

京都大学 防災研究所 正員 土岐憲三  
 京都大学 防災研究所 正員 ○三浦房紀

1. まえがき

強震加速度記録波形中にも表面波成分が明らかに認められることから、長大構造物や埋設施設の耐震性との関係において、表層地盤内での挙動が問題となる場合がある。このような問題を構造物との相互作用の観点から取り扱う場合には、有限要素法は有力な手段であるが、従来の手法では有限要素モデルの最下節点の変位を固定するため、鉛直方向の変位分布は実際の伝播波の分布とはかなり異なったものとなる。この影響を小さくするには地表面からかなり深い所まで有限要素網を設ける必要があり、計算機で数値計算を行うのに大容量を必要とする。そこで本研究では、地盤を有限要素でモデル化するに当たり、地盤を表層と基盤とに大別し、表層には長方形要素を、基盤には半無限要素<sup>1)</sup>を用いる(図1)。この半無限要素を導入することにより、表面波の鉛直方向の変位分布を忠実に再現することと、鉛直下方へ無限に広がる領域を解析の対象に組み入れることが可能となり、しかも少ない容量で詳細なモデルの解析が可能となった。ここでは、コンクリート構造物を含む表層地盤を表面波が伝播する際の表層地盤の挙動を調べる問題に対してこの手法を適用し、その有用性について検討を行った。

2. 有限要素法による地盤のモデル化

本研究においては解析の対象とする表面波をLove波に限定する。長方形要素の剛性マトリクスと質量マトリクスはLysmerら<sup>2)</sup>によって導びかれているのでここでは省略する。次に基盤を表わす半無限要素の剛性マトリクスと質量マトリクスを求めるのに、変位関数{d}を次式で与える(図2)。

$$\{d\} = \frac{1}{l} \{ (l-x)e^{-az}, xe^{-az} \} \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{ここに } a = \sqrt{k^2 - \omega^2/\beta^2} \dots\dots\dots (2)$$

$\omega$  : 円振動数,  $k$  : 波数,  $\beta$  : 基盤でのせん断波速度

要素内の変位  $\delta(x, z)$  は節点変位ベクトル  $\{\delta\} = [\delta_1, \delta_2]^T$  と変位関数を用いて、 $\delta(x, z) = [d]\{\delta\}$  で与えられる。また要素内のひずみは次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} r_{xy} \\ r_{zy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -e^{-az} & e^{-az} \\ -a(l-x)e^{-az} & -axe^{-az} \end{bmatrix} \{\delta\} = [D]\{\delta\} \dots\dots (3)$$

半無限要素の剛性マトリクスは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} [k]^e &= G_n \int_0^l \int_0^\infty [D]^T [D] dz dx \\ &= \frac{G_n}{2al} \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{3} a^2 l^2 & -1 + \frac{1}{6} a^2 l^2 \\ -1 + \frac{1}{6} a^2 l^2 & 1 + \frac{1}{3} a^2 l^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

また質量マトリクスは次式で与えられる。

$$[m]^e = \rho_n \int_0^l \int_0^\infty \{d\}^T \{d\} dz dx = \frac{\rho_n l}{12a} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

ここに  $G_n$  : 基盤のせん断弾性係数  $\rho_n$  : 基盤の密度

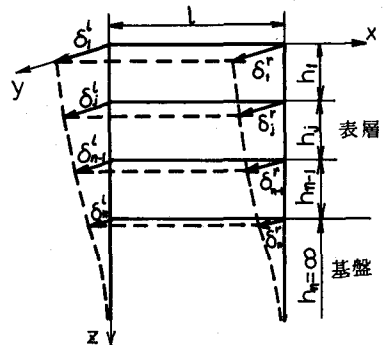


図1 水平地盤の有限要素モデル

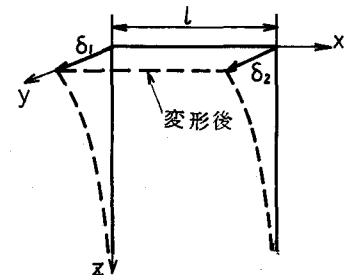


図2 半無限要素

### 3. 固有値問題

Lysmerら<sup>2)</sup>は、水平地盤モデルの最下端での節点変位を固定した有限要素モデルについて、有限要素幅 $l$ を限りなく0に近づけ、その極限において地盤モデルの自由振動を表わす方程式が、与えられた円振動数 $\omega$ に対して波数 $k$ の自乗を固有値とする固有値問題に帰結されることを示した。本研究で対象とする半無限地盤の場合にも、自由振動を表わす方程式が $k^2$ を固有値とする固有値問題に帰結されることがわかった。ここではその固有値問題を表わす式を示すとどめる。

$$([C] - k^2[B])\{u\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに  $[C] = \omega^2[M] - [A]$

$$[A] = \begin{pmatrix} \frac{G_1}{h_1} & -\frac{G_1}{h_1} & 0 & & & & 0 \\ & \frac{G_1}{h_1} + \frac{G_2}{h_2} & -\frac{G_2}{h_2} & & & & \\ & -\frac{G_{n-2}}{h_{n-2}} & \frac{G_{n-2}}{h_{n-2}} + \frac{G_{n-1}}{h_{n-1}} & -\frac{G_{n-1}}{h_{n-1}} & & & \\ & 0 & & & -\frac{G_{n-1}}{h_{n-1}} & \frac{G_{n-1}}{h_{n-1}} + a \frac{G_n}{2} & \\ 0 & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$[B] = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2h_1G_1 & h_1G_1 & 0 & & & & 0 \\ h_1G_1 & 2(h_1G_1 + h_2G_2) & h_2G_2 & & & & \\ & h_{n-2}G_{n-2} & 2(h_{n-2}G_{n-2} + h_{n-1}G_{n-1}) & h_{n-1}G_{n-1} & & & \\ 0 & 0 & h_{n-1}G_{n-1} & 2h_{n-1}G_{n-1} + \frac{3G_n}{a} & & & \\ & 2\rho_1h_1 & \rho_1h_1 & 0 & & & \\ & \rho_1h_1 & 2(\rho_1h_1 + \rho_2h_2) & \rho_2h_2 & & & 0 \\ \rho_{n-2}h_{n-2} & 2(\rho_{n-2}h_{n-2} + \rho_{n-1}h_{n-1}) & \rho_{n-1}h_{n-1} & & & & \\ 0 & 0 & & \rho_{n-1}h_{n-1} & 2\rho_{n-1}h_{n-1} + \frac{\rho_n}{a} & & \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$[M] = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2h_1G_1 & h_1G_1 & 0 & & & & 0 \\ h_1G_1 & 2(h_1G_1 + h_2G_2) & h_2G_2 & & & & \\ & h_{n-2}G_{n-2} & 2(h_{n-2}G_{n-2} + h_{n-1}G_{n-1}) & h_{n-1}G_{n-1} & & & \\ 0 & 0 & h_{n-1}G_{n-1} & 2h_{n-1}G_{n-1} + \frac{3G_n}{a} & & & \\ & 2\rho_1h_1 & \rho_1h_1 & 0 & & & \\ & \rho_1h_1 & 2(\rho_1h_1 + \rho_2h_2) & \rho_2h_2 & & & 0 \\ \rho_{n-2}h_{n-2} & 2(\rho_{n-2}h_{n-2} + \rho_{n-1}h_{n-1}) & \rho_{n-1}h_{n-1} & & & & \\ 0 & 0 & & \rho_{n-1}h_{n-1} & 2\rho_{n-1}h_{n-1} + \frac{\rho_n}{a} & & \end{pmatrix} \quad (9)$$

式中、 $G_j, \rho_j (j=1, 2, \dots, n-1)$  は表層中、第 $j$ 番目の要素のせん断弾性係数および密度である(図1)。マトリクス  $[A], [B], [M]$  の第 $(n, n)$ 要素の第2項に基盤の影響が入っている。またこれらのマトリクスは(2)式で与えられる $a$ の関数であるから、(6)式を解くにはくり返し計算の必要がある。

### 4. 境界条件と運動方程式

本研究において用いる有限要素モデルは鉛直方向については無限下方まで解析領域に入っているため、この方向についてはもはや境界条件を設定する必要はないが、側方については考えなければならない。

側方の境界条件は、境界上の節点変位によって生じるせん断力を、等価節点力として運動方程式の外力項に加えることによって満足される。この等価節点力のうち、表層のものについてはLysmerらによって求められたものと同様であり、基盤については相反作用の定理から、基盤内に生じる全せん断力の1/2を等価節点力として半無限要素の節点に作用されればよいという結論を得た。

図3において、i) L領域からI領域へ波が入射する場合、ii) 反射波または透過波がI領域からL領域へ進む場合、iii) R領域からI領域へ入射する場合、iv) 反射波または透過波がI領域からR領域へ進む場合の等価節点力ベクトルをそれぞれ  $\{P\}_L^R, \{P\}_L^L, \{P\}_R^R, \{P\}_R^L$  とすると、これらは次式で表わせる。

$$i) \quad \{P\}_L^R = i [B]_L [V]_L [H]_L [V]_L^T [B]_L \{U\}_L^R \equiv [R]_L^R \{U\}_L^R \quad \dots\dots\dots (10a)$$

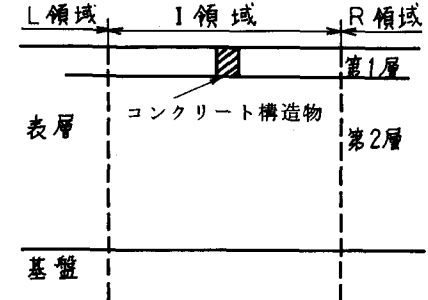


図3 解析の対象とする地盤モデル

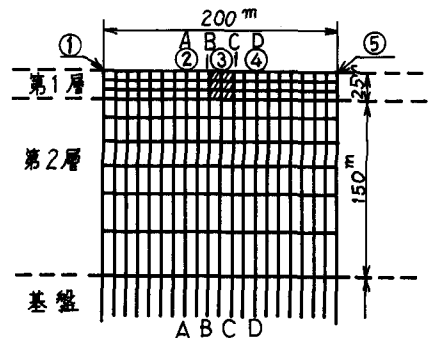


図4 有限要素モデル

$$ii) \quad \{P\}_L^L = - [R]_L^R \{U\}_L^L \quad \dots\dots\dots (10b)$$

$$iii) \quad \{P\}_R^L = i [B]_R [V]_R [H]_R [V]_R^T [B]_R \{U\}_R^L \equiv [R]_R^L \{U\}_R^L \quad \dots\dots\dots (10c)$$

$$iv) \quad \{P\}_R^R = - [R]_R^L \{U\}_R^R \quad \dots\dots\dots (10d)$$

ここに  $[V]$  は(6)式の固有値問題を解くことによって得られるモーダルマトリクス、 $[H]$  はその第  $(j, j)$  要素に  $k'_j$  を持つ対角マトリクス。ただし  $k_j^2 > 0$  のとき  $k'_j = k_j$ 、 $k_j^2 < 0$  のとき  $k'_j = -i \sqrt{-k_j^2}$ 。下付き添字の L, R は L 領域, R 領域を意味し、上付き添字の L, R はそれぞれ波の進行方向が図3の左, 右であることを意味し、T は転置を示す。

I 領域全体の剛性マトリクスを  $[K]_I$ 、質量マトリクスを  $[M]_I$ 、節点変位ベクトルを  $\{U\}_I$ 、強制外力ベクトルを  $\{P\}_I$  とすると、I 領域に対する運動方程式は次式で表わせる。

$$([K]_I - \omega^2 [M]_I) \{U\}_I = \{P\}_I + \{P\}_L^R + \{P\}_L^L + \{P\}_R^L + \{P\}_R^R \dots\dots (11)$$

ところで、 $\{U\}_L^R$  は L 領域から入射する波による左側境界上の節点変位であり、 $\{U\}_L^L$  は L 領域を左へ進む波による左側境界上の節点変位であるから  $\{U\}_L^R + \{U\}_L^L$  は  $\{U\}_I$  の最初の  $n$  個の要素に等しい。また同様な考えから  $\{U\}_R^R + \{U\}_R^L$  は  $\{U\}_I$  の最後の  $n$  個の要素に等しい。したがって(11)式は(10)式を用いて次のように変形でき、これが求める運動方程式である。

$$([K]_I - \omega^2 [M]_I + [R]_L^R + [R]_R^L) \{U\}_I = 2 [R]_L^R \{U\}_L^R + 2 [R]_R^L \{U\}_R^L + \{P\}_I \quad \dots\dots\dots (12)$$

表1 地盤の諸定数

場合	分類	層厚 m	密度 kg sec <sup>2</sup> /m <sup>4</sup>	せん断弾性係数 kg/m <sup>2</sup>	せん断波速度 m/sec
1	表層 第1層	25	200	4.50 × 10 <sup>6</sup>	150
	表層 第2層	150	210	1.89 × 10 <sup>7</sup>	300
	基盤	∞	220	7.92 × 10 <sup>7</sup>	600
2	表層 第1層	25	200	2.00 × 10 <sup>6</sup>	100
	表層 第2層	150	210	1.21 × 10 <sup>7</sup>	240
	基盤	∞	220	5.50 × 10 <sup>7</sup>	500
3	表層	175	210	1.21 × 10 <sup>7</sup>	240
	基盤	∞	220	5.50 × 10 <sup>7</sup>	500
コンクリート	幅×深さ	20×25	250	6.50 × 10 <sup>8</sup>	1610

5. 解析結果と考察

図3に示すようなコンクリート構造物を含む水平地盤モデルについて、地盤の弾性定数を表1に示すように3通り仮定して解析を試みた。この場合入射波として、L 領域から Love 波の基本モードを入射させた。したがって  $\{U\}_L^R$  は Love 波の基本モードであり、 $\{U\}_R^L = \{P\}_I = 0$  である。この基本モードは地表での振幅を1に正規化してある。図4は図3の地盤モデルの有限要素モデルである。

5-1 周波数応答倍率と波動エネルギー

図4に示してある点①～⑤の応答倍率を図5に示す。図中、点①の応答曲線は周波数が高くなるにつれて入射振幅より大きくなる場合のあることを示している。これは構造物からの反射波によるもので、入射波からみて構造物の前面での地盤の挙動は波長によって大きく変動されることを意味している。コンクリート構造物の変位が固定され、波が完全反射されれば、この曲線の谷は0に、峰は2.0になるはずであるが、そうならないのは構造物に変位が生じ、あるいは構造物底面の下を経て伝播する波動成分があることによる。

点②の曲線は点①のそれに比べ不規則である。これは点②の方が構造物に近いので、構造物の挙動の影響を強く受けるためと考えられる。すなわち、構造物との相互作用のためであると考えられる。

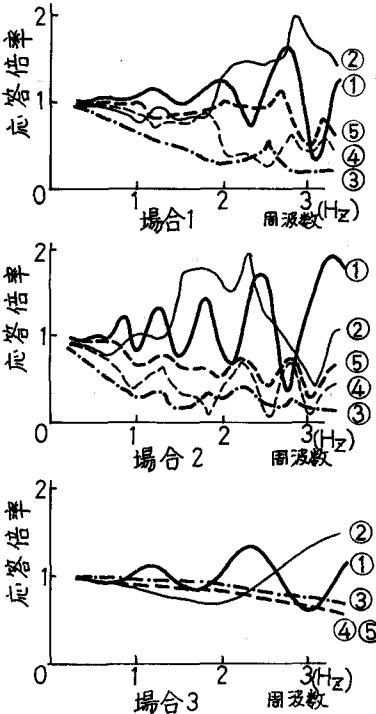


図5 周波数応答倍率

次に点③, ④, ⑤に注目すると, 場合1と場合2では, ほぼ③→④→⑤の順で応答倍率が大きくなっているのに反し, 場合3では, ③の応答倍率が④, ⑤のそれよりもやや大きくなっている。このことは, 場合1, 場合2においては, 構造物によって押えられた振幅が構造物から遠ざかるにつれて回復されていることを意味し, これは第2層を伝播する波動が第1層にエネルギーを供給するためと考えられる。場合3においては, 表層は構造物よりはるかに大きな層厚をもつ一層のみであるから場合1, 場合2のような現象は生ぜず, 構造物とほぼ同程度の振幅で波が伝播してゆくものと考えられる。

次にLysmer<sup>2)</sup>によって導びかれた式を用いて, I領域を透過する波動エネルギーと反射される波動エネルギーの分担率を基本モードによるものと, 高次のモードによるものとに分けて図6に示した。この図より明らかなように周波数が高くなるにつれ反射エネルギーが増大している。図6中, 場合1と場合2では反射波の割合が急激に増加している周波数が2箇所あるが, これらの周波数はいずれも図5中, 点②の応答倍率が急増している周波数と一致している。一方, これらの周波数においても点①の曲線は急激な変化を呈しておらず, このことより反射波による影響は構造物に近い所ほど大きいことがわかる。

#### 5-2 コンクリート構造物周辺の鉛直方向の変位分布

周波数が2.0Hzにおける構造物周辺の鉛直方向の変位分布を, 複素振幅とその絶対値を用いて図7に示す。図4に断面A-A~D-Dの位置を示す。

場合1, 場合2では第1層より第2層の方が入射波に比べ大きく増幅されている。これは第1層を伝播していた波動エネルギーが第2層に移動するためと考えられ, 5-1で述べたことを裏づけている。いずれの場合も構造物の直下での変位が急変しており, この領域でせん断ひずみが急激に増加することを意味している。またA-A断面では位相のずれが非常に大きく, これは明らかに反射波の影響を受けているものと考えられる。

最後に, 図5, 図6と図7の絶対値において, 場合1と場合2は同様の傾向を示しているが, 場合3はそれらとは異なった傾向を示している。このことは, 地表付近の地盤の挙動は地盤の地下構造の影響を強く受けることを意味するものである。

#### ○参考文献

- 1) 川原ら;有限要素法による動的解析の一方法, 土木学会第29回年次学術講演概要集 第1部 I-56.
- 2) J. Lysmer, G. Waas; Shear Waves in Plane Infinite Structures, A.S.C.E. EM1, pp. 88~105, Feb. 1972.

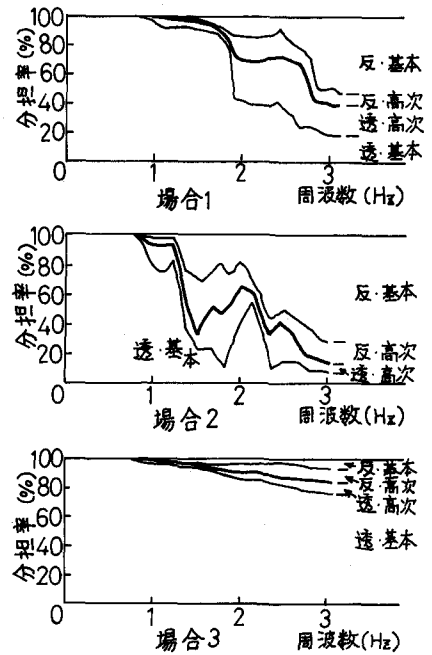


図6 エネルギーの分担率

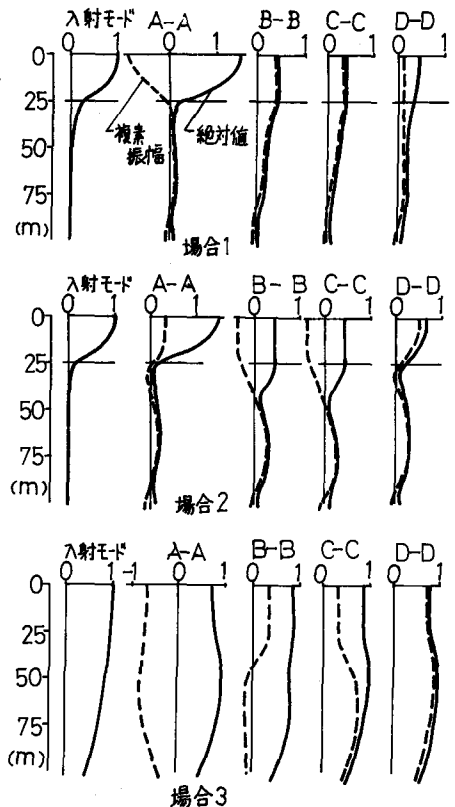


図7 鉛直方向の変位分布