

(32) 周期波群の到着時間とフーリエ位相差分の関係に注目した地震動の非定常性の解析

徳島大学 正会員 澤田 勉
 京都大学 正会員 後藤尚男

1. まえがき 最近、強震記録のフーリエ解析より得られるフーリエ位相に着目し、地震動の振幅、および周波数の非定常性を明らかにしようとする研究がなされている。大崎ら¹⁾は、地震動のフーリエ位相 ϕ_k の差分(位相差分) $\Delta\phi_k = \phi_{k+1} - \phi_k$ を定義し、 $\Delta\phi_k$ の確率分布が地震波の振幅特性とよく対応することを示した。和泉ら²⁾は、地震波のフーリエ位相 ϕ を周波数 ω の単調増加関数と仮定して、位相の傾き $t_{gr} = d\phi/d\omega$ を求め、その分布形と地震波の時間領域での振幅特性との関係について述べている。

本研究の目的は、上述の位相差分(または位相の傾き)のもつ具体的な意味を明らかにし、それを利用して、地震動の非定常性を解析することにある。そのため、まず、周波数領域の微小な帯域にフーリエスペクトルをもつ周期波群を考え、この周期波群の到着時間と位相差分の関係を導いた。つぎに、実地震記録について、この位相差分の分布形を求め、若干の考察を加えた。さらに、上述の周期波群を用いた非定常解析法について述べ、強震記録に現われる非定常性の解析を行った。

2. 周期波群の到着時間と位相差分の関係 地震波 $x(t)$ とそのフーリエ変換 $F(f)$ の関係は次式で与えられる。 $x(t)$ が時間刻み Δt のN個の離散時間点で与えられている場合には、継続時間は $T = N\Delta t$ となり、式(1)は次に示す有限フーリエ級数展開で表わされる。³⁾

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(f) e^{i(2\pi ft)} df \quad (1)$$

$$x(t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} T C_k e^{i(2\pi f_k t)} \Delta f \quad (2)$$

ここで、 C_k は周波数 f_k に対する複素フーリエ係数であり、 $\Delta f = 1/T$ である。また、フーリエ位相 ϕ_k は次式から求められる。

$$\phi_k = \tan^{-1} \{ \text{Im}(C_k) / \text{Re}(C_k) \} \quad (3)$$

ここで、 $\text{Im}(\cdot)$ 、 $\text{Re}(\cdot)$ は、それぞれ複素数の虚部、および実部を表わす。位相差分 $\Delta\phi_k$ は、式(3)の ϕ_k を用いて、次のように求まる。

$$\Delta\phi_k = \phi_{k+1} - \phi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (4)$$

つぎに、次式のフーリエスペクトルをもつ周期波群⁴⁾を考える。

$$F_k(f) = \begin{cases} a_k \exp[-i2\pi(f-f_k)t_k + i\psi_k], & f_k - \Delta f' \leq f \leq f_k + \Delta f' \\ a_k \exp[-i2\pi(f+f_k)t_k - i\psi_k], & -f_k - \Delta f' \leq f \leq -f_k + \Delta f' \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 a_k は $F_k(f)$ の絶対値、 f_k は中心振動数、 ψ_k は $0 \sim 2\pi$ の範囲で一様なランダム変数とする。また、 $2\Delta f'$ はフーリエスペクトル $F_k(f)$ の帯域幅、 t_k は後述するようにこの周期波群の到着時間を表わす。

上式の $F_k(f)$ をフーリエ逆変換すると、時間領域での波形 $x_k(t)$ が次のように得られる。

$$x_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F_k(f) e^{i(2\pi ft)} df$$

$$= Q_k(t) \cos(2\pi f_k t + \psi_k) \quad (6)$$

$$Q_k(t) = \frac{2a_k}{\pi} \frac{\sin 2\pi \Delta f' (t - t_k)}{t - t_k} \quad (7)$$

図-1に、 $F_k(f)$ 、 $x_k(t)$ 、および $Q_k(t)$ の概略図を示した。式(7)の $Q_k(t)$ は、 $x_k(t)$ の包絡線を表わす関数であり、 $t = t_k$ で最大値 $4a_k \Delta f'$ をとり、 $|t - t_k|$ の増加とともに減少する関数である。したがって、 t_k は周期波群 $x_k(t)$ の到着時間とみなすことができる。また、式(5)のフーリエスペクトル $F_k(f)$ の帯域幅を表

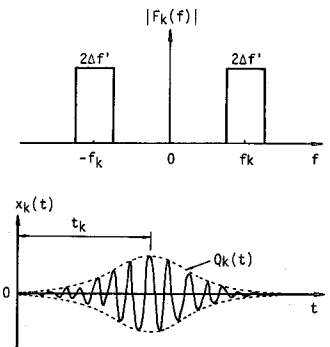


図-1 周期波群のフーリエスペクトルと波形 (Trifunc⁴⁾より)

ゆず $\Delta f'$ は $Q_k(t)$ の特性を決めるパラメータであり、 $\Delta f'$ が大きい場合には、 $Q_k(t)$ は $t = t_k$ で大きい値をとり、 $|t - t_k|$ の増大とともに急速に減少する。すなわち、 $\Delta f'$ は、この周期波群の時間領域での集中度を表わすパラメータである。つぎに、式(2)の有限フーリエ級数展開の各項を、式(5)の周期波群のフーリエスペクトルを用いて近似的に表わすことを考える。いま、式(2)の右辺の k 番目の項をとり出し、フーリエスペクトルで表わすと次のようになる。

$$T|C_k| = T|C_k| \exp(i\phi_k) \quad (8)$$

正の周波数領域のみを考え、式(5)の第1式と式(8)を対比させた場合、両式における振幅、および位相は対応するものとみなせる。式(5)における指数項はフーリエ位相を表わし、周波数 f_k の線形関数になっている。そこで、式(8)の位相 ϕ_k についても周波数の線形関数であると仮定する。すなわち、周波数 f_k におけるフーリエ位相 ϕ_k は、 f_{k+1} において ϕ_{k+1} になり、その間では線形的に変化すると仮定する。このようにして、式(5)と式(8)の指数項を対応させると、次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} -2\pi(f_k - f_k) t_k + \psi_k &= \phi_k \\ -2\pi(f_{k+1} - f_k) t_k + \psi_k &= \phi_{k+1} \end{aligned} \right\} \quad (9) \quad \begin{array}{l} \text{両式を連立して解き } t_k \text{ を求める} \\ \text{と次の関係式が得られる。} \end{array}$$

$$t_k = -\frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{2\pi(f_{k+1} - f_k)} = -\frac{\Delta\phi_k}{\Delta\omega} \quad (10)$$

上式は、フーリエ位相 ϕ_k の角周波数に対する増加率に負の符号を付けた値が、周期波群の到着時間に対応することを示している。つぎに、式(5)と式(8)のフーリエ振幅の対応を考える。式(5)の a_k は $2\Delta f'$ に分布し、式(8)の $T|C_k|$ は $\Delta f'$ に分布するとみなせるので、両者のパワーを等置することにより a_k が次のように得られる。

$$a_k = T|C_k| (\Delta f' / 2\Delta f')^{1/2} \quad (11)$$

以上のように、式(8)のフーリエスペクトルを式(5)の形で近似的に表わすことにより、地震波 $\chi(t)$ は

$$\chi(t) \simeq \sum_{k=0}^{N/2} a_k \cos(2\pi f_k t + \psi_k) = \sum_{k=0}^{N/2} Q_k(t) \cos(2\pi f_k t + \psi_k) \quad (12)$$

で近似できる。上式を用いて、 $\chi(t)$ の自乗平均値を求めると次のようになる。

$$E[\chi^2(t)] \simeq \sum_{k=0}^{N/2} Q_k^2(t) E[\cos^2(2\pi f_k t + \psi_k)] = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N/2} Q_k^2(t) \quad (13)$$

また、式(11)を考慮して、 $Q_k^2(t)$ の時間領域での積分を行うと次式が得られる。

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q_k^2(t) dt = \left(\frac{2a_k}{\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 2\pi \Delta f' (t - t_k)}{(t - t_k)^2} dt = 4T|C_k|^2 \quad (14)$$

上式より、 $Q_k^2(t)$ の時間領域での積分値は、片側パワースペクトル値 $2T|C_k|^2$ の2倍になることがわかる。また、式(13)、(14)より、 $Q_k^2(t)/2$ が f_k なる周波数成分波のパワーを時間領域に展開したものになることもわかる。

3. 強震記録の位相差分布とその特性

前節で述べたように、位相差分は各周波数成分波の到着時間と関係する。したがって、地震波の位相差分の分布(位相差分分布)を求めることにより、時間領域での波形の振幅特性もある程度捉えることができる。すなわち、位相差分分布の平均値付近では多くの成分波の到着があるため、それに対応する時刻では地震波の振幅は大きくなる。ところで、式(3)よりフーリエ位相を求めると、その値は、一般に $0 \sim 2\pi$ の範囲にあり、したがって、位相差分 $\Delta\phi_k = \phi_{k+1} - \phi_k$ は $-2\pi \sim 2\pi$ の値をとる。しかしながら、式(10)より得られる周期波群の到着時間 t_k が正の値をとると考えれば、 $\Delta\phi_k$ の範囲は $-2\pi \sim 0$ となる。これは、位相 ϕ_k を単調減少と仮定することを意味する。以下では、 $\Delta\phi_k$ が正の値をとる場合には、 -2π を加えすべての $\Delta\phi_k$ が負になるようにした。図-2、および図-3には、1968年十勝沖地震の際に青森で得られた記録の $N-S$ 成分、および1968年日向灘地震の際に細島で得られた記録の $N-S$ 成分に対する地震波形と位相差分分布を示した。位相差分分布の図において、横軸は位相差分、縦軸はひん度である。なお、式(3)を用いてフーリエ位相を計算する際、高速フーリエ変換を用いたため、強震記録の最後に後続の0を付け、離散時間点の数が2の累乗になるようにしている³⁾。図-2、および図-3に見られるように、位相

差分布と地震波の振幅の非定常性はある程度対応している。すなわち、位相差分布の平均値に対応する時刻の付近では、地震波の振幅が大きく、また、分布のばらつきは波の継続時間に対応しているように見える。しかしながら、図中のCの領域では、地震波の振幅に対応しない分布が存在する。これは、図-3の細島の記録のように初期微動部のない地震動に顕著に現われている。このCの領域の分布は、 $\Delta\phi = 0$ における分布の延長上であり、地震動の初期部の振幅特性に影響を与えているように見える。このことを確かめるため、記録の前に20秒間の0を付け、位相差分布を求めてみた。このようにして得られた位相差分布を図-4、および図-5の波形の下に示す。図-2、3のC部に相当する分布は、これらの図では地震

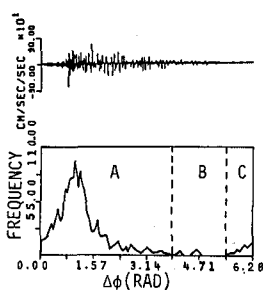


図-2 位相差分布(青森)

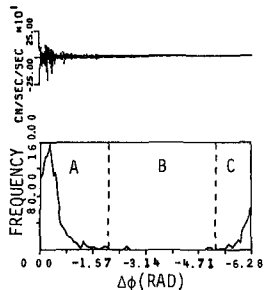


図-3 位相差分布(新潟)

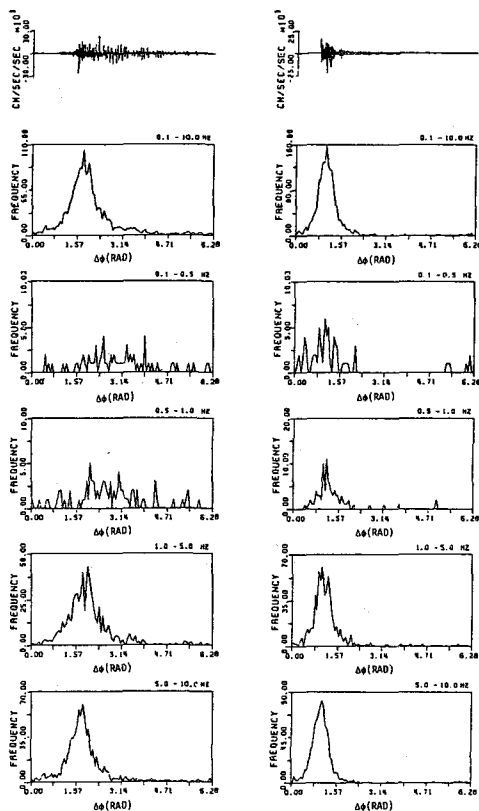


図-4 位相差分布(青森)

図-5 位相差分布(新潟)

波の初期部に移行していることがわかる。このことから、図-2、3のCの領域の分布は、地震波の初期部の振幅に影響を与える波の到着時間に対応することがわかる。図-4、および図-5の下の方図は、周波数領域を分割して、各周波数領域における位相差分布を示したものである。周波数領域は上から順に、0.1~0.5 Hz, 0.5~1.0 Hz, 1.0~5.0 Hz, 5.0~10.0 Hz である。これらの図に見られるように、青森の記録(図-4)では、0.1~1.0 Hzの低周波数領域の位相差分布が地震波の後半部の振幅特性に対応するのに対し、1.0~10.0 Hzの領域の位相差分布は地震波の初期部、および強震部の振幅特性をよく表わしている。新潟の記録(図-5)では、各周波数領域における位相差分布の平均的な傾向は類似しており、周波数の非定常性は殆んど見られぬ。以上のように、周波数領域を分割して位相差分布を求めることにより、地震動の周波数の非定常性を定性的に捉えることができる。

4. 強震記録の非定常性の解析

2. で述べたように、地震波に含まれる各周波数成分波は、近似的に周期波群で置きかえられる。この周期波群の包絡線関数は、式(7)に与えられるように、フーリエ振幅 A_k 、波の到着時間 t_k 、およびフーリエスペクトルの帯域幅を表わす $\Delta f'$ の関数である。 A_k 、 t_k はそれぞれ、式(11)、および式(10)より求められるので、 $\Delta f'$ を適当に与えれば包絡線の形は決定できる。本節では、この包絡線を用いて、各周波数成分波のパワーの時間的変動を表わす。非定常パワースペクトルの定義としては、亀田⁵⁾、吉田⁶⁾と同様、包絡線の自乗を用いた。式(13)、および式(14)の関係より、 $Q_k^2(t)/2$ は、各時刻 t での各周波数成分波のパワーを表わす。したがって、時刻 t を固定して $Q_k^2(t)/2$ 、 $k=1, 2, \dots, \frac{N}{2}-1$ を求め、これを各周波数 f_k に対して描くと、時刻 t におけるスペクトル図が得られる。この図は、一般のスペクトル図と同様、凹凸が激しく標準 rms 誤差を含むと考えられるので適当なウィンドウをかけて平滑化する。

ここでは、Parzenのウィンドーを用いて平滑化した。非定常パワースペクトルを求める具体的な手順は以下の通りである。(i) 地震波をフーリエ解析し、フーリエ振幅とフーリエ位相を求める。(ii) 式(10)より t_k を、式(11)より A_k を求める。(iii) A_k, t_k 、および適当に仮定した $\Delta f'$ を式(17)に代入して $Q_k(t)$ を計算する。(iv) $Q_k^2(t)/2$ を各周波数成分に対して計算した後、 t_k を固定して平滑化する。

この手法においては、帯域幅 $\Delta f'$ をどのようにして決定するかが問題になる。地震波の自乗平均値と $Q_k(t)$ の間には式(13)に示す関係があるから、各時刻においてこの関係が近似的に満足されるよう $\Delta f'$ を決定することも考えられるが、現時点ではそれに対する検討は行っていない。ここでは、便宜上 $\Delta f' = 2\Delta f$ と仮定して、以下の解析を行った。図-6には、このようにして求めた非定常パワースペクトルの一例が2次元平面上に示されている。図において、横軸は周波数、縦軸は時間であり、パワーの大きさは等高線で表示されている。

図において、時刻 t_k を固定して周波数領域でのパワーの変化を見ると、 $t = 20$ 秒付近の強震部では、約0.3 Hz前後、約0.8 Hz前後、約1.2 Hz前後、約1.6 Hz前後にパワーのピークがあるが、約1.2 Hz前後のパワーが相対的に大きい。強震部以後は、低周波成分(0.3~0.6 Hz)のパワーが次第に優勢になることがわかる。図には、 $Q_k^2(t)/2$ が時間領域で最大になる時刻もプロットされている(図中の黒丸)。このような時刻は、各周波数成分の平均的な到着時間を表すものと考えられる。図において、0.2 Hz ~ 0.4 Hzの周波数領域で、到着時間に右上りの傾向が見られる。すなわち、長周期の成分波が短周期の成分波よりも速く到着しており、これは表面波の分散性に起因するものと考えられる。

5. おわりに 地震波のフーリエスペクトルを周期波群のそれと近似することにより、位相差分と到着時間の関係を導いた。また、周期波群の包絡線を用いて、地震波の非定常性の解析を行なった。解析結果より、本手法を用いることにより地震動の非定常性をある程度把握できることがわかった。

本研究は、筆者の一人(澤田)が内地研修で京都大学に滞在中、後藤尚男教授の指導のもとに行なった研究の一部である。研究を進めるにあたり、有益な御助言を賜った京都大学工学部助教授 鹿田弘行先生、ならびに、同助手杉戸真太先生に

深謝致します。なお、本研究で用いた強震記録は京都大学工学部後藤研究室所蔵のものである。記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 大崎他：第5回日本地震工学シンポジウム，PP.201~207，1978。
- 2) Izumi, etc. ; Tok WCEE, Vol. 1, PP. 89~96, 1980。
- 3) 大山崎：地震動のスペクトル解析入門，鹿島出版会，1976。
- 4) Trifunac, Wong ; Univ. Southern Calif. Rep. No. CE 78-07, 1978。
- 5) 鹿田：土木学会論文報告集，第235号，PP. 55~62, 1975。
- 6) 吉田他：土木学会論文報告集，第274号，PP. 1~14, 1978。
- 7) Herrin, Gojorth ; BSSA, Vol. 67, No. 5, PP. 1257~1275, 1977。
- 8) Gojorth, Herrin ; BSSA, Vol. 69, No. 1, PP. 27~44, 1979。

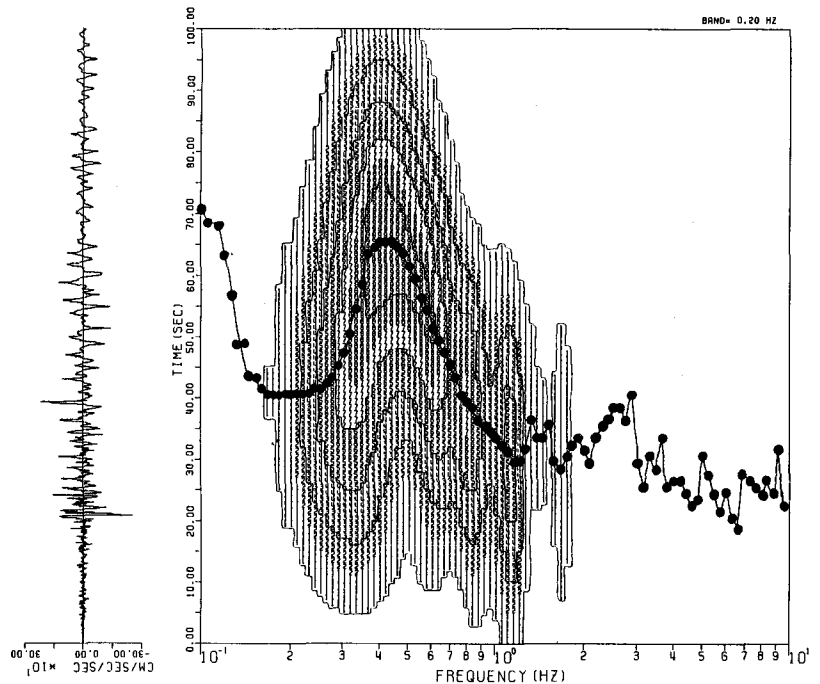


図-6 非定常パワースペクトル(青森, N-S)