

構造物の不規則地震応答に関する一考察

— 応答包絡線による最大応答の推定法 —

京師大学工学部 正会員 亀田弘行

1. まえがき

不規則地震動に対する構造物の応答特性を明かにし、地震動のランダム性をも定量的に考慮した耐震設計法を確立することは重要と考えられる。著者はそのための有力な指標として、最大応答の確率分布を解析的に求め、これを用いて、不規則地震動に対する構造物の最大応答の推定法を論じた¹⁾。その中で、最大応答の確率分布を求める方法として、純出生過程による解法と応答包絡線の極値による解法の二種の近似解法を考案し、それらを適宜選択適用することにより、かなり広いパラメータ領域に最大地震応答を推定しうることを確かめた。その後それらとは異なる観点から、非定常地震応答の包絡線の最大値の問題と解析した結果、構造物の最大地震応答を比較的簡単に求められ、かつ少なくとも平均最大応答を扱う限りはかなり良好な精度を有することがわかったので、その結果を報告する。

2. 基礎的考察

不規則外力に対する構造物の応答 $y(t)$ は、多くの場合、図-1のようにゆるやかに変動する包絡線 $W(t)$ を有し、固有周期 T_n に近い卓越周期で正弦波的に振動する狭帯域の確率過程とみなすことができる。非定常な不規則地震動に対する構造物の最大応答を取り扱う際に、従来は $|y(t)|$ の極値分布の問題、または $|y(t)|$ が任意の応答レベル Y を超える問題として不規則振動論が応用されることが多かった。ところが、

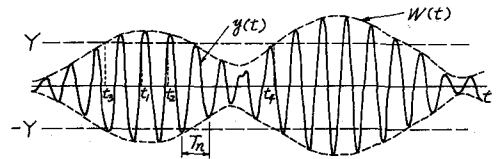


図-1 構造物の応答および包絡線の概念図

これらの方法で問題を解く場合、相異なる時刻(たとえば t_1, t_2)での $y(t)$ の間に関係があることが解の精度を悪化させる原因となり、この相関を十分に考慮しようとすると、ぼう大な数値計算が必要となり、これにも限度がある²⁾。このことは、構造物の応答が強い周期性を持つことによる当然の帰結である。一方 $y(t)$ の包絡線 $W(t)$ の変動が $y(t)$ に比較してゆるやかであることから、 $W(t)$ の最大値を $|y(t)|$ の最大値としてよいと考えられるが、この場合上記のような応答間の相関は、 $y(t)$ の場合よりはるかに隔った時刻(たとえば t_1, t_2)間でのみ問題となる。しかも後述のように、これら2時刻の間隔が増大すると、 $W(t)$ の相関は $y(t)$ の場合と同程度の割合に減少するから、 $W(t)$ の最大値の確率分布を求め、これを $|y(t)|$ の最大値の確率分布とみなす方が精度が良くなる場合があると期待される。

以上のような観点から、以下において、包絡線 $W(t)$ の最大値の確率分布を解析する。

3. 応答包絡線 $W(t)$ の基本性質

時刻 t における $y(t)$ の標準偏差を $\sigma_y(t)$ として、 $y(t)$ を次式のようにベクトル表示する。

$$y(t) = \delta_y(t) \int_0^\infty \cos(\omega t - \varphi(\omega)) dC(\omega) = \delta_y(t) (I_c(t) \cos \omega_n t - I_s(t) \sin \omega_n t) \quad \text{----- (1)}$$

ただし, $I_c(t) = \int_0^\infty \cos(\omega t - \omega_n t - \varphi(\omega)) dC(\omega)$, $I_s(t) = \int_0^\infty \sin(\omega t - \omega_n t - \varphi(\omega)) dC(\omega)$ ----- (2)

ここに, $dC(\omega)$, $\varphi(\omega)$ は, それぞれ振動数 ω なる雑波成分のランダム振幅およびランダム位相角で, $dC(\omega)$ は平均値ゼロで分散 $2 S_r(\omega) d\omega$ なる正規分布, $\varphi(\omega)$ は $0 \sim 2\pi$ で一様分布を持つものとする。ただし, $S_r(\omega)$ は $y(t)/\delta_y(t)$ のパワースペクトル密度である。さらに ω_n を構造物の固有円振動数とすると, $I_c(t)$, $I_s(t)$ はゆるやかに変動する互に独立な正規定常過程となる。

次に, 前記 2. の議論から, 応答 $y(t)$ を次のように表わす。

$$y(t) = W(t) \cos(\omega_n t + \phi(t)) = \delta_y(t) R(t) \cos(\omega_n t + \phi(t)) \quad \text{----- (3)}$$

ただし, $W(t)$ は図-1 の応答包絡線, $R(t)$ は $W(t)$ を $\delta_y(t)$ で除して定常過剰化した包絡線, $\phi(t)$ はゆるやかに変動する位相角で, $\varphi(\omega)$ の性質から, やはり $0 \sim 2\pi$ で一様分布を持つ。式 (2), (3) から次式をうる。

$$\sqrt{I_c^2(t) + I_s^2(t)} = R(t), \quad \phi(t) = \tan^{-1}(I_s(t)/I_c(t))$$

$I_c(t)$, $I_s(t)$ に関する上記の特性を用いると, $I_c(t_1)$, $I_c(t_2)$, $I_s(t_1)$, $I_s(t_2)$ の間の相関係数は次式で与えられる³⁾ (ただし, t_1 と t_2 は $I_c(t_1)$ と $I_s(t_2)$ の相関係数を $\rho_{cs}(t_1, t_2)$ などとする)。

$$\left. \begin{aligned} \rho_{cc}(t_1, t_2) &= \rho_{ss}(t_1, t_2) = R_c(t_2 - t_1), \quad \rho_{cs}(t_1, t_2) = -\rho_{cs}(t_2, t_1) = R_s(t_2 - t_1) \\ R_c(\tau) &= \int_0^\infty \cos(\omega - \omega_n) \tau S_r(\omega) d\omega, \quad R_s(\tau) = \int_0^\infty \sin(\omega - \omega_n) \tau S_r(\omega) d\omega \end{aligned} \right\} \quad \text{----- (4)}$$

ここで構造物の減衰定数を h_n とし,

$$S_r(\omega) = \frac{4h_n}{\pi \omega_n} \frac{1}{\{1 - (\omega/\omega_n)^2\}^2 + 4h_n^2 (\omega/\omega_n)^2} \quad \text{----- (5)}$$

とした場合の $R_c(\tau)$, $R_s(\tau)$ を計算した結果が図-2 である。同図において, $R_s(\tau)$ は $\tau > T_n$ でほとんどゼロになり, $R_c(\tau)$ は次式でよく近似できる。

$$R_c(\tau) \cong e^{-h_n \omega_n \tau} (1 + h_n e^{-\omega_n \tau} \sin \omega_n \tau) \quad \text{----- (6)}$$

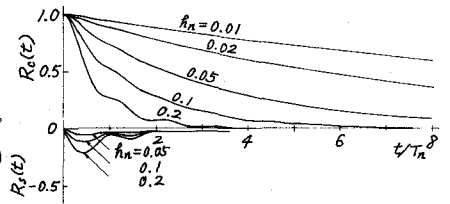


図-2 $I_c(t)$, $I_s(t)$ の相関特性

式 (6) の h_n は表-1 で与えられる定数である。また, 不規則外力に対する構造物の定常応答の自己相関関数も $e^{-h_n \omega_n \tau}$ に比例して減少することから, $I_c(t)$, $I_s(t)$, したがって $W(t)$ および $R(t)$ の相関特性は $y(t)$ と同程度と考えられ, 応答包絡線から最大応答を論じようとする前記 2. の議論の根拠が与えられる。

4. 応答包絡線 $W(t)$ と位相角 $\phi(t)$ およびそれらの変化率の同時確率密度

式 (1) で表わした応答量 $y(t)$ に関連して, 次のような確率過程を考える。

h_n	ξ
0.01	0.2655
0.02	0.2555
0.05	0.2259
0.1	0.1776
0.2	0.0824

表-1 パラメータ ξ

$$\left. \begin{aligned} y_1(t) &= \delta_y(t) I_c(t), & y_2(t) &= \frac{d}{dt} (\delta_y(t) I_s(t)) = \dot{\delta}_y(t) I_s(t) + \delta_y(t) \dot{I}_s(t) \\ y_3(t) &= \delta_y(t) I_s(t), & y_4(t) &= \frac{d}{dt} (\delta_y(t) I_c(t)) = \dot{\delta}_y(t) I_c(t) + \delta_y(t) \dot{I}_c(t) \end{aligned} \right\} \text{----- (7)}$$

前記3. で論じられた $I_c(t), I_s(t)$ の特性を用いると, $y_1 \sim y_4$ の分散およびそれらの間の共分散は以下のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \delta_{y_1}^2 &= \delta_{y_3}^2 = \delta_y^2(t), & \delta_{y_2}^2 &= \delta_{y_4}^2 = \omega_n^2 \beta_2 \delta_y^2(t) + \dot{\delta}_y^2(t) \\ \delta_{y_1} \delta_{y_2} \rho_{y_1 y_2} &= -\delta_{y_3} \delta_{y_4} \rho_{y_3 y_4} = \omega_n \beta_1 \dot{\delta}_y^2(t), & \delta_{y_1} \delta_{y_4} \rho_{y_1 y_4} - \delta_{y_2} \delta_{y_3} \rho_{y_2 y_3} &= \dot{\delta}_y(t) \delta_y(t) \\ \delta_{y_1} \delta_{y_3} \rho_{y_1 y_3} &= \delta_{y_2} \delta_{y_4} \rho_{y_2 y_4} = 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (8)}$$

ただし,

$$\beta_k = \int_0^\infty \left(\frac{\omega}{\omega_n} - 1 \right)^k S_r(\omega) d\omega; \quad k=1, 2, \quad \int_0^\infty S_r(\omega) d\omega = 1$$

これらの結果から $y_1 \sim y_4$ の共分散マトリックスを構成してその逆行列を求め, 4次元正規確率密度に代入することによって, $y_1 \sim y_4$ の同時確率密度関数は以下のように求められる。

$$f_n(y_1, y_2, y_3, y_4) = \frac{1}{4\pi^2 \omega_n^2 B \delta_y^4} \exp\left(-\frac{Q}{2}\right) \text{----- (9)}$$

$$Q = \frac{1}{B \delta_y^2} \left\{ (\beta_2 + \lambda_1^2)(y_1^2 + y_3^2) + \frac{1}{\omega_n^2}(y_2^2 + y_4^2) - \frac{2\beta_1}{\omega_n}(y_1 y_2 - y_3 y_4) - \frac{2\lambda_1}{\omega_n}(y_1 y_4 + y_2 y_3) \right\}$$

$$B = \beta_2 - \beta_1^2, \quad \lambda_1 = \lambda_1(t) = \dot{\delta}_y(t) / (\omega_n \delta_y(t))$$

次に, 式(1), (3), (7)より,

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= W(t) \cos \phi(t), & y_2 &= \dot{W}(t) \sin \phi(t) + W(t) \cos \phi(t) \cdot \dot{\phi}(t) \\ y_3 &= W(t) \sin \phi(t), & y_4 &= \dot{W}(t) \cos \phi(t) - W(t) \sin \phi(t) \cdot \dot{\phi}(t) \end{aligned} \right\} \text{----- (10)}$$

したがって,

$$dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 = \frac{\partial(y_1, y_2, y_3, y_4)}{\partial(W, \phi, \dot{W}, \dot{\phi})} dW d\phi d\dot{W} d\dot{\phi} = W^2(t) dW d\phi d\dot{W} d\dot{\phi} \text{----- (11)}$$

式(9)~(11)を用いると, $W, \phi, \dot{W}, \dot{\phi}$ の同時確率密度関数が次式の形で得られる。

$$\left. \begin{aligned} f_c(W, \phi, \dot{W}, \dot{\phi}) &= \frac{W^2}{4\pi^2 \omega_n^2 B \delta_y^4} \exp \left[-\frac{1}{2B \delta_y^2} \left\{ (\beta_2 + \lambda_1^2) W^2 - \frac{2\lambda_1}{\omega_n} W \dot{W} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{2\beta_1}{\omega_n} W \dot{\phi} + \frac{1}{\omega_n^2} (\dot{W}^2 + W^2 \dot{\phi}^2) \right\} \right] \end{aligned} \right\} \text{----- (12)}$$

さらに, 式(12)から, W, \dot{W} の同時確率密度は次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} f_e(W, \dot{W}) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\infty}^{\infty} f_c(W, \phi, \dot{W}, \dot{\phi}) d\dot{\phi} \\ &= \frac{W}{\omega_n \sqrt{2\pi} B \delta_y^2} \exp \left[-\frac{1}{2\delta_y^2} \left\{ \left(1 + \frac{\lambda_1^2}{B}\right) W^2 - \frac{2\lambda_1}{\omega_n B} W \dot{W} + \frac{\dot{W}^2}{\omega_n^2 B} \right\} \right] \end{aligned} \right\} \text{----- (13)}$$

5. 最大応答の確率分布および平均最大応答

応答包絡線 $W(t)$ が応答レベル Y を正のこう配で超える単位時間当りの平均回数は、threshold-value crossing の理論³⁾ に式 (13) を応用して次式のように導くことができる。

$$N_w(Y, t) = \int_0^\infty \dot{w} \phi_c(Y, w) dw$$

$$= \omega_n \frac{Y}{\delta_y} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y}{\delta_y}\right)^2\right\} \left\{ \frac{B}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2B}\left(\frac{Y}{\delta_y}\right)^2\right\} + \frac{\lambda}{2} \frac{Y}{\delta_y} \left\{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2B}} \frac{Y}{\delta_y}\right)\right\} \right\} \quad (14)$$

前述のように、 $W(t)$ の最大値を論ずる際には、相異なる時刻での $W(t)$ 間の相関の影響は比較的小さいものと考えてこれを無視すると、最大応答 Y の確率分布は近似的に次式から算出される。

$$\bar{Y} \cong P[Y(0) \leq Y] \exp\left\{-\int_0^\infty N_w(Y, t) dt\right\} \quad (15)$$

また最大地震応答の平均値を S_D とすると、

$$S_D = E[Y] = \int_0^\infty \{1 - \bar{Y}(Y)\} dY \quad (16)$$

6. 数値計算例

以上の理論を線形1自由度系の応答に応用した例を示す。入力地震動は、加速度の標準偏差が図-3(乙)のように変化する非定常過程とし、これに対する応答標準偏差を求めた例が図-3(a)である。同図の T_0 、 β は地震動に関するパラメータで、それぞれ卓越周期、等価継続時間、強度を表わす。図-3に関してさらに詳しくは文献1) によりたい。また同様にして、 $\delta_y(t)$ も算出できる。さらに、式(5)の $S_r(w)$ を用いれば、

$$B = 1 - \frac{1}{1 - h_n^2} \left(1 - \frac{1}{\pi} \tan^{-1} \frac{2h_n \sqrt{1 - h_n^2}}{1 - 2h_n^2}\right)$$

これらの結果を式(14)~(16)に用いた数値例を平均応答スペクトルの形にまとめたのが図-4である。同図中の p.b.p.m. は、文献1) の純出生過程の解法(直接 $y(t)$ を解析する)において、第2次近似によって2時刻間の応答の相関を考慮した結果である。同図によると、平均最大応答を論ずる限りは、特に長周期構造において本報告の方法の精度が優れている。

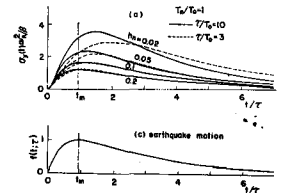


図-3 地震応答の標準偏差

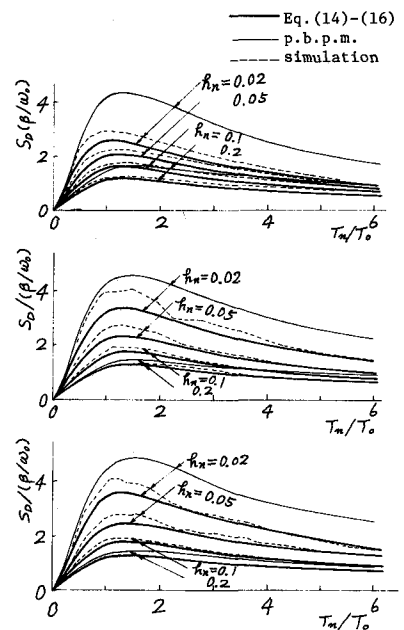


図-4 平均応答スペクトル

1) 鹿田: 学会論文集, 201号, 昭47.5. 2) 鹿田: 京大工学部紀要, 昭47.1.
3) Rice: Selected Papers on Noise ---- (Max編), Dover, 1949.