

(31) 積分方程式法による地震時動水圧の解析

京都大学 工学部 小林 昭一
 " " " 〇 田村 武
 京都府 浮田 長嗣

1. はじめに

地震時における構造物の応答解析のなかでもっとも興味ある問題のひとつは、複合構造物間の相互作用である。とくに流体と構造物の相互作用は異種の材料特性を反映する典型的な場合である。地震時のダム本体に作用する動水圧の問題はこれに属するが、この問題については Westergaard 以来、多くの研究があり、我国においても畑野、小坪の解が知られている。しかし、ダム本体の変形を考慮に入れると解析解を得ることはかなり難しくなる。むしろ、有限要素法などの手法を用いて数値解を求めることもできるが、本研究では境界積分方程式法により定式化を行う。とくにここでは、ダム本体を片持ち梁モデル化したもっとも簡単な場合について報告する。

2. 流体の運動方程式

流体の密度を ρ_f 、体積弾性定数を K 、速度を V 、圧力を P 、速度ポテンシャルを Φ 、音波の波長を $c = \sqrt{K/\rho_f}$ とすると

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \Phi \quad (1)$$

$$V = \text{grad } \Phi \quad (2)$$

$$P = -\rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (3)$$

が成立する。とくに角速度を ω として定常状態を考慮し、 Φ, V, P を次式で定義する。

$$\Phi = \phi e^{-i\omega t}, \quad V = v e^{-i\omega t}, \quad P = p e^{-i\omega t} \quad (4)$$

すると式(1)~(3)は

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad (1')$$

$$v = \text{grad } \phi \quad (2')$$

$$p = i\omega \rho_f \phi \quad (3')$$

となる。ここに $k = \sqrt{\omega/c}$ である。Green の公式

$$\int_D \{u \nabla^2 v - v \nabla^2 u\} dS = \int_C \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} d\Omega \quad (5)$$

に u としてポテンシャル ϕ を、 v として ϕ' の素解である $H_0^{(1)}(kr)$ を代入すると

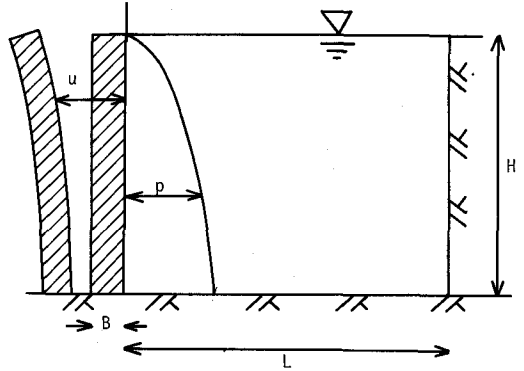


図 - 1

$$\phi(P) = \frac{1}{4i} \int_C \left\{ H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial \phi}{\partial n}(\Omega) - \phi(\Omega) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) \right\} d\Omega \quad (6)$$

を得る。ここに点 P は考慮領域 D 内の点、 Ω はその境界上の点、 r は PQ 間の長さ、 n は C 上での外向き単位法線であり、式(6)の積分は Ω について行う。とくに P も境界 C 上にあるときには

$$\phi(P) = \frac{1}{2i} \int_C \left\{ H_0^{(1)}(kr) \frac{\partial \phi}{\partial n}(\Omega) - \phi(\Omega) \frac{\partial}{\partial n} H_0^{(1)}(kr) \right\} d\Omega \quad (7)$$

となる。ダム本体が剛体であるとすれば、境界 C 上では $\phi(\Omega)$ あるいは $\frac{\partial \phi}{\partial n}(\Omega)$ のいずれか一方が与えられているから、このうち、 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ について積分方程式(7)を解いたあと、それを式(6)に代入すれば内部の点の値も求まることになる。

3. 梁の運動方程式 (図-1 参照)

長さ \$H\$, 曲げ剛性 \$EI\$, 断面積 \$B\$, 密度 \$\rho\$ の梁のため
 みを \$U\$, 荷重を \$Q\$ とすると運動方程式は

$$EI \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = -\rho B \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + Q \quad (8)$$

となる。定常状態を考へ

$$U = u e^{-i\omega t}, \quad Q = \delta e^{-i\omega t} \quad (9)$$

を代入すると調和振動の方程式

$$\frac{d^4 u}{dy^4} - k^4 u = \frac{\delta}{EI} \quad (10)$$

を得る。ここに \$k^4 = \rho B \omega^2 / EI\$ である。

$$\frac{d^4 G}{dy^4} - k^4 G = \frac{\delta(y, z)}{EI} \quad (11)$$

を満足する基本解は Fourier 変換を用いて

$$\begin{bmatrix} u(z) \\ u'(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{4EI k^3} \begin{bmatrix} \int_0^z \{ -e^{-k(x-z)} + i e^{-ik(x-z)} \} \delta(x) dx + \int_z^H \{ -e^{-k(z-x)} + i e^{-ik(z-x)} \} \delta(x) dx \\ k \int_0^z \{ e^{k(x-z)} - e^{-ik(x-z)} \} \delta(x) dx + k \int_z^H \{ -e^{-k(z-x)} + e^{-ik(z-x)} \} \delta(x) dx \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-e^{-kz} - e^{ikz}), \frac{1}{k} (e^{-kz} + i e^{ikz}), \frac{1}{k} (e^{-kz} + e^{ikz}), \frac{1}{k^2} (e^{-kz} - i e^{ikz}) \\ k (e^{-kz} - i e^{ikz}), (-e^{-kz} - e^{ikz}), \frac{1}{k} (e^{-kz} + i e^{ikz}), \frac{1}{k^2} (-e^{-kz} + e^{ikz}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ u''(0) \\ u'''(0) \end{bmatrix}$$

$$-\frac{1}{4} \begin{bmatrix} (-e^{-k(H-z)} - e^{ik(H-z)}), \frac{1}{k} (-e^{-k(H-z)} - i e^{-ik(H-z)}), \frac{1}{k^2} (-e^{-k(H-z)} + e^{-ik(H-z)}), \frac{1}{k^2} (-e^{-k(H-z)} + i e^{-ik(H-z)}) \\ k (-e^{-k(H-z)} + i e^{-ik(H-z)}), (-e^{-k(H-z)} - e^{-ik(H-z)}), \frac{1}{k} (-e^{-k(H-z)} - i e^{-ik(H-z)}), \frac{1}{k^2} (-e^{-k(H-z)} + e^{-ik(H-z)}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(H) \\ u'(H) \\ u''(H) \\ u'''(H) \end{bmatrix} \quad (14)$$

これを \$z \to 0\$ および \$z \to H\$ とすれば \$u(0), u'(0), u''(0), u'''(0)\$ および \$u(H), u'(H), u''(H), u'''(H)\$ に関する 4本の積分(代数)方程式が得られる。たとえば、片もみ梁の場合、これらのうち \$u(0), u'(0), u''(H), u'''(H)\$ が既知であり、残りの 4つについて方程式(14)を解けばよい。また、いったんそれらが求まれば改めて式(14)に代入することにより、内部のたわみ、たわみ角を計算することができる。

4. 流体と梁の相互作用 (図-1 参照)

2., 3. において、流体および梁に関する単独の積分方程式を説明したが、次に両者の相互作用について述

$$G(y, z) = \frac{1}{4EI k^3} \left\{ -e^{-k|y-z|} + i e^{i k|y-z|} \right\} \quad (12)$$

のように求めることができる。

$$\int_0^H \left(\frac{d^4 u}{dy^4} - k^4 u \right) G(y, z) dy$$

に部分積分を繰り返せば

$$u(z) = \int_0^H G(y, z) \delta(y) dy - EI [u''' G - u' G']_0^H + EI [u'' G' - u G'']_0^H \quad (13)$$

を得る。つまり、調和振動時の梁のたわみ \$u(z)\$ は、荷重 \$\delta(y)\$ と梁の両端でのたわみとそれらの3階までの微係数により表わすことができる。式(13)は、流体の運動方程式の場合の式(6)に相当する。式(13)とそれらをつき一階微分したものを合わせて書き下せば、次のようになる。

る。流体と梁の相互作用は、以下に説明するように幾何学的な適合条件と、力学的なつりあい条件を満足することにより考慮に入れることができる。

(i) 適合条件

いま、図-1の流体部に着目する。境界上の法線方向の変位を \$u e^{-i\omega t}\$ とすれば、その速度は \$-i\omega u e^{-i\omega t}\$ となるが、これと式(2)'より

$$u = \frac{i}{\omega} \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad (15)$$

となることがわかる。つまり、流体と梁の境界において梁のたわみは速度ポテンシャルの法線微分の定数倍となる。

(ii) 二つあり条件

式(14)の荷重項 ρ は貯水池から作用する水圧であり、本来、未知量である。しかし式(3')により水圧 P は速度ポテンシャルの定数倍として表わすことができる。 $\rho = P$ として、式(3')と(15)を式(14)に代入すれば梁の上における中、端、と両端のたわみ w とそれらの微係数の関係が求まる。すなわち、流体単独の方程式では梁との境界における $\frac{\partial w}{\partial x}$ が与えらるが、相互作用を考慮する場合にはこれは梁のたわみとして未知量となる。しかし、上記述べたように梁の方程式より $\frac{\partial w}{\partial x}$ は、中と両端のたわみにより与えられる。以上のことより、流体および梁の単独の方程式に、相互作用を加味した梁のたわみの式を連立させれば全体をひとつの系として解くことができる。

4. 計算例

図-1に示すように、貯水池の長さ $L = 50m$ 、高さ $H = 50m$ 、ダム本体の厚さ B を $5m$ 、および $10m$ とした場合の計算例を示す。なお、境界条件として貯水池底部、右端とも剛な不透水性地盤とし、速度ポテンシャルの法線微分が零であるとする。入力としてダム本体下部の加速度を $1m/sec^2$ とした。また、流体の密度 $\rho_f = 1t/m^3$ 、音速の速さ $c = 1440m/sec$ 、ダム本体の密度 $\rho = 2t/m^3$ 、ダム本体のヤング率 $E = 2 \times 10^6 t/m^2$ を用いた。

積分方程式を解くにあたって、各辺を10等分に分割し、その上での諸量は一定とした。数値積分には Gauss の3点積分を用いている。解くべき方程式の全未知数はこの場合、54である。

図-2には、角速度による全動水圧(水圧をダム壁面に沿って積分したもの)の変化の様子を示している。ここで角速度は、貯水池の第1固有振動に対応する角速度 $(\pi c/2H = 45.1/sec)$ により、また全動水圧は、全静水圧によりそれぞれ正規化されている。ダムの剛性が大きくなれば、共振時の角速度は大きくなり、剛体モデルの場合に近づく。

一方、片もさ梁の固有振動は

$$\cosh kH \cosh kH + 1 = 0 \quad (16)$$

より求められるが、これが3計算した角速度の値

$$\Omega_1 = 0.14 \quad (B=5m)$$

$$\Omega_1 = 0.28 \quad (B=10m)$$

が図中の矢印により示されている。

図-3には角速度 $\Omega = 0.0139, 0.0463, 0.139, 0.270$ および 0.556 のときの動水圧分布(太線)、ダムの変位(細線)

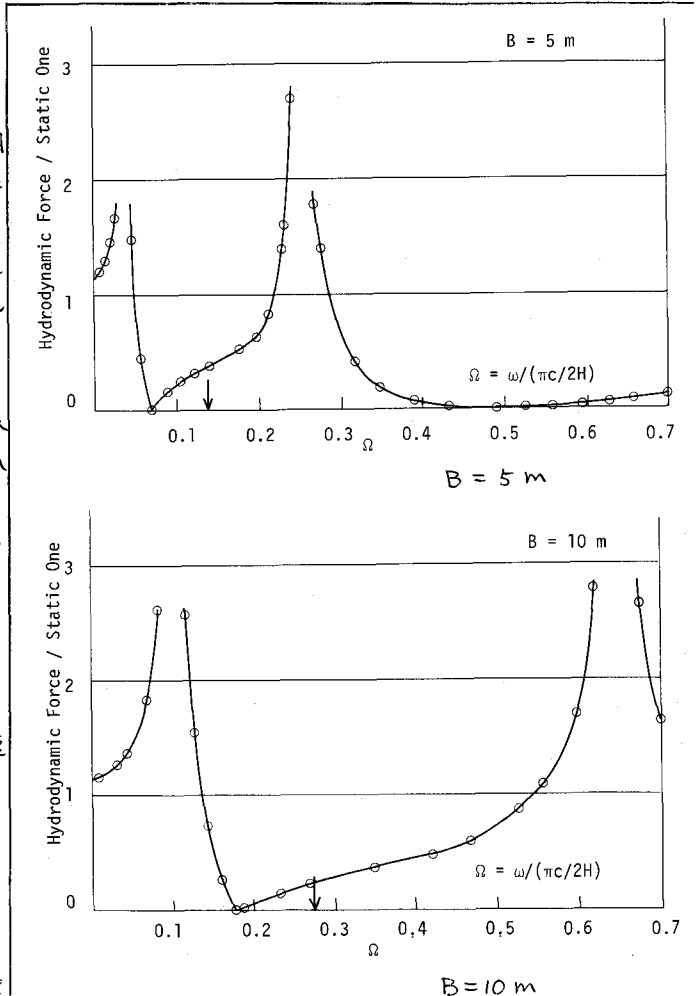
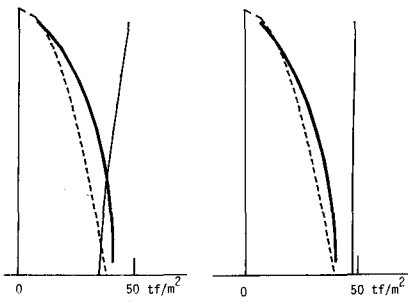
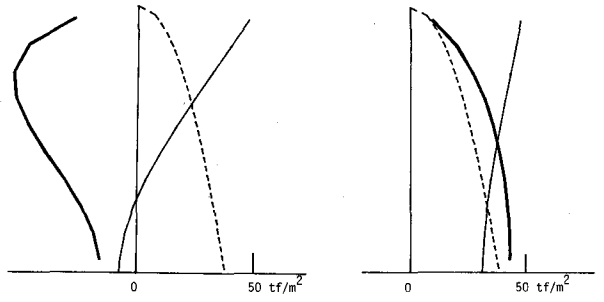


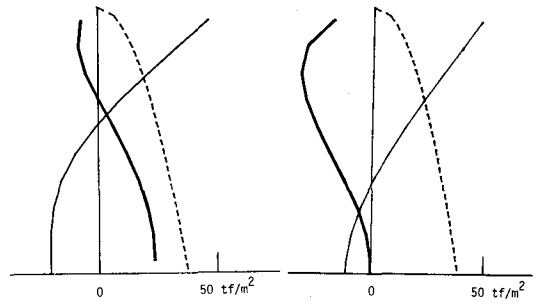
図-2



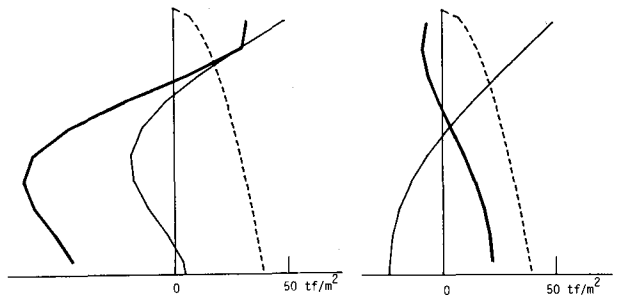
(a) $\Omega = 0.0139$



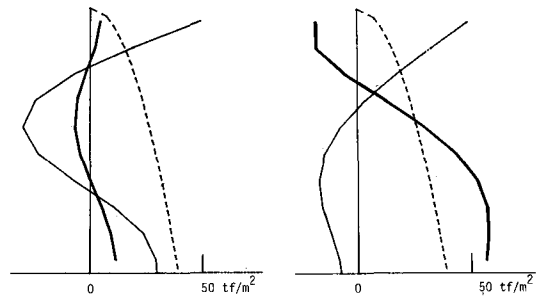
(b) $\Omega = 0.0463$



(c) $\Omega = 0.139$



(d) $\Omega = 0.270$



(e) $\Omega = 0.556$

(B = 5 m) (B = 10 m)

図 - 3

および比較のため Westergaard の近似解 (点線) がそれぞれ示されている。ただし、変位については頂部の値により規準化してある。角速度が小さく、ダム本体の剛性大きい場合には、Westergaard の解によりかなりの精度で近似されている。

なお、本報告の計算例では貯水池の長さを有限にしたが、そのため水平方向にも固有振動をもつことになる。しかし、ここで用いた Ω の範囲では、それに対応する固有振動は現われておらず、貯水池の長さを長くしてもそれほど大きな差異は見られない。

参考文献

1. Westergaard, H. M. : Water Pressures on Dams During Earthquakes, Trans. ASCE, Vol. 98, 1933.
2. Finn, W. D. L., and E. Varoglu : A Study of Dynamic Interaction in a Plate Reservoir System, 5th. Int. European Conf. Earthquake Eng., 1975.
3. 畑野 正 : 重力堰堤に作用する地震力の影響 (其の二), 土木学会論文集, 昭和 23 年度.
4. 小坪 清真 : アーチダムに働く地震振動水圧, 土木学会論文集, 44号, 昭和 32 年.
5. 小林 昭一, 西村 直志 : 積分方程式法の 1 次元問題への適用, 土木学会年次学術講演会, I-3, 昭和 55 年.