最適化手法を用いた耐震設計の信頼性レベルに関する一考察

京都大学工学部　正員　山田善一
京都大学工学部　正員　○古川浩平
広島県　正員　福原真爾

1. まえがき

構造物の設計において最も重要な要因は、信頼性と経済性であろう。しかしこの２つの要因は互いに相反する性質をもっている。信頼性を高くするためには、構造物のコストを上げざるをえず、逆に経済性を高めるためにコストを下げれば、信頼性も低くなるのが普通である。このジレンマに対して、一つの解答を与えうるのは、近来盛んに利用されている最適化の手法を応用することであろう。最適化の手法を用いることによってはじめて、ある種の条件の下で、信頼性と経済性のバランスがとれた構造物の設計が可能であると考えられる。

構造物は一般に大自然の中に置かれ、断え間ない苛酷な外力にさらされている。そのために構造物のコストを考える場合、初期建設費だけでなく、構造物が破損、あるいは破壊することも考えて、その修理費、再建設費さらにはその構造物が損傷したための経済的損失などを考える必要がある[1]。このような場合、その構造物の信頼性をどの程度に考えておけば良い設計ができるのかという問題がでてくる。この問題は構造物を設計する上で最も重要かつ困難な問題であろう。しかしこの問題も最適化手法を応用することによって、その最適な信頼性レベルを求めることが可能である。

本研究で対象とするのは、耐震設計に限られる。耐震設計は大きな不確実性をもつ地震動を外力としているため、一般にかなりの余裕をもった設計がなされていると考えられ、最適化の観点から見直すことによって、より合理的な設計を行なうことが可能であろう。地震外力は本来不規則現象であり、この取り扱いは当然確率論的になされるべきである。外力を確率論的に取り扱った場合、その応答も確率論的に取り扱わざるをえない。本研究においては、入力地震動のパワースペクトル密度を設定して、不規則振動解析および動的信頼性理論より構造物の破壊率を求め、構造物の初期建設費と破壊による損失の和が最小になるように最適化を行ない、その結果から耐震設計における最適な信頼性レベルに関して考察を加えたものである。

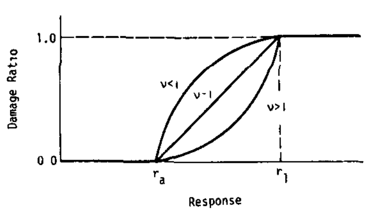
2. 破壊による損失を考慮した最適耐震設計の定式化

構造物が破損あるいは破壊した時の費用まで考慮した時の総コスト C_T は、

$$C_T = C_I + C_F \tag{1}$$

ここに、C_I：初期建設費、C_F：破壊による損失、と表わすことができる。いま破壊あるいは破壊時の修理費と再建設費の比を破壊率（Damage Ratic　D_r）と定義すれば、C_F は破壊率の期待値と再建設費の積で表わされる。この破壊率を構造物の最大応答 r の関数として、図－１のように仮定する。すなわち、

$$D_r(r) = \begin{cases} 0 & (r < r_a) \\ \left(\dfrac{r - r_a}{r_l - r_a}\right)^{\nu} & (r_a \leq r \leq r_l) \\ 1 & (r_l < r) \end{cases} \tag{2}$$



図－１　破壊率関数

ここに、r_a：許容限界値、r_l：崩壊限界値、ν：構造物の強度特性による定数、である。構造物の最大応答値の確率分布 $F(r)$ は応答の初期超過の問題から推定できるから、破壊率 D_r の期待値 $\overline{D_r}$ は、

$$\overline{D_r}(r) = \int_{r_a}^{r_l} \left(\frac{r - r_a}{r_l - r_a}\right)^{\nu} \frac{d}{dr} F(r)\,dr + \int_{r_l}^{\infty} \frac{d}{dr} F(r)\,dr \tag{3}$$

として求めることができる。多自由度系構造物の運動方程式は次のように表現される。

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbb{x}} + \mathbb{C}\dot{\mathbb{x}} + \mathbb{K}\mathbb{x} = -\mathbb{M}\ddot{\mathbb{z}} \tag{4}$$

ここに、$\mathbb{M}$：質量マトリックス、$\mathbb{C}$：減衰マトリックス、$\mathbb{K}$：剛性マトリックス、$\mathbb{x}$：変位ベクトル、$\ddot{\mathbb{z}}$：地震動の加速度ベクトル、である。式(4)で表現される系に、平均値が0でその自乗平均パワースペクトル密度関数$S_F(\omega)$をもつ定常確率過程$\ddot{z}(t)$が作用した時、構造物は確定系であるとすると、その変位分散σ_x^2、速度分散$\sigma_{\dot{x}}^2$は、

$$\sigma_x^2 = \sum_i \phi_i^2 T_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} |H_i(\omega)|^2 S_F(\omega)\, d\omega \tag{5}$$

$$\sigma_{\dot{x}}^2 = \sum_i \phi_i^2 T_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |H_i(\omega)|^2 S_F(\omega)\, d\omega \tag{6}$$

となる[2)]。ここに、ϕ_i：i次モード、T_i：i次の刺激係数、$H_i(\omega)$：i次の周波数応答関数、である。この時最大応答の限界値λの初期超過がポアソン過程に従うと仮定すれば、その要素の初期超過確率は、

$$F_e(\lambda) = 1 - \exp\left\{-\frac{T}{\pi}\frac{\sigma_{\dot{x}}}{\sigma_x}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\sigma_x^2}\right)\right\} \tag{7}$$

と表現される。系をweakest-link-typeシステムとすれば、構造物全体では、

$$F(\lambda) = \sum_j F_{e_j}(\lambda) \tag{8}$$

となる。式(8)でλを変数とみなせば最大応答の確率分布を与えるから、結局目的関数である式(1)は、

$$C_T = C_I + C_R \cdot \left\{\int_{r_a}^{r_e}\left(\frac{r-r_a}{r_e-r_a}\right)^{\nu}\frac{d}{dr}F(r)\,dr + \int_{r_e}^{\infty}\frac{d}{dr}F(r)\,dr\right\} \tag{9}$$

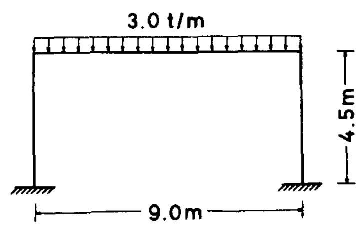
と表わされる。ここに、C_Rは再建設費である。構造物が破損あるいは破壊した時、その修理や再建設に要する費用だけでなく、修理期間中その構造物を使用できなかった経済的損失が伴なう。しかしこの経済的損失は構造物の重要度によっても大きく異なり、実際上見積りはむつかしい。そこでこれらの経済的損失なども含めて再建設費を考え、つまり

$$C_R = \alpha \cdot C_I \tag{10}$$

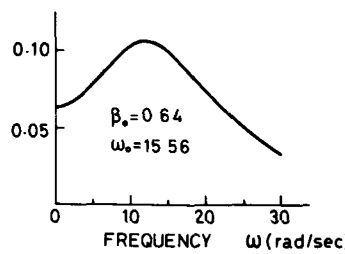
として、C_Rを損失率(Loss Ratio) αと初期建設費の積として表わし、αとして幾種類かの値を代入することによって、構造物の重要度に応じた経済的損失の効果も考慮する。よって、最終的に目的関数は、

$$C_T = C_I + \overline{D_r} \cdot \alpha \cdot C_I \tag{11}$$

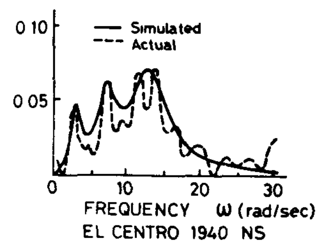
と表現される。この式(11)の最小化を行なうことにより、破壊率の最適値を求めることができる。式(11)は非線形になり、かつ微分することがむつかしい形となっている。よって最適化の手法としては、微分する必要がなく、global な最適解に収束する可能性が最も大きいとされているPowellの直接探索法を用いたSUMTが最も適していると考えられ、これを用いて最適化を行なった[3)]。



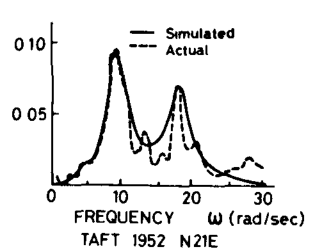
図－2　1スパン1層ラーメン



図－3　パワースペクトル密度関数（フィルタードホワイトノイズ）



図－4　パワースペクトル密度関数（El Centro 1940 NS）



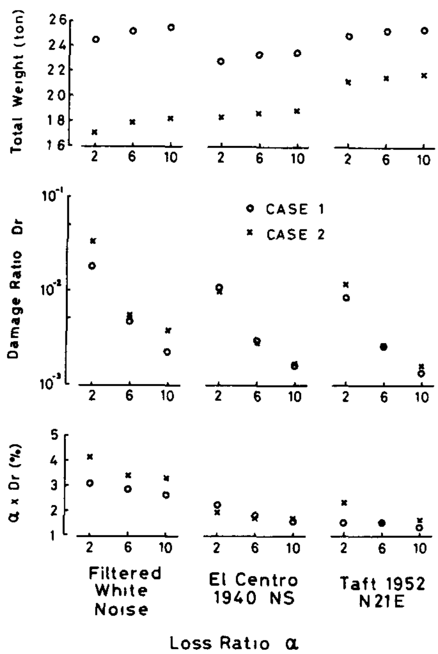
図－5　パワースペクトル密度関数（Taft 1952 N21E）

3. 数値計算例および考察

3．1　1スパン1層ラーメンにおける計算例

図－2に示す1スパン1層ラーメンに対し、図－3～図－5に示すパワースペクトル密度関数を入力し計算を行なった。計算に際し、設計変数として柱と梁の断面2次モーメントを考え、他の変数は断面2次モーメントの関数として求めた。破壊モードとしては、各質点の縁応力とラーメン頂点の変位をとった。それらの縁応力や変位の許容限界値x_aや崩壊限界値x_ℓの値として、次のケース1とケース2の2つの場合を考えた。ケース1の場合、鋼材としてSS41を用いるものとし、$\sigma_a=14000\,\mathrm{ton/m^2}$、$\sigma_\ell=23000\,\mathrm{ton/m^2}$を用いた。変位はラーメン高さの1/300を許容限界値とし、$x_a=0.015\,\mathrm{m}$を用いた。x_ℓに関しては何ら規定がないが応力の場合と同様に考え、$\sigma_\ell/\sigma_a=1.64$なのでほぼそれと同じになるよう$x_\ell=0.025\,\mathrm{m}$を用いた。ケース2の場合は鋼材としてSM58を用い、$\sigma_a=26000\,\mathrm{ton/m^2}$、$\sigma_\ell=46000\,\mathrm{ton/m^2}$、変位の値はケース1の2倍とし、$x_a=0.03\,\mathrm{m}$、$x_\ell=0.05\,\mathrm{m}$とした。入力加速度の最大値の期待値はいずれも180galに統一して用いている。また図－1に示す破壊率関数のνの値は2を用いた。このような条件の下で最適化を行なった結果を図－6に示す。なお最適化においては、目的関数として柱と梁の鋼材の重量を用いている。図中、○印がケース1の場合であり、×印がケース2の場合である。図－6は結果の比較がしやすいように、図－3～図－5に示す3種のスペクトルを入力した結果を左から順に、また上から順に目的関数である総重量、破壊率Dr、損失率と破壊率の積$\alpha\times Dr$をαを横軸にして描いてある。

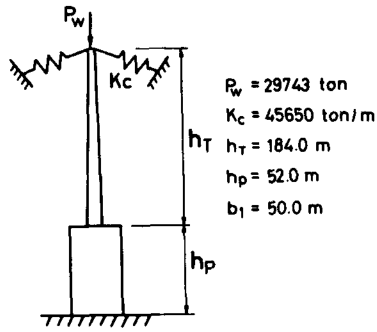
図－6の左はフィルタードホワイトノイズを入力した場合である。最大応答に対する限界値が大きく異なるため、目的関数である総重量はケース1の方がケース2より1.4倍余大きい。総重量は損失率αが大きくなるに従って大きくなり、$\alpha=10$の場合、$\alpha=2$の場合より5％前後大きくなっている。破壊率Drはαの増加に従い減少しているが、αとDrの積は3～4％でほとんど一定である。αの増加に伴ない構造物断面が大きくなり、Drは減少、総重量は増加して、全体として最適な構造物が設計されている。最適解における構造物の1次固有円振動数ω_1はケース1の場合12.5～13.0 rad/secで図－3のスペクトルのピークの位置にあたり、ケース2は8.5～9.1 rad/secでスペクトルのピークからずれているため、両ケースの差が大きくなったものであろう。両ケースは限界値の差が大きい（応力、変位共約2倍）にもかかわらず$\alpha\times Dr$の値はほぼ一定であり、限界値の大小にかかわらずαの値に応じた最適な破壊率Drの設定が可能であるものと思われる。最適化においては、初期値の$\omega_1=22$ rad/secからSUMTによって$\omega_1=39$ rad/secまで断面が大きくなり、その後順次断面が小さくなって最適解に収束しており、こういった問題に対して本研究で用いたSUMTは有効に機能していることがわかる。図－6の中央はEl Centroの場合であり、限界値はじめ他の条件は上と同様であり、結果に関してもほとんど同じ考察ができる。ケース1、2で総重量の差が小さく、Dr、$\alpha\times Dr$の値がほとんど同じなのは、最適解のω_1がケース1で11.4～11.8 rad/sec、ケース2で9.0～9.3 rad/secとなって、この時スペクトルの値がほとんど同じになるからであろう。図－6の右端はTaftの場合であり、これに関しても上と同じ考察ができる。このように入力のスペクトル特性によって最適解は当然異なるが、限界値の値、損失率αの大小にかかわらず$\alpha\times Dr$の値はほぼ一定であり、この例では数％程度である。このことより、入力のスペクトル特性とαの値を決めれば、それに応じた最適な信頼性レベルを設定することが可能であろう。



図－6　1スパン1層ラーメンでの計算結果

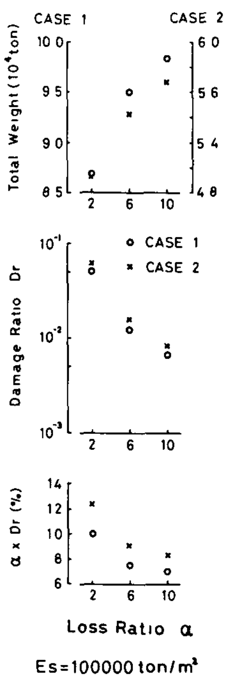
3．2　吊橋タワー－ピア－系における計算例

図－7に示す吊橋タワーピアー系に対し、図－3に示すフィルタードホワイトノイズを入力して計算を行なった。計算に際して、設計変数としてタワーの断面2次モーメントとピアーの橋軸方向幅を選び、タワーの重量とピアーのタワーへの換算重量の和を建設費と考えた。破壊モードとしては、タワー各点の縁応力とピアー頂変位をとり、x_a、x_ℓの値として次のようにケース1とケース2の両者を考えた。ケース1の場合、鋼材としてSM58を用いるものとし、$\sigma_a=26000\,\mathrm{ton/m^2}$、$\sigma_\ell=46000\,\mathrm{ton/m^2}$、$x_a$としては本四公団の設計案[4]より$x_a=0.042\,\mathrm{m}$、$x_\ell$は$\sigma_\ell/\sigma_a\fallingdotseq1.8$と考え$x_\ell=0.0756\,\mathrm{m}$を用いた。タワーピアー系ではピアー頂変位の影響が大きいことが過去の最適設計の結果から分かっており[2]、ケース2としては鋼材はそのままで、$x_a=0.08\,\mathrm{m}$、$x_\ell=0.15\,\mathrm{m}$として計算を行なった。またこの例では、タワー座屈とピアー転倒を確定論的な制約としてつけ加えた。以上のような条件の下で最適化を行なった結果を図－8、9に示す。図－8は地盤の弾性定数$E_s=10\times10^4\,\mathrm{ton/m^2}$の場合であり、図－9は$E_s=30\times10^4\,\mathrm{ton/m^2}$の場合である。両図より、限界値の大小、地盤の弾性定数の大小、損失率の大小により目的関数は大きく異なるが、$\alpha\times D_r$の値はほぼ10％程度であり、この例の場合もαの値に応じた最適なD_r、すなわち信頼性レベルを設定することが可能である。

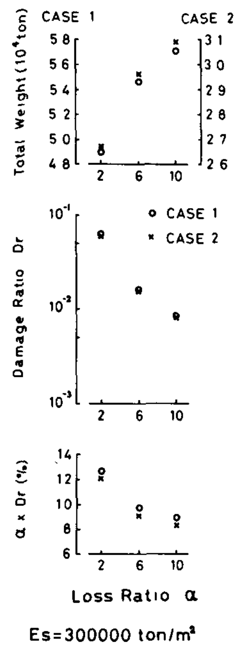


図－7 計算に用いたタワーピアー系

しかし最適化の過程を詳しく検討すると、断面の少しの変化に伴なってD_rが大きく変化しており、破壊率は設計変数に対してかなり敏感な指標であることが分かる。当然のことながら特に最適解付近ではその傾向が大きく、$\alpha\times D_r$の値がばらついているのはそのことが大きく影響していると考えられ、設計変数に対しもっと鈍感な指標を用いた方がいいのではないかと考えられる。



図－8 タワーピアー系での計算結果($E_s=10\times10^4\,\mathrm{ton/m^2}$)



図－9 タワーピアー系での計算結果($E_s=30\times10^4\,\mathrm{ton/m^2}$)

4. あとがき

本研究は耐震設計に最適化の手法を適用し、構造物の初期建設費と破壊による損失の和が最小になるように最適設計を行ない、その結果から耐震設計における最適な信頼性レベルに関して考察を加えたものである。その結果、構造物の種類、入力スペクトルの周波数特性によって値は異なるが、それらと損失率αを規定すれば、それに応じた最適な破壊率、すなわち信頼性の設定が可能であると考えられる。しかし本手法により最適な信頼性レベルを求める場合、破壊率は特に最適解付近で設計変数に対して敏感であり、この点での改善が必要である。今後、各種構造物、各種のスペクトルに対し、より詳細な計算を行なうつもりである。

5. 参考文献

1) 山田、古川、福原：破壊による損失を考慮した最適耐震設計に関する研究、昭和54年度関西支部講演会
2) 山田、古川：最適化手法を用いた長大吊橋タワーピアー系の耐震設計、土木学会論文報告集、第281号
3) 日本鋼構造協会技術委員会：ＳＵＭＴによる構造の最適設計について、JSSC, Vol 7, No. 66, 1971年
4) 本州四国連絡橋公団：本州四国連絡橋下部構造設計示方書（案）、昭和47年12月