

§1. はじめに.

本解法は、変位  $u, v, w$  に関して連成した連立偏微分方程式を「非連成化」し、変数分離の手法を用いて連立常微分方程式に帰着させて解く通常の手順によっている。W. Flügge の理論に基づき、以下の展開を行う。

§2. 変位  $u, v, w$  に関して非連成化された連立偏微分方程式の導出

2.1 歪みと変位との関係式

$$\epsilon_x = \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial y}, \epsilon_\theta = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \omega = \frac{1}{a} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \kappa_x = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \kappa_\theta = \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + w \right), \tau = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \theta} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right\}$$

2.2 歪みと断面力との関係式

$$N_x = C(\epsilon_x + \mu \epsilon_\theta) - \frac{D}{a} \kappa_x, N_\theta = C(\epsilon_\theta + \mu \epsilon_x) + \frac{D}{a} \kappa_\theta, N_{\theta x} = C \frac{1-\mu}{2} \omega + D \frac{1-\mu}{2a} \left( \tau + \frac{\omega}{2a} \right)$$

$$N_{x\theta} = C \frac{1-\mu}{2} \omega - D \frac{1-\mu}{2a} \left( \tau - \frac{\omega}{2a} \right), M_x = D \left\{ \kappa_x + \mu \kappa_\theta - \frac{1}{a} (\epsilon_x + \mu \epsilon_\theta) \right\}, M_\theta = D (\kappa_\theta + \mu \kappa_x)$$

$$M_{x\theta} = D (1-\mu) \left( \tau - \frac{\omega}{2a} \right), M_{\theta x} = D (1-\mu) \tau \quad \left( C = \frac{Eh}{1-\mu^2}, D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \right)$$

2.3 平衡方程式

$$\frac{\partial N_x}{\partial y} + \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} + a \cdot X = 0, \quad \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial y} - Q_\theta + a \cdot Y = 0, \quad N_\theta + \frac{\partial Q_x}{\partial y} + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} + a \cdot Z = 0$$

$$\frac{1}{a} \left( \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial y} + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \right) - Q_\theta = 0, \quad \frac{1}{a} \left( \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} + \frac{\partial M_x}{\partial y} \right) - Q_x = 0, \quad N_{x\theta} - N_{\theta x} + \frac{M_{\theta x}}{a} = 0$$

2.4 連成した偏微分方程式の導出

平衡方程式を変位  $u, v, w$  で表わすと、次のような連成した偏微分方程式が得られる。Matrix表示すると

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{21} & L_{31} \\ L_{12} & L_{22} & L_{32} \\ L_{13} & L_{23} & L_{33} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Phi_x \\ \Phi_y \\ \Phi_z \end{Bmatrix}, \quad \begin{matrix} \Phi_x = -\frac{a^2}{C} \cdot X \\ \Phi_y = \frac{a^2}{C} \cdot Y \\ \Phi_z = \frac{a^2}{C} \cdot Z \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{ここに } L_{ij} (i, j = 1, 2, 3) \text{ は、次} \\ \text{のような線型性を有する偏微分演算子で} \\ \text{ある。} \end{matrix}$$

$$L_{11} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (1+\mu) \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y \partial \theta}, \quad L_{13} = L_{31} = \mu \frac{\partial}{\partial y} + \mu \left( -\frac{\partial^3}{\partial y^3} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^3}{\partial y \partial \theta^2} \right)$$

$$L_{22} = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (1+3\mu) \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{23} = L_{32} = \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{3-\mu}{2} \mu \frac{\partial^3}{\partial y^2 \partial \theta}, \quad L_{33} = 1 + \mu (\nabla^4 + 2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1)$$

$$k = \frac{1}{12} \left( \frac{h}{a} \right)^2, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \nabla^4 = \nabla^2 \cdot \nabla^2, \quad X = a \cdot y, \quad S = a \cdot \theta$$

2.5 変位  $u, v, w$  に関して非連成の uncoupled 連立偏微分方程式

連成した連立偏微分方程式は、偏微分演算子  $L_{ij}$  の線型線を利用すると、三元連立方程式のいわゆる「たすき掛け」の方法によって、「非連成 uncoupled」の形へ変えることができる。すなわち

$$\begin{aligned} & (L_{11}L_{22}L_{33} + L_{12}L_{23}L_{31} + L_{13}L_{32}L_{21} - L_{11}L_{32}L_{23} - L_{12}L_{21}L_{33} - L_{13}L_{22}L_{31}) \cdot W \\ & = (L_{21}L_{32} - L_{22}L_{31}) \cdot \Phi_x + (L_{12}L_{31} - L_{11}L_{32}) \cdot \Phi_y + (L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) \cdot \Phi_z \end{aligned}$$

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) \cdot u = (L_{12}L_{23} - L_{22}L_{13}) \cdot w + L_{22} \cdot \Phi_x - L_{12} \cdot \Phi_y$$

$$(L_{11}L_{22} - L_{12}L_{21}) \cdot v = (L_{21}L_{13} - L_{11}L_{23}) \cdot w - L_{21} \cdot \Phi_x + L_{11} \cdot \Phi_y$$

ここに、第1式は、法線方向の変位  $w$  のみの、第2式は、軸方向変位  $u$  と  $w$  の、第3式は、円周方向変位  $v$  と  $w$  の方程式である。この3つの方程式を、「変位  $u, v, w$  に関して非連成の連立偏微分方程式」と呼ぶ。2.4の  $L_{ij}$  から、Flügge-Biezeno-Grammel方程式が導くことができる。

§3. 連立偏微分方程式を連立常微分方程式へ帰着させ解を求めること

変位  $u, v, w$  と軸方向, 円周方向, 法線方向の表面外荷重強度  $X, Y, Z$  を. 次のような変数分離形で表現する

$$u = U(y) \cdot \cos n\theta, \quad v = V(y) \cdot \sin n\theta, \quad w = W(y) \cdot \cos n\theta$$

$$X(y, \theta) = 0, \quad Y(y, \theta) = \gamma_0 \cdot \sin n\theta, \quad Z(y, \theta) = (\alpha_n y^2 + \beta_n y + \gamma_n + S \cdot e^{ny} + T \cdot e^{-ny}) \cos n\theta$$

ここに  $U(y), V(y), W(y)$  は  $y$  のみの函数で.  $n$  は円周方向の波数 wave number である.

これらを非連成化した連立偏微分方程式へ代入すると. 次の連立常微分方程式が得られる.

$$\left( \frac{d^8}{dy^8} + W_1 \frac{d^6}{dy^6} + W_2 \frac{d^4}{dy^4} + W_3 \frac{d^2}{dy^2} + W_4 \right) \cdot W(y) = W_5 \cdot y^2 + W_6 y + W_7 + W_8 \cdot e^{ny} + W_9 \cdot e^{-ny}$$

$$\left( \frac{d^4}{dy^4} + U_1 \frac{d^2}{dy^2} + U_2 \right) U(y) = \left( U_3 \frac{d^5}{dy^5} + U_4 \frac{d^3}{dy^3} + U_5 \frac{d}{dy} \right) \cdot W(y)$$

$$\left( \frac{d^4}{dy^4} + V_1 \frac{d^2}{dy^2} + V_2 \right) \cdot V(y) = \left( V_3 \frac{d^4}{dy^4} + V_4 \frac{d^2}{dy^2} + V_5 \right) \cdot W(y) + V_8$$

ここに  $W_1 \sim W_9, U_1 \sim U_5, V_1 \sim V_8$  は定数係数である. 地震時における動液圧は.  $n=1$  のときを主に採用することが多い. 第1式の  $W_3, W_4$  は 0 となる. 第1式から  $W(y)$  が求まると. 第2, 3式から  $U(y), V(y)$  が求まることになる.  $n=1$  のとき ( $W_3=W_4=0$ ) の解を以下に示す.

$$W(y) = C_1 \cdot e^{ny} \cdot \cos \beta y + C_2 \cdot e^{ny} \cdot \sin \beta y + C_3 \cdot e^{-ny} \cdot \cos \beta y + C_4 \cdot e^{-ny} \cdot \sin \beta y + C_5 + C_6 y + C_7 y^2 + C_8 y^3 + \tilde{W}_6 \cdot y^6 + \tilde{W}_5 \cdot y^5 + \tilde{W}_4 \cdot y^4 + \tilde{W}_P \cdot e^{ny} + \tilde{W}_M \cdot e^{-ny}$$

ここに  $\alpha, \beta$  は 4 次方程式  $\lambda^4 + W_1 \lambda^2 + W_2 = 0$  の 4 根であって. 互に共役な関係を有する.

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad \lambda_3 = -\alpha + i\beta, \quad \lambda_4 = -\alpha - i\beta$$

$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$  は積分定数であり.  $\tilde{W}_6, \tilde{W}_5, \tilde{W}_4, \tilde{W}_P, \tilde{W}_M$  は表面外荷重強度  $X, Y, Z$  からの特殊解で. 各々  $y^6, y^5, y^4, e^{ny}, e^{-ny}$  の係数で. 次のように求められる.

$$\tilde{W}_6 = \frac{W_5}{360 \cdot W_2}, \quad \tilde{W}_5 = \frac{W_6}{120 \cdot W_2}, \quad \tilde{W}_4 = \frac{W_7 - 120 \cdot W_1 \cdot \tilde{W}_6}{24 \cdot W_2}, \quad \tilde{W}_P = \frac{W_8}{\nu^4(\nu^4 + W_1 \nu^2 + W_2)}, \quad \tilde{W}_M = \frac{W_9}{\nu^4(\nu^4 + W_1 \nu^2 + W_2)}$$

$U(y), V(y)$  は. 各々次のようになる.

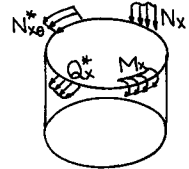
$$U(y) = C_1 \cdot e^{ny} (\tilde{U}_1 \cos \beta y + \tilde{U}_2 \sin \beta y) + C_2 \cdot e^{ny} (\tilde{U}_3 \cos \beta y + \tilde{U}_4 \sin \beta y) + C_3 \cdot e^{-ny} (\tilde{U}_5 \cos \beta y + \tilde{U}_6 \sin \beta y) + C_4 \cdot e^{-ny} (\tilde{U}_7 \cos \beta y + \tilde{U}_8 \sin \beta y) + C_5 \cdot \tilde{U}_9 + C_6 \cdot \tilde{U}_{10} y + C_8 (\tilde{U}_{11} + \tilde{U}_{12} \cdot y^2) + \tilde{U}_5 \cdot y^5 + \tilde{U}_4 \cdot y^4 + \tilde{U}_3 \cdot y^3 + \tilde{U}_2 \cdot y^2 + \tilde{U}_1 \cdot y + \tilde{U}_0 + \tilde{U}_P \cdot e^{ny} + \tilde{U}_M \cdot e^{-ny}$$

$$V(y) = C_1 \cdot e^{ny} (\tilde{V}_1 \cos \beta y + \tilde{V}_2 \sin \beta y) + C_2 \cdot e^{ny} (\tilde{V}_3 \cos \beta y + \tilde{V}_4 \sin \beta y) + C_3 \cdot e^{-ny} (\tilde{V}_5 \cos \beta y + \tilde{V}_6 \sin \beta y) + C_4 \cdot e^{-ny} (\tilde{V}_7 \cos \beta y + \tilde{V}_8 \sin \beta y) + C_5 \cdot \tilde{V}_9 + C_6 \cdot \tilde{V}_{10} \cdot y + C_7 \cdot (\tilde{V}_{11} + \tilde{V}_{12} \cdot y^2) + C_8 \cdot (\tilde{V}_{13} \cdot y + \tilde{V}_{14} \cdot y^3) + \tilde{U}_6 \cdot y^6 + \tilde{U}_5 \cdot y^5 + \tilde{U}_4 \cdot y^4 + \tilde{U}_3 \cdot y^3 + \tilde{U}_2 \cdot y^2 + \tilde{U}_1 \cdot y + \tilde{U}_0 + \tilde{U}_P \cdot e^{ny} + \tilde{U}_M \cdot e^{-ny}$$

ここに  $\tilde{U}_1 \sim \tilde{U}_{12}, \tilde{V}_1 \sim \tilde{V}_{14}$  は定数係数で.  $\tilde{U}_5 \sim \tilde{U}_0, \tilde{U}_P, \tilde{U}_M, \tilde{V}_6 \sim \tilde{V}_0, \tilde{U}_P, \tilde{U}_M$  は特殊解の項である.

(これは. 長くなるので省略する.) 積分定数  $C_1 \sim C_8$  は幾何学的境界条件  $u, v, w, \frac{\partial w}{\partial x}$  と力学的境界条件  $N_x, M_x, Q_x^*, N_{x0}^*$  によって決められることになる. ここに

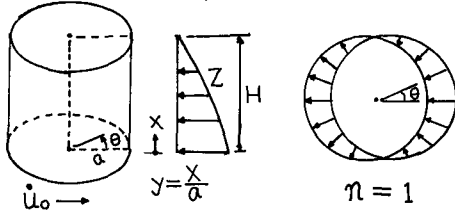
$N_x, M_x$  は軸方向の軸力と曲げモーメントであり  $Q_x^*$  と  $N_{x0}^*$  は Kirchhoff の平板に対する取扱いを殻理論へ適用したもので. 軸方向面外及び面内の「等価換算せん断力」と呼ばれるものである.



[  $n=1$  に対する解の形は. Flügge のみではなく Goldenveizer, Novozhilov, Sanders, Vlasov, 溝口等の理論から導かれる非連成の方程式においても. 同じである. たゞ有名な Donnell の近似方程式では.  $W_3$  と  $W_4$  は 0 とならず. 違った形となる. 筆者の計算では.  $n=1$  に対する Donnell の式の計算結果に. 場合によって. かなりの誤差を生じている. ]

### §4 導かれた解の地震時荷重への適用

#### 4.1 Housnerの衝撃圧に対して

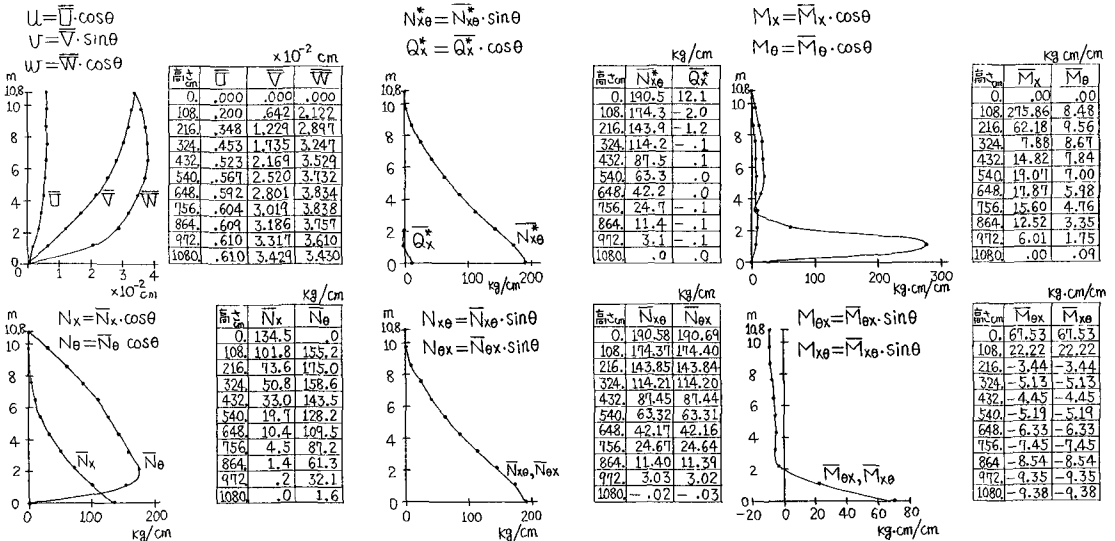


$$Z = \frac{\sqrt{3}}{2} \tanh\left(\frac{\sqrt{3}a}{H}\right) \rho \dot{u}_0 H \left[1 - \left(\frac{a}{H}\right)^2 y^2\right] \cos\theta$$

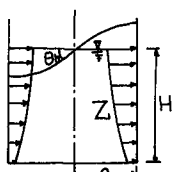
$\rho$ : 液体の質量 ( $\frac{g}{cm^3}$ )       $\gamma$ : 液体の単位体積重量  
 $g$ : 重力の加速度       $\dot{u}_0$ : 地震時水平加速度  
 $a$ : 内壁面の曲率半径       $u_0 = K_H g$   
 $H$ : 全液深       $K_H$ : 水平加速度係数

〔適用計算例〕 R.C製タンク ( $H=1080\text{ cm}$ ,  $a=610\text{ cm}$ ,  $h=20\text{ cm}$ ,  $\mu=\frac{1}{6}$ ,  $E=3.20 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ) に  $\dot{u}_0=0.40\text{ g}$  の水平加速度が作用する。  $\gamma=0.001 \text{ kg/cm}^3$  (水)

$Z = (0.28220 - 0.09003 y^2) \cdot \cos\theta$  従って  $\alpha_n = -0.09003 z_n$ ,  $\beta_n = 0$ ,  $\gamma_n = 0.28220 z_n$  となる。  
 境界条件は、上縁自由 ( $N_x=0, M_x=0, Q_x=0, N_{x0}^*=0$ ), 下縁単純支持 ( $u=0, v=0, w=0, M_x=0$ ) とする。



#### 4.2 Housnerの液面振動圧に対して



$$Z = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{8} \frac{g}{a} a^2 \theta_n \omega_1^2}{\sinh \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{H}{a}} \cdot \cosh\left(\sqrt{\frac{27}{8}} y\right) \cdot \left(\cos\theta + \frac{1}{15} \cos 3\theta\right) \cdot \sin \omega_1 t$$

$\theta_n$ : 液面の最大傾斜角速度 (rad./sec)       $\omega_1$ : 液面振動の1次固有円振動数

$$\theta_n = \frac{5}{6} \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{y_{max}}{a} \tanh\left(\sqrt{\frac{27}{8}} \frac{H}{a}\right)$$

$$\omega_1^2 = \sqrt{\frac{27}{8}} \frac{g}{a} \tanh\left(\sqrt{\frac{27}{8}} \frac{H}{a}\right)$$

S  
 $\dot{u}_0(t)$

$y_{max}$ : 等価質量の最大変位

$$y_{max} = \frac{S_V}{\omega_1}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$$

$T_1$ : " " 周期

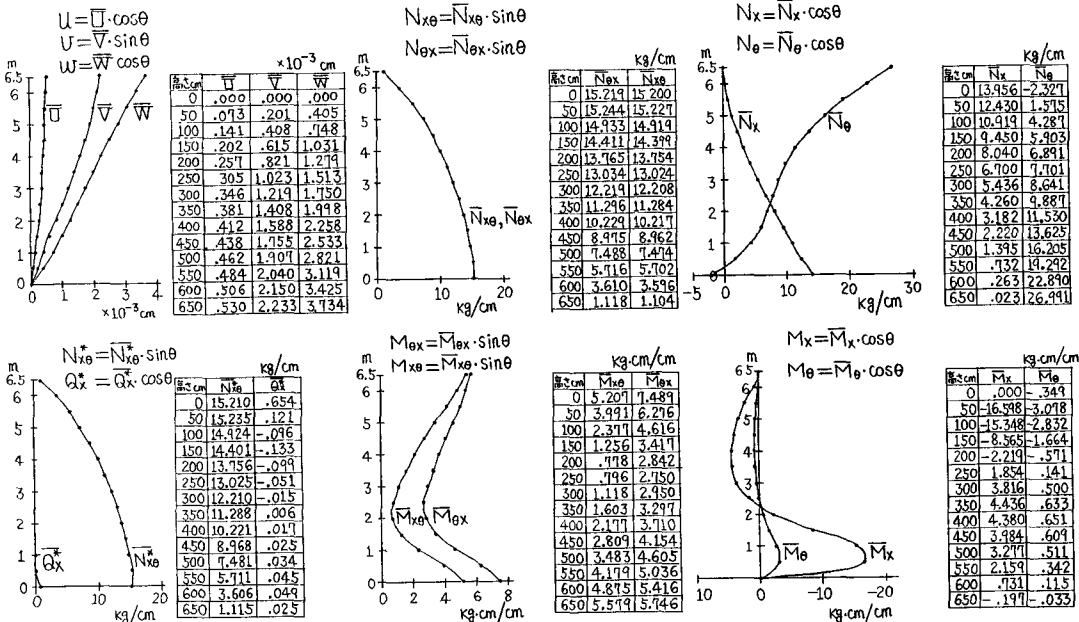
$S_V$ : 応答速度スペクトル Velocity Response Spectrum

〔適用計算例〕 R.C製タンク ( $H=670\text{ cm}$ ,  $a=500\text{ cm}$ ,  $h=30\text{ cm}$ ,  $\mu=\frac{1}{6}$ ,  $E=3.00 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ ) に水が入っていて、EL.CENTRO(1940), NSの最大加速度  $\dot{u}_0=0.30\text{ g}$  の地震波が作用するものとする。

$S_V=105\text{ cm/sec}$ ,  $\omega_1=1.884\text{ 1/sec}$ ,  $T_1=3.335\text{ sec}$ . ( $\cos 3\theta$ の項は  $\cos\theta$ の  $\frac{1}{15}$ であるから省略する)

従って、 $S = 5.0068 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$ ,  $T = 5.0068 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^2$ ,  $\nu = \sqrt{\frac{27}{8}} = 1.8371$  となる。

境界条件は、上縁自由 ( $N_x=0, M_x=0, Q_x^*=0$ ), 下縁単純支持 ( $U=0, V=0, W=0, M_x=0$ ) として計算する。



### 4.3 空の容器が地震時水平加速度を受ける場合

〔適用計算例〕 R.C製タンク ( $H=1300$ .cm

$\alpha=1500$ .cm,  $h=25$ .cm,  $\gamma_s=2.5 \times 10^3$  kg/cm<sup>3</sup>

$\mu = \frac{1}{6}$ ,  $E=3.0 \times 10^5$  kg/cm<sup>2</sup>) が  $\ddot{u}_0=0.30g$

の水平加速度を受ける。このとき  $\tau_n = \gamma_0 = 1.875 \times 10^2$

kg/cm<sup>2</sup> となる。上縁自由, 下縁単純支持として計算する。

