地盤の周波数特性を考慮した構造物の地震応答解析

京都大学工学部　正員　山田善一
同上　正員　竹宮宏和
同上　正員　○河野健二

1．まえがき

構造物と基礎地盤の相互作用の問題は耐震工学の中でも数多くの研究がなされているものの1つにあげられる。構造物と基礎地盤の応答に関する重要な点の1つとして，これらの相対的な質量，減衰および剛性特性の評価の方法があげられる。基礎構造物が地盤上あるいは地盤中に設置された場合の動的応答を求める方法は Lamb'の研究以来，地盤を半無限弾性体として扱うことにより行われてきた。現在，地盤を含む基礎構造物の解析方法の主なものとしては，(a) Fourier Transform Approach (b) Convolution Integral Approach，(c) FEM による解析法 などがあげられる。

これまでに得られた結果をみると，基礎構造物の動的応答を評価するのに簡単な振動のモデル化が可能な剛性や減衰特性は外力の振動数に依存した形を有している。A.S. Velotsos[1]は半無限弾性地盤上にある円形フーチングの動的応答の計算において地盤の剛性や減衰特性を外力の振動数成分の関数として近似的に表わした。また M. Novak[2]は基礎構造物に根込みがある場合の剛性や減衰特性を外力の振動数成分の関数として近似している。しかしながら応答解析において剛性や減衰特性を振動数の関数として扱うことは一般に適していない。

したがって振動数の関数である剛性や減衰特性から簡単な地盤の振動モデルを得る場合，近似的に剛性や減衰を決めるにしても種々の仮定をおくことになる。

そこで本解析では，これらの結果を利用して外力の振動数成分に依存しない振動系を求めることを試み動的解析を行った。

2．地盤のモデル化

半無限弾性体上にある円形フーチングの動的応答を水平と回転運動によって表わすと次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} V \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{VV}(\omega) & K_{VM}(\omega) \\ K_{MV}(\omega) & K_{MM}(\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_0 \\ \theta \end{Bmatrix} \tag{1}$$

ここに V, M はフーチングに作用するせん断力とモーメントを表わしている。

一般に $K_{VV}(\omega)$，$K_{VM}(\omega)$（$K_{MV}(\omega)$）および $K_{MM}(\omega)$ は複素数の形をとり，その実数部分と虚数部分はそれぞれ地盤の剛性特性と減衰特性を示している。$K_{VM}(\omega)$ は水平と回転方向の連成を表わしているが，一般に $K_{VV}(\omega)$ や $K_{MM}(\omega)$ と比べてその影響が小さいことが示されている。

A.S. Velotsos は外力の振動数成分に依存する $K_{VV}(\omega)$, $K_{MM}(\omega)$ を次のような近似式で表わした。

$$\begin{aligned} K_{VV}(\omega) &= K_x(1 + i b_1 a_0) \\ K_{MM}(\omega) &= K_\theta\left(1 - b_1\frac{(b_2 a_0)^2}{1 + i b_2 a_0} - b_3 a_0^2\right) \end{aligned} \tag{2}$$

ここに

$$K_x = \frac{8Gr_0}{2-\nu}, \quad K_\theta = \frac{8Gr_0^3}{3(1-\nu)}, \quad a_0 = \frac{\omega r_0}{V_s}, \quad i = \sqrt{-1}$$

G, ν はそれぞれ地盤のせん断定数およびポアソン比を示している。また V_s はせん断波速度，r_0 は円形フーチングの半径を表わしている。b_1, b_2, b_3 はポアソン比により決まる定数である。一般に振動モデルを考える場合，そのモデルの flexibility function を考えると便利である。式(2)から水平方向と回転方向の flexibility function を求めると次のような

形で表わされる。

$$
\begin{aligned}
H_x(\omega) &= \frac{1}{K_x}\,\frac{1}{1 + i b_1 a_0} \\
H_\theta(\omega) &= \frac{1}{K_\theta}\,\frac{1 + i b_2 a_0}{1 + i b_2 a_0 - (b_1 b_2^2 + b_3) a_0^2 - i b_2 b_3 a_0^3}
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

これらの flexibility function を用いるとフーリエ変換により水平, 回転のそれぞれの方向に対して impulse response function を得ることができる。impulse response function が得られれば直接積分等により時間領域での応答計算が可能になる。しかしながら式(3)の flexibility function により与えられる振動モデルを考慮すると次のような地盤のモデル化が可能になる。水平方向に関しては Fig.1 (a) の形で表わすことができる。これより K_{x1}, C_{x1} は次のように与えられる。

$$K_{x1} = K_x, \qquad C_{x1} = b_1 \frac{r_0}{V_s} K_x$$

一方, 回転方向に関しては Fig.1 (b) に示されるような振動モデルを考えることができる。

$$m = b_3 \bar{a}_0^2 K_\theta \qquad (\text{ここに } \bar{a}_0 = \frac{r_0}{V_s})$$

$$K_1 = K_\theta, \qquad K_2 = -b_1 K_\theta$$

$$C_{\theta 1} = b_1 b_2 \bar{a}_0 K_\theta, \quad C_{\theta 2} = -b_1 b_2 \bar{a}_0 K_\theta$$

したがってこれらの関係式を用いると式(1)の V, M は次のような形で表わされる。

$$
\begin{aligned}
V(t) &= K_x b_1 \frac{r_0}{V_s} \dot{x}_0 + K_x x_0 \\
M(t) &= b_3 \left(\frac{r_0}{V_s}\right)^2 K_\theta \ddot{\theta} + b_1 b_2 \frac{r_0}{V_s} K_\theta \cdot \dot{\theta} + K_\theta \cdot \theta - b_1 K_\theta (\theta - \varphi)
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

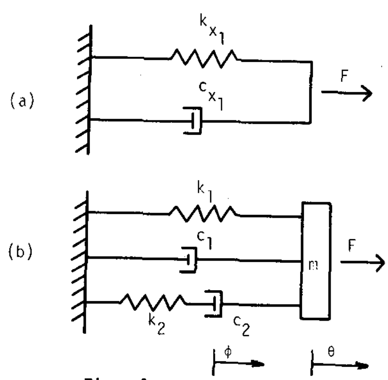

Fig. 1

また Fig. 1 (b) のモデルに示されるように回転方向に関しては, 未知変位 φ に対して次式が成立する。

$$b_1 b_2 \frac{r_0}{V_s} K_\theta \cdot \dot{\varphi} - b_1 K_\theta (\theta - \varphi) = 0 \qquad (5)$$

3. 解析方法

Fig. 2 に示されるように N 自由度の上部構造物の運動方程式は基礎構造物の並進と回転に関する運動方程式を加えると相互作用を表わす式になる。そこで基礎構造物に作用する力 $V(t)$, $M(t)$ を式(4)で示されるような振動モデルで表わすと次式が得られる。

$$[M_0]\{\ddot{\delta}\} + [C_0]\{\dot{\delta}\} + [K_0]\{\delta\} = \{F_0\}\ddot{z}_g(t) \qquad (6)$$

ここに

$$
[M_0] = \begin{bmatrix}
[M] & [M]\{1\} & [M]\{h\} & 0 \\
\{1\}^T[M] & m_t & L_0^r & 0 \\
\{h\}^T[M] & L_0^r & J & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

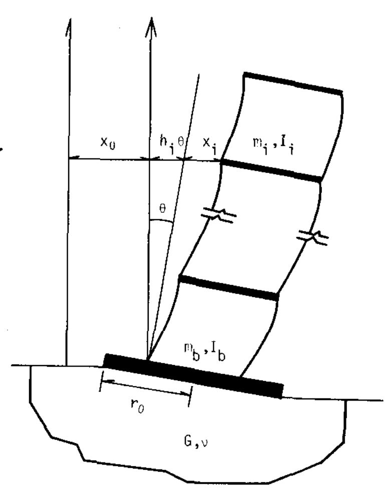

Fig. 2

$$[C_0] = \left[\begin{array}{c|ccc} [C] & & [0] & \\ \hline & b_1 \frac{r_0}{V_S} K_0 & 0 & 0 \\ [0] & 0 & b_1 b_2 \frac{r_0}{V_S} K_0 & 0 \\ & 0 & 0 & -b_1 b_2 \frac{r_0}{V_S} K_0 \end{array}\right] \qquad [K_0] = \left[\begin{array}{c|ccc} [K] & & [0] & \\ \hline & K_x & & \\ [0] & & (1-b_1)K_0 & b_1 K_0 \\ & & b_1 K_0 & -b_1 K_0 \end{array}\right]$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \{x\} \\ x_0 \\ \varphi \end{Bmatrix}, \qquad \{F_0\} = -\begin{Bmatrix} [M]\{1\} \\ m_t \\ L_0^r \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad \begin{aligned} m_t &= m_b + \{1\}^T[M]\{1\} \\ L_0^r &= \{1\}^T[M]\{h\} \\ J &= I_b + \{h\}^T[M]\{h\} + b_3\left(\frac{r_0}{V_S}\right)^2 K_0 \end{aligned}$$

[M], [C], [K] はそれぞれ基礎を固定された上部構造物の質量, 減衰および剛性マトリックスを表わす。ところで上部構造物は基礎を固定すれば一般に Classical normal mode [Φ] を有するものと考えることができる。そこで式(6)を解く場合, 座標変換により自由度を縮小する。座標変換マトリックス [V] としては次のような形を用いる。

[Φ] により応答に大きな影響を有するモードのみをとると, 全体系の自由度は小さなものになる。この変換により式(6)は次の形で表わされる。

$$[V] = \begin{bmatrix} [\Phi] & & & \\ & \frac{1}{\sqrt{m_t}} & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{J}} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$[\tilde{M}]\{\ddot{r}\} + [\tilde{C}]\{\dot{r}\} + [\tilde{K}]\{r\} = \{\tilde{F}\}\ddot{z}_g(t) \quad (7)$$

ここに $[\tilde{M}] = [V]^T[M_0][V]$, $[\tilde{C}] = [V]^T[C_0][V]$, $[\tilde{K}] = [V]^T[K_0][V]$, $\{\tilde{F}\} = [V]^T\{F_0\}$

ところで $[\tilde{M}]$ は φ に関して singular になりこのままの形で直接に応答を計算することができない。このため式(7)を解く場合式(8)を合せて自由度を倍にして解くことにする。

$$[\tilde{M}]\{\dot{r}\} - [\tilde{M}]\{\dot{r}\} = 0 \quad (8)$$

これにより φ に関して singular となる項を除くことが可能になり次のような複素固有値問題に変換される。

$$[A]\{\dot{u}\} + [B]\{u\} = \{P\}\ddot{z}_g(t) \quad (9)$$

ここに

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & [M'] \\ [\tilde{M}'] & [\tilde{C}] \end{bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} -[\tilde{M}'] & [0] \\ [0] & [\tilde{K}] \end{bmatrix}, \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\tilde{F}\} \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{r}'\} \\ \{r\} \end{Bmatrix}$$

$[\tilde{M}']$, $\{\dot{r}'\}$ はいずれも singular に対応する項を除いたことを示している。式(9)を用いると固有値解析や応答計算を行うことができる。複素固有値解析から得られる固有値を λ, 固有ベクトルを [Ψ] と表わすと式(9)は次の式に変換される。

$$\{\dot{z}\} - [\lambda]\{z\} = \{Q\}\ddot{z}_g(t) \quad (10)$$

ここに $\{u\} = [\Psi]\{z\}$, $\{Q\} = [\Psi]\{P\}$

またこの式の解は初期条件として $z_{(t=0)} = 0$ とすると次式で与えられる。

$$\{z\} = \int_0^t e^{[\lambda](t-\tau)}\{Q\}\ddot{z}_g(\tau)\,d\tau \quad (11)$$

式(11)を解き $\{z\}$ が時刻 t に対して求められると変換マトリックス [Ψ], [V] を用いて応答が計算できる。以上で地盤上に基礎をおく構造物の相互作用の定式化を外力の振動数に依存しない形で行うことができたが, 実地震入力に対しては式(11)を直接解くことにより応答を求めることができる。この場合 $\ddot{z}_g(t)$ の変化が微小時間の間で線形変化するものと考えると, 逐次応答計算ができる。一方, その振動特性を調べるため

応答共分散マトリックスを求めてみる。$\ddot{z}_g(t)$ として強度 S_0 のホワイトノイズを用いると、式(10)より次式が得られる。

$$\frac{d}{dt}[R_z]-[\lambda_\smile][R_z]-[R_z][\lambda_\smile]=2\pi S_0\{Q\}\{Q\}^T \qquad (12)$$

ここに $[R_z]=E[\{z\}\{z\}^T]$, $[R_u]=[\Phi][R_z][\Phi]$, $[R_x]=[V][R_u][V]^T$

これより定常応答は $\frac{d}{dt}[R_z]=[0]$ とおくことにより求められる。したがって座標変換により実際の応答共分散マトリックスが求められる。ところでこれまで地盤上におかれた基礎を含む構造物について考えてきたが、一般に基礎が根込れを有する場合についても同様の定式化を行なうことができる。

4. 数値計算

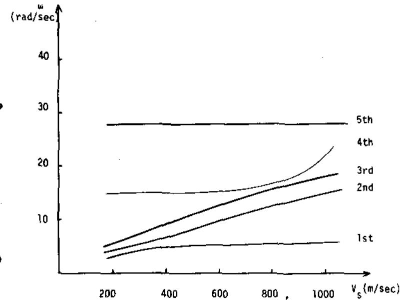

Fig.3 (a)

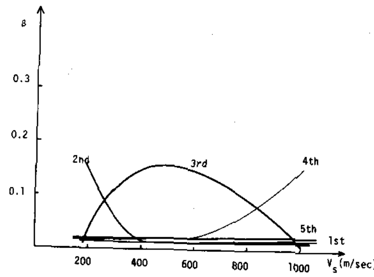

Fig. 3 (b)

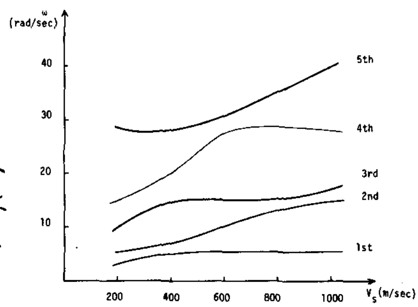

Fig. 4 (a)

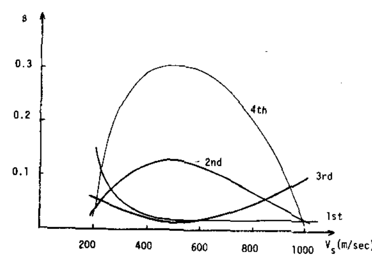

Fig. 4 (b)

地盤上にある基礎を含む構造物の動的解析を行った。前述したように地盤を簡単な振動モデルに置きかえて解析を行う場合、その剛性、減衰特性が外力の振動数の関数として与えられるが、本解析では外力の振動数に独立な振動モデルを考えてみた。Fig.3, Fig.4 はつり橋の塔－基礎系を例にとり解析したものであり地盤のせん断波速度に対する固有振動数と減衰定数の関係を示したものである。Fig.3 は基礎の根込れを考慮しない場合の結果である。上部構造物の減衰は2%と仮定したが、全体系として考えると逸散減衰が主なものであると考えられる。せん断波速度の変化にともなって各次モードの減衰も変化しているが最大で約15%の減衰を示している。減衰の変化はモード間の固有振動数の接近を境にして現われている。一方、Fig.4 は基礎の根込れを考慮した場合の結果である。減衰はせん断波速度の変化にともなって異なるが最大で約30%の値を示している。そして前と同様、減衰はモード間の固有振動数が接近するところで大きな変化を示している。そして減衰の変化の状態は最大値は異なるが根込れを考慮しない場合とよく類似していることがわかる。

したがってこのような地盤の扱いにより逸散減衰の大きさの程度を知ることができるとともに、応答に及ぼす影響についても明らかにすることができるものと思われる。

参考文献　1) A.S. Veletsos, "Basis Response Functions for Elastic Foundations", ASCE, EM2, April, 1974,　2) Y.O. Beredugo and M. Novak, "Coupled Horizontal and Rocking Vibration of Embedded Footings," Canadian Geotech. Jour. 9. 1972