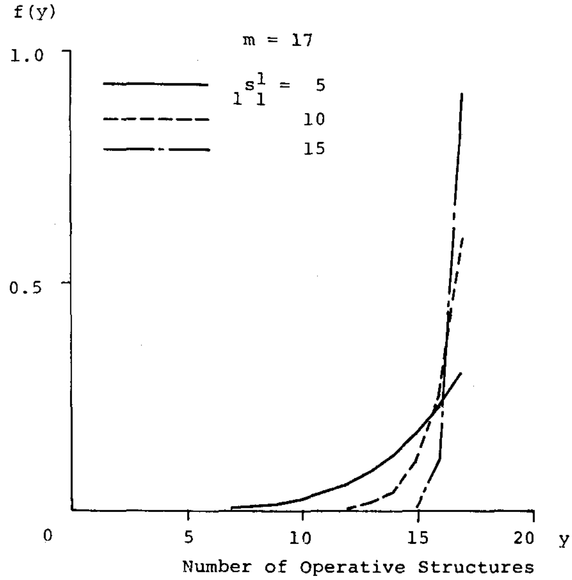

Fig.1　システムの形状の確率密度関数
（Tie-setが１つの場合）

5. システムの信頼性の算定

１種類の構造物からシステムが構成されている場合、システムの信頼性${}_sP$は、式(2)(13)より構造物の強度の関数$A_x(x)$とシステムの形状の確率密度関数$f(y)$とを用いて次の様に表わされる。更に、この値はxがy以上である確率を示している事により

$${}_sP=\sum_{x=0}^{m}A_x(x)\sum_{y=0}^{x}f(y)=\mathrm{prob}(x-y\geq 0) \quad \text{--(18)}$$

ここで、xおよびyの平均値$\bar{x}$，$\bar{y}$を用いてシステムの中央安全率αをこの比で定義するとこの値は、各構造物の信頼性gを用いて次の様に表わされる。

$$\alpha=\frac{\bar{x}}{\bar{y}}=\frac{g}{\bar{y}/m} \quad (m\text{:構造物の総数}) \quad \text{--(19)}$$

構造物の強度の関数$A_x(x)$およびシステムの形状の確率密度関数$f(y)$が共に正規分布で近似できる場合には、システムの信頼性${}_sP$は簡単に求める事ができる。つまり、安全性指標α^*を式(20)で定義すると式(21)が成立する。

$$\alpha^*=\frac{\bar{x}-\bar{y}}{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}} \quad \text{---(20)} \qquad {}_sP=1-\Phi(-\alpha^*) \quad \text{---(21)}$$

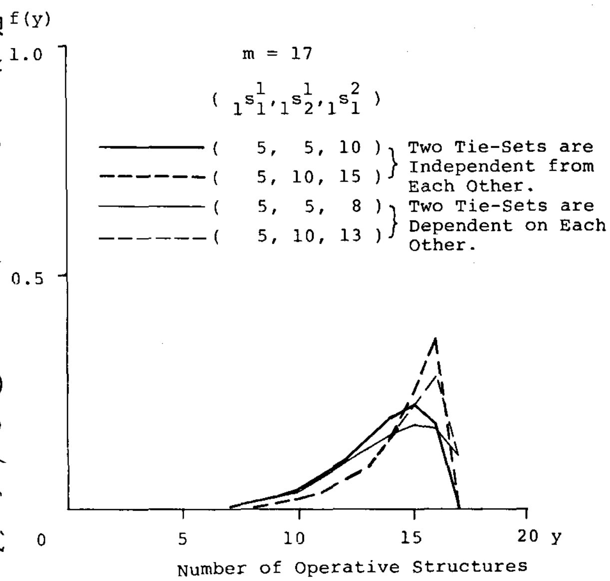

Fig.2　システムの形状の確率密度関数
（Tie-setが２つ存在する場合）

ただし$\Phi(\cdot)$は正規ガウス密度関数であり、安全性指標α^*が大きい程、システムは安全である事がわかる。

参考文献
1) Shinozuka, Takada, Kawakami: Risk analysis of underground lifeline network systems, US-South East Asia Symposium, Manilla, 1977.
2) 田村・川上：モンテカルロ法による地中埋設管システムの耐震性の評価方法，土木学会論文集311号，1981.
3) 伯野・斉藤：ライフ・ラインの耐震性に影響する因子，第15回地震工学研究発表会，1979.
4) Isoyama, Katayama,: Practical Performance Evaluation of Water Supply Networks During Seismic Disaster, TCLEE, 1981.
5) 川上：少数種類の構造物からなるライフラインシステムの耐震性の評価，土木学会論文集，312号，1981.