

## 壁体に作用する地震時土圧

京都大学防災研究所 柴田 徹  
 京都大学防災研究所 ○佐藤忠信  
 住友建設株式会社 森田雄三

### 1. まえがき

本研究は、有限要素法を用いて構造物に作用する地震時土圧ならびに水圧の動的挙動、特に定常周波数特性を明らかにするための解析手法について考察を加えたものである。まず土の動的な非線形性が周波数特性におよぼす影響を調べるために、非線形振動系の定常応答を求めるための逐次近似手法を示し、その数値計算を行なう。つぎに、土を流体で飽和された多孔質弾性体と考え、このような物体からなる振動系に有限要素法を適用するための変分原理について述べ、2次元問題の解析に必要基礎式を誘導する。なお若干の数値計算結果も同時に示した。

### 2 地盤の非線形挙動を考慮した解析

普通に要素分割された系の節点に周期的な強制力が作用している場合の振動方程式は次式となる。

$$[-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K]] \{\delta_0\} = \{P_0\} \quad (1)$$

ここに、 $[M]$ は質量マトリックス、 $[C]$ は粘性減衰マトリックス、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $\{\delta_0\}$ は節点の変位振幅ベクトル、 $\{P_0\}$ は節点に作用する強制力の振幅より求まるベクトル、 $\omega$ は円振動数である。いま、 $[C]$ ならびに $[K]$ が $\{\delta_0\}$ の関数になっている場合を考える。弾性係数や減衰定数がひずみ振幅の関数として表わされているような場合でも、要素内のひずみ振幅は $\{\delta_0\}$ によって表現されるから、節点変位の大きさにより $[C]$ や $[K]$ が変化するようになる。この場合式(1)は次式となる。

$$[-\omega^2 [M] + i\omega [C(\{\delta_0\})] + [K(\{\delta_0\})]] \{\delta_0\} = \{P_0\} \quad (2)$$

式(2)は、非線形振動の方程式となり、一般的に解法はないが、式(2)に収束する $\{\delta_0\}$ のベクトル列、 $\{\delta_0\}_1, \{\delta_0\}_2, \dots, \{\delta_0\}_n, \dots$ を考え以下のような繰り返し計算を行なうことにより、式(2)の解を求める。<sup>1)</sup>

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [-\omega^2 [M] + i\omega [C(\{\delta_0\}_{n-1})] + [K(\{\delta_0\}_{n-1})]] \{\delta_0\}_n = \{P_0\} \quad (3)$$

2.1 土の動的応力-ひずみ関係 : 以上のような解法で非線形振動応答を求めるわけであるが、この場合 $[C(\{\delta_0\})]$ 、 $[K(\{\delta_0\})]$ の形を決めるのは、繰り返しひずみ試験結果より求まる土の弾性係数とひずみ振幅の関係ならびに減衰定数とひずみ振幅の関係である。土の動的な応力-ひずみ関係式としては Hardin 等が提案した<sup>2)</sup>双曲形の関係式を用いることにする。この場合、ある一定の繰り返しせん断ひずみ振幅  $\gamma$  に対応するせん断弾性係数  $\mu$  ならびに減衰定数  $\beta$  は次式のように与えられる。

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + \alpha |\gamma|} \quad (4), \quad \beta = \frac{\alpha |\gamma|}{1 + \alpha |\gamma|} \beta_m \quad (5)$$

ここに、 $\alpha$ は土の動的な非線形強度を表わすパラメータ、 $\mu_0$ は初期せん断弾性係数であり、 $\beta_m$ はひずみが非常に大きくなったときの土の減衰定数を表わしている。

式(4)、(5)より $[C]$ 、 $[K]$ を決めるためには動的ポアソン比ならびに体積粘性係数 $(\lambda + 2\mu)$

とせん断粘性係数 ( $\mu'$ ) の比が地盤内に発生するひずみによってどのように変化するかが明らかに成  
 っているならば成り立ちが、これらの性状はまだほとんど説明されておらず、ここでは一定値を  
 取るものとし、動的ポアソン比は 0.4 ,  $\lambda'/\mu'$  は 4 として解析を行なった。

2.2 数値計算例 : 図-1 に示したような要素分割のモデルを考  
 へ、式 (2) の解を求めた。定常振動解を求めろのが目的であるから、 $\{P_0\}$   
 は質量に比例した力が各節点に作用するものとした。計算に用いたヤング率  
 は  $1500 \text{ t/m}^2$  とし、臨界減衰は鉛直変位を拘束した弾性解の 1 次モードに  
 対応するものを使用した。

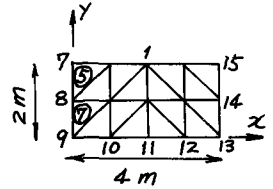


図-1 解析モデル

図-2 は入力加速度が  $100 \text{ gal}$  のとき、土の動的非線形強度を表すパラ  
 $\alpha$  の大きさによって節点 1 の水平変位の周波数特性がどのように変  
 化するがを示したものである。軟化

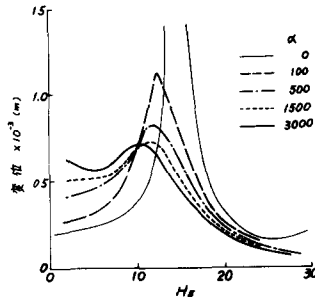


図-2 節点 1 の変位 ( $\lambda$  が  $100 \text{ gal}$ )

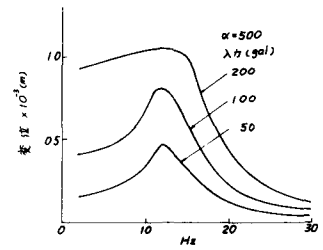


図-3 節点 1 の変位 ( $\alpha=500$ )

形ばね特性をもつ系の振動特性であ  
 る共振点の低周波移行が明らかであ  
 る。また、変位振幅は  $\alpha$  が大きくな  
 るほど減少し、共振点より低周波側  
 での共振曲線の立ち上がりもゆるや  
 かに成ってくる。図-3 は入力の大  
 きさによって、節点 1 の水平変位の  
 周波数特性がどのように変化するが  
 を示したものである。変位の応答倍  
 率は入力の加速度振幅が大きくなる  
 ほど小さくなる傾向が明らかである。  
 また共振点にいたるまでの曲線の立  
 ち上がりもゆるやかに成り、その値  
 もかなり大きくなって来る。成り入  
 力大きさによって共振点はあまり  
 変動しないこともわかる。

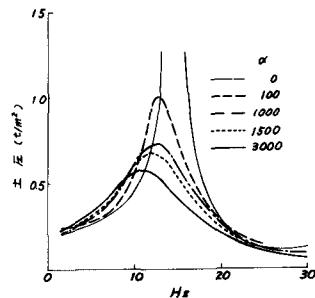


図-4 要素⑤の土圧 ( $\lambda$  が  $100 \text{ gal}$ )

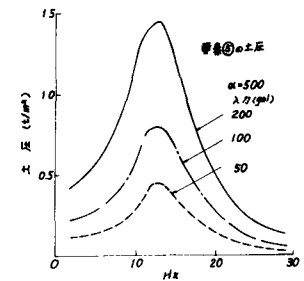


図-5 要素⑤の土圧 ( $\alpha=500$ )

図-4 は要素⑤の土圧の周波数特性が  $\alpha$  の値に  
 よってどのように変化するがを示したものである。  
 $\alpha$  が大きくなるにつれて土圧の共振点も低周波側へ  
 移行していくことがわかる。図-5 は入力の大  
 きさによる土圧の周波数特性の変化を示したものである。  
 入力が大きくなるほど応答倍率が減少する。また入  
 力大きさによって共振点はあまり変動しないこと  
 もわかる。図-6 は 0, 6, 12, 18, 24, 28 Hz  
 における土圧の分布形を示したものである。  $\alpha$  が

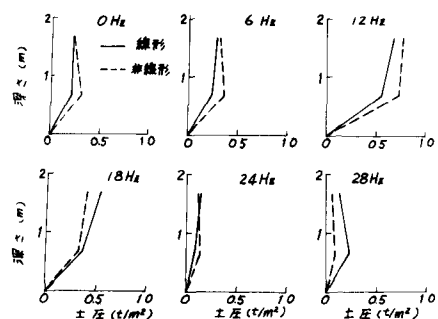


図-6 土圧分布 (線形解と非線形解の比較)

500 の場合には、12 Hz 程度までは非線形解の土圧が大きいことがわかる。

### 3. 地盤を飽和した多孔質物体と考えた場合の解析

ここでは、Biot 型<sup>3)</sup>の多孔質物体を考えることにする。この場合、運動エネルギー ( $T$ )、ひずみエネルギー ( $W$ ) は総和規約を用いて次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho_e \dot{u}_i \dot{u}_i + \frac{1}{2} \rho_f \dot{v}_i \dot{v}_i + \rho_c \dot{u}_i \dot{v}_i \\ W &= D_{ik} \varepsilon_i \varepsilon_k + \frac{1}{2} R e + Q_i \varepsilon_i e \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

ここで、 $\rho_e, \rho_f$  は弾性相および流体相の密度、 $\dot{u}_i, \dot{v}_i$  は弾性相および流体相の速度ベクトルの成分、 $\varepsilon_i$  は弾性相のひずみベクトルの成分、 $e$  は流体相の体積ひずみ、 $R$  は流体相の体積弾性率、 $D_{ik}$  は弾性相の弾性係数マトリックスの成分、 $Q_i$  は応力のカップリングを表わすベクトル、 $\rho_c$  は質量のカップリングを表わすベクトルである。 $u_i, v_i, \varepsilon_i, e$  は節点変位と次式で関係づけられる。

$$u_i = N_i^e \delta_k^e, \quad v_i = N_i^f \delta_k^f, \quad \varepsilon_i = B_{ik}^e \delta_k^e, \quad e = B_i^f \delta_i^f \quad (7)$$

ここで、右肩にある添字  $e, f$  はそれぞれ弾性相、流体相についての区別をつけるためのものである。

多孔質物体においては、弾性相と流体相の間に相対的の変形が生ずるから、このためエネルギーの消散が起る。この大きさは次式のように表わされる。

$$\eta_d = \frac{1}{2} \beta (\dot{u}_i - \dot{v}_i)(\dot{u}_i - \dot{v}_i) \quad (8)$$

なお、 $\beta$  はダルミー型の減衰定数であり、透水係数  $k$  との間には  $\beta = \rho_f g n/k$  なる関係がある。ここで  $n$  は間げ率であり、 $g$  は重力の加速度である。

減衰を考慮した場合のラグランジアン  $L$  は次式で与えられる。

$$L = T - W + \int_0^t (\eta_d + \eta_v) dt \quad (10)$$

ここで、 $\eta_v$  は弾性相の粘性減衰によるエネルギー散散を表わす関数で、粘性係数マトリックスの成分を  $D_{ik}^v$  とすれば、次式で与えられる。

$$\eta_v = \frac{1}{2} D_{ik}^v \dot{\varepsilon}_i \dot{\varepsilon}_k \quad (11)$$

式 (10) に変分原理を適用すると弾性相と流体相の各々について次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \int_1^2 \int_V \left\{ \frac{\partial L}{\partial \delta_k^e} d(\delta_k^e) + \frac{\partial L}{\partial \delta_k^f} d(\delta_k^f) \right\} du dt &= 0 \quad (\text{弾性相について}) \\ \int_1^2 \int_V \left\{ \frac{\partial L}{\partial \delta_k^f} d(\delta_k^f) + \frac{\partial L}{\partial \delta_k^e} d(\delta_k^e) \right\} du dt &= 0 \quad (\text{流体相について}) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

式 (7) を式 (6), (8), (11) に代入し、式 (12), (13) を展開すると次式をうる。

$$\left[ \begin{array}{cc} [M_e] & [M_{ef}] \\ [M_{ef}] & [M_f] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\ddot{\delta}^e\} \\ \{\ddot{\delta}^f\} \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{cc} [C_e] & -[C_{ef}] \\ -[C_{ef}] & [C_f] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\dot{\delta}^e\} \\ \{\dot{\delta}^f\} \end{array} \right\} + \left[ \begin{array}{cc} [K_e] & [K_{ef}] \\ [K_{ef}] & [K_f] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{\delta^e\} \\ \{\delta^f\} \end{array} \right\} = \{0\} \quad (13)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} [M_e] &= \int_V [N^e]^T \rho_e [N^e] dV, & [M_{ef}] &= \int_V [N^e]^T \rho_c [N^f] dV, & [M_f] &= \int_V [N^f]^T \rho_f [N^f] dV \\ [C_e] &= \int_V [B^e]^T [D^v] [B^e] dV + \int_V [N^e]^T \beta [N^e] dV, & [C_{ef}] &= \int_V [N^e]^T \beta [N^f] dV \\ [C_f] &= \int_V [N^f]^T \beta [N^f] dV, & [K_e] &= \int_V [B^e]^T [D] [B^e] dV \\ [K_{ef}] &= \int_V \{Q\}^T [B^e] \{B^f\} dV, & [K_f] &= \int_V \{B^f\}^T R \{B^f\} dV \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

り、新たに、式(13)の各項の係数マトリックスを  $[M]$ ,  $[C]$ ,  $[K]$  でおきかえ、 $\{\delta\} = \{\delta_{el}, \delta_{fl}\}^T$  とすれば、式(13)は次式のようになる。

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = \{f_0\} \quad (15)$$

節点に同期的な外力が作用している場合には式(1)と同様形式となる。すなわち

$$[-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]]\{\delta_0\} = \{P_0\} \quad (16)$$

**3.1 数値計算例** : 図-1 に示したような要素分割でもって、式(16)の解を求める。用いた弾性諸定数は、ヤング率  $1500t/m^2$ 、ポアソン比  $0.4$ 、 $\rho_e = 1.7t/m^3$ 、 $\rho_f = 1.0t/m^3$ 、 $\rho_c = 0$ 、 $Q = 0$ 、 $R = 2.137 \times 10^7 t/m^2$  である。なお流体相の境界条件としては、節点 7, 8, 15, 14 で水平変位を拘束し鉛直変位をゆるした。節点

10, 11, 12 では鉛直変位を拘束し水平変位をゆるした。9, 13 の節点では全変位を拘束するようにした。

図-7 は弾性相の節点 1 における水平変位の同波数特性を示している。 $\beta$  の値が小さくなると弾性体のみの場合の同波数特性に近ずき、 $\beta$  が大きくなるにつれて共振点は低同波数側へ移行する。

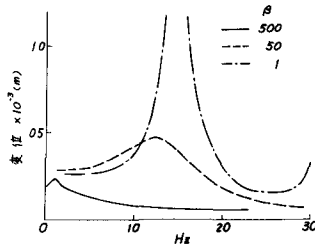


図-7 節点1の弾性相の変位 (入力 100gal)

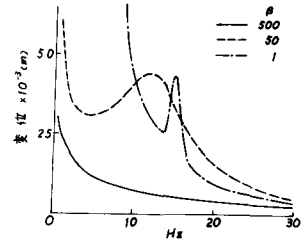


図-8 節点1の流体相の変位 (入力 100gal)

図-8 は流体相の節点 1 の変位の同波数特性を示したものである。この場合は  $0Hz$  のところから応答が非常に大きくなるが、これはダルミー型の低抵抗がきかなくなるためである。同波数が増加するとダルミー型抵抗が大きくなり流体の変位振幅が小さくなっていく。

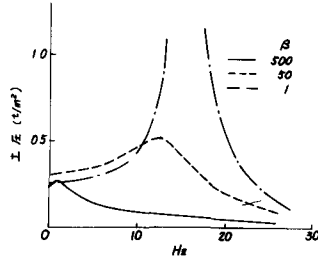


図-9 要素⑤の土圧 (入力 100gal)

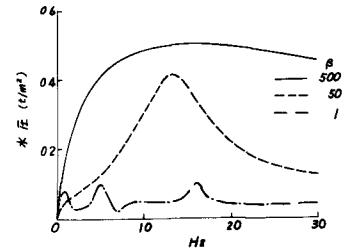


図-10 要素⑦の水圧 (入力 100gal)

図-9 は要素⑤での土圧の同波数特性を示したものである。 $\beta$  が大きくなるにつれて共振点が低同波数側へ移行することがわかる。図-10 は要素⑦の水圧の同波数特性を示したものである。

図-11 は  $13Hz$  における土圧と水圧の分布を示したものである。土圧の分布は表面で最大であり下部に行くほど小さくなるが、水圧の分布は上部で小さく、下部に行くほど大きくなることを示している。

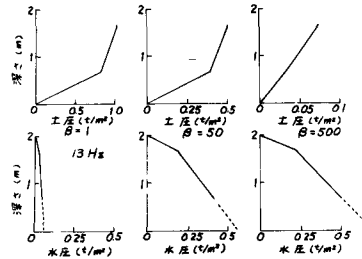


図-11 土圧と水圧の分布

なお  $\beta$  の値が大きくなるにつれて土圧は小さくなり、水圧が大きくなっていくことが判明する。

文献 1) 後藤他「数値解析」17B, 1974, 2) Hardin, et al. : Proc ASCE, SM7, 1972, 3) Biot : J. Acous. Sci. Amer, vol28, No 2, 1956