

弾塑性1自由度構造物の地震応答解析
等価線形化手法の適用性

京都大学 工学部 正員 後藤尚男
京都大学 大学院 学生員 〇家村浩和

1. まえがき

変位-復元力の間の履歴復元力特性を考慮した構造物の応答諸量の確率論的評価は、線形的重ね合わせの原理による Duhamel の積分を利用できないために理論的取扱いが非常に困難であり、この実が一般的考察を妨げている。等価線形化手法はあくまで近似解法ではあるが、線形系における不規則振動論を導入できる実て有効な解法の1つである。著者らはすでに定常応答の範囲内において等価線形化手法の適用性を論じ、その応用について検討を加えた。¹⁾ しかし地震動はその強度が非定常に変化する特性を有するものであることおよび構造物は静止の状態から振動し始めることの実を考慮合わせると、耐震工学の立場からは、どうしても非定常応答解析を実施する必要がある。

本研究ではまず最小2乗誤差法とエネルギー釣り合い法との2種類の等価線形化規範について、slowly varying parameter method を用いて比較・検討した。次に一定時間ごとに応答分散値と共分散値とを次々と求めてゆく step-by-step による応答評価法について述べ、しる後この手法と等価線形化手法とを組み合わせて、履歴構造物の非定常地震応答解析を実施した。さらにこの解法による応答分散値の妥当性を検討するため Digital 計算機内でのシミュレーションを実施した。

2. 等価線形化規範

履歴系をある規範の下に等価な線形振動系に置換する手法については、等価履歴減衰定数の決定方法としてすでに詳しく報告したが、²⁾ ここでは異なる2つの代表的な手法から全く同一の解が得られるという興味ある結果について述べる。一般に無次元化した1自由度履歴構造物の運動方程式は次式のように表わせる。

$$\ddot{u} + 2h_0 \dot{u} + g(\mu, \dot{\mu}, \alpha, \beta, t) = -r_s \psi(t) f(\eta = u/\omega_0, h_f) \quad (1)$$

ここに μ は ductility factor, $\dot{\mu}$ は無次元時間 t に関する微分, α, β は無次元履歴復元力特性 g の形状を定めるパラメータ, r_s は外力強度定数, $\psi(t)$ は外力の shape function, η, h_f は分散値1なる定常外力のスペクトル特性を決定する定数である。上式を等価円振動数 ω_{eq} と等価減衰係数 β_{eq} を用いて等価線形系に書き改めると次式のようになる。

$$\ddot{u} + \beta_{eq} \dot{u} + \omega_{eq}^2 u = -r_s \psi(t) f(\eta, h_f) \quad (2)$$

(1) 最小2乗誤差法

これは等価線形化に基づく2乗誤差を最小にする規範で β_{eq}, ω_{eq} を決定する方法である。1周期 T , $T+T$ における2乗誤差 I は次式のように表わせる。

$$I(\beta_{eq}, \omega_{eq}) = \int_T^{T+T} \{ 2h_0 \dot{u} + g - \beta_{eq} \dot{u} - \omega_{eq}^2 u \}^2 dt \quad (3)$$

応答変位が調和波であるとの仮定 ($u = u_0(t) \cos(\omega_{eq} t + \phi(t))$) の下に最小化の条件式: $\partial I / \partial \beta_{eq} = 0, \partial I / \partial \omega_{eq} = 0$ を満足するように計算を進めると $\beta_{eq}, \omega_{eq}^2$ は次式のように求まる。

$$\beta_{eq} = 2h_0 + \int g \dot{\mu} dt / \int \dot{\mu}^2 dt, \quad \omega_{eq}^2 = \int g \mu dt / \int \mu^2 dt \quad (4)$$

(2) エネルギー釣り合い法

これは履歴特性による1サイクル当りのエネルギー消費と等価減衰係数によるそれとが等しくなるように等価線形系を決定する方法である。エネルギーの釣り合い式は次式のように書ける。

$$\oint \{2h_0 \dot{\mu} + g\} d\mu = \oint \beta_{eq} \dot{\mu} d\mu \quad \text{----- (5)}$$

また ω_{eq}^2 については前手法と同様の調和波的応答を仮定して、履歴系の共振運動数を求めることにより得られる。これより β_{eq} , ω_{eq}^2 は次式となる。

$$\beta_{eq} = 2h_0 + \oint g d\mu / \oint \dot{\mu} d\mu, \quad \omega_{eq}^2 = \frac{1}{\pi \mu_0} \int_0^{2\pi} g \cos \theta d\theta \quad \text{----- (6)}$$

式(4), (6)の具体的計算を図-1に示す bi-linear 系について行くと、両式のおおのの値は全く同一となり次式のように得られる。

$$\beta_{eq}(\mu_0) = 2h_0 + \frac{4n(\mu_0 - 1)}{\pi \omega_{eq}^2 \mu_0^2}, \quad \omega_{eq}^2(\mu_0) = \frac{2n(2 - \mu_0)}{\pi \mu_0^2} \sqrt{\mu_0 - 1} + \frac{n}{\pi} \cos^{-1} \left(1 - \frac{2}{\mu_0}\right) + (1-n) \quad \text{--- (7)}$$

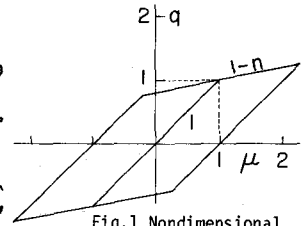


Fig.1 Nondimensional Representation of the Bi-linear Hysteresis

このように(1), (2)両者の手法による結果が全く一致するという事は物理的に非常に興味深いことである。つまり最小2乗誤差法による等価線形系の選択が、振動学的には履歴系と等価線形系との共振運動数を一致させ、なおかつ両振動系の消費エネルギーの釣り合いを保ち得ていることを示している。したがって2乗誤差最小法は単に線形化に伴う2乗誤差が最小であるというばかりでなく、物理的にまた振動論的にも充分意味のある等価線形化規範であると言えよう。

以上の解析により、変位応答振幅 μ_0 に対応する $\beta_{eq}(\mu_0)$, $\omega_{eq}^2(\mu_0)$ が決定できたので、この結果を非定常不規則過程に拡張するためには、応答時における極値振幅確率密度関数 $P(\mu_0, \sigma_{\mu}^2, \sigma_{\dot{\mu}}^2, \sigma_{\ddot{\mu}}^2)$ を用いて空間平均を取る方法が考えられる。つまり不規則応答時における等価減衰係数 β_{egr} , 等価円振動数 ω_{egr} は期待値として次式のように書き表わされる。

$$\beta_{egr}(\sigma_{\mu}^2, \sigma_{\dot{\mu}}^2, \sigma_{\ddot{\mu}}^2) = \int \beta_{eq}(\mu_0) P(\mu_0, \sigma_{\mu}^2, \sigma_{\dot{\mu}}^2, \sigma_{\ddot{\mu}}^2) d\mu_0, \quad \omega_{egr}(\sigma_{\mu}^2, \sigma_{\dot{\mu}}^2, \sigma_{\ddot{\mu}}^2) = \int \omega_{eq}(\mu_0) P(\mu_0, \sigma_{\mu}^2, \sigma_{\dot{\mu}}^2, \sigma_{\ddot{\mu}}^2) d\mu_0 \quad \text{--- (8)}$$

ここで $P(\mu_0, \sigma_{\mu}^2, \sigma_{\dot{\mu}}^2, \sigma_{\ddot{\mu}}^2)$ としては小堀・南井両博士により得られている次式³⁾を用いる。

$$P(\mu_0, \sigma_{\mu}^2, \sigma_{\dot{\mu}}^2, \sigma_{\ddot{\mu}}^2) = \exp\left(-\frac{\mu_0^2}{2\sigma_{\mu}^2}\right) \left[\frac{\mu_0}{2\sigma_{\mu}^2} \exp\left(-\frac{\rho^2 \mu_0^2}{2(1-\rho^2)\sigma_{\mu}^2}\right) + \sqrt{\frac{\pi}{2\sigma_{\mu}^2}} \left(\frac{\mu_0^2}{\sigma_{\mu}^2} - 1\right) \operatorname{erf}\left(\frac{\rho \mu_0}{\sqrt{2(1-\rho^2)\sigma_{\mu}^2}}\right) \right] \quad \text{--- (9)}$$

ただし, $\rho = \sigma_{\dot{\mu}} / (\sigma_{\mu} \sigma_{\ddot{\mu}})$

上式を用いると、ある時刻における応答分散値 σ_{μ}^2 , $\sigma_{\dot{\mu}}^2$ および応答共分散値 $\sigma_{\mu\dot{\mu}}$ を知れば、この応答レベルに対応した等価線形系のパラメータ β_{egr} , ω_{egr} を決定できることになる。

3. Step-by-step による応答評価法

等価線形系の運動方程式式(2)の $t=0$ における初期条件を $\mu_0, \dot{\mu}_0$ とし, shape function を $\psi(t) = \psi_0 = \text{const.}$ とすると, 同式の解は強制振動と自由振動の和として次式のように得られる。

$$\eta(t) = \frac{-\sqrt{2}\psi_0}{P} \int_0^t h(t-t')f(t')dt' + I(t), \quad \dot{\eta}(t) = -\frac{\sqrt{2}\psi_0}{P} \int_0^t \dot{h}(t-t')f(t')dt' + \dot{I}(t) \quad \text{--- (10)}$$

ここに, $P = \sqrt{\omega_{eq}^2 - \beta_{eq}^2/4}$, $I(t) = G_1(t)\mu_0 + G_2(t)\dot{\mu}_0$, $\dot{I}(t) = G_3(t)\mu_0 + G_4(t)\dot{\mu}_0$

$$h(t) = \exp(-\beta_{eq}t/2) \sin pt, \quad \dot{h}(t) = p \exp(-\beta_{eq}t/2) (\cos pt - (\beta_{eq}/2p) \sin pt)$$

$$G_1(t) = \exp(-\beta_{eq}t/2) (\cos pt + (\beta_{eq}/2p) \sin pt), \quad G_2(t) = (1/p) \exp(-\beta_{eq}t/2) \sin pt$$

$$G_3(t) = -(\omega_{eq}^2/p) \exp(-\beta_{eq}t/2) \sin pt, \quad G_4(t) = -(\beta_{eq}/2) \exp(-\beta_{eq}t/2) \sin pt + \exp(\beta_{eq}t/2) \cos pt$$

式(10)より $t = t_1$ における変位・速度応答分散値 σ_{μ}^2 , $\sigma_{\dot{\mu}}^2$ およびこれらの相関係数 $\rho_{\mu\dot{\mu}}$ は次式のよ

うに書き表わせる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\mu}^2(\xi_1) &= E[\mu^2(\xi_1)] = (k^2 \psi^2 / p^2) \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_1} h(\xi_1-t) h(\xi_1-t') E[f(t)f(t')] dt dt' - (2k\psi/p) E[I(\xi_1)] \int_0^{\xi_1} h(\xi_1-t) f(t) dt + E[I^2(\xi_1)] \\ \sigma_{\dot{\mu}}^2(\xi_1) &= E[\dot{\mu}^2(\xi_1)] = (k^2 \dot{\psi}^2 / p^2) \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_1} \dot{h}(\xi_1-t) \dot{h}(\xi_1-t') E[f(t)f(t')] dt dt' - (2k\dot{\psi}/p) E[I(\xi_1)] \int_0^{\xi_1} \dot{h}(\xi_1-t) f(t) dt + E[\dot{I}^2(\xi_1)] \\ \rho_{\mu\dot{\mu}}(\xi_1) &= E[\mu(\xi_1)\dot{\mu}(\xi_1)] / \sigma_{\mu} \sigma_{\dot{\mu}} = (k^2 \psi \dot{\psi} / p^2 \sigma_{\mu} \sigma_{\dot{\mu}}) \int_0^{\xi_1} \int_0^{\xi_1} h(\xi_1-t) \dot{h}(\xi_1-t') E[f(t)f(t')] dt dt' \\ &\quad - k\psi/p \sigma_{\mu} \sigma_{\dot{\mu}} E[I(\xi_1)] \int_0^{\xi_1} \dot{h}(\xi_1-t) f(t) dt + (1/\sigma_{\mu} \sigma_{\dot{\mu}}) E[I(\xi_1) \dot{I}(\xi_1)] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

上式に式(11)の関係を考慮すると、 $t=0$ における σ_{μ}^2 、 $\sigma_{\dot{\mu}}^2$ 、 $\rho_{\mu\dot{\mu}}$ の各値より $t=\xi_1$ におけるおのおのの値が評価できることになる。したがって非定常応答継続時間を適当な時間間隔に区分し、その一区分中 shape function $\psi(t)$ が一定であると見なして式(12)の計算を step-by-step に実施すれば、非定常応答の評価が可能となる。この場合 $f(t)$ がすべての振動数に対して一様なパワースペクトル密度を有

しておれば、式(12)の第1、第2式の右辺第2項および第3式右辺第2、第3項は0となり、計算式は非常に簡単となるが、特定のパワースペクトル密度を有する場合はこれらの項の評価がはるかに難しくなる。しかし $f(t)$ のスペクトル特性があまり鋭くない場合には、これらの項の影響がかなり小さいと予想されるので、本研究ではこれらの項を無視することにし、その精度を理論解との比較により検討した。亀田博士は図-2(a)に示す形状の外力の shape function $\psi(t)$ と $f(t)$ のスペクトル特性が固有振動数 ω_1 ・減衰定数 h_1 なる1自由度振動系の周波数速度応答関数と相似形で示される外、 $\psi(t) \cdot f(t)$ による線形1自由度系の応答を、膨大な計算を実施して理論解析した⁴⁾。この解析結果と本研究で示した step-by-step による手法により求めた結果とを比較したのが図-2(b)である。この図によると変位応答の標準偏差 σ_{μ} は初期の1,2 stepを除いてよく一致しており step-by-step による手法の妥当性を示しているものと考えられる。このように step-by-step による方法は外力の shape function がどのような形状の場合でも利用でき、しかも計算過程が比較的簡単であることから、線形系の応答解析においても実用的で有効な手法であるといえよう。

4. 数値計算例とシミュレーション

式(9)による等価線形化と前節において述べた

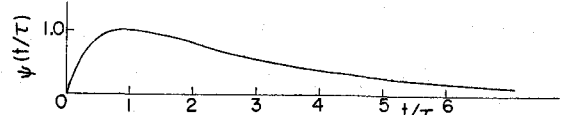


Fig. 2 (a) Shape Function of The Excitation

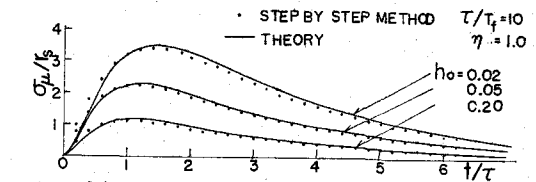
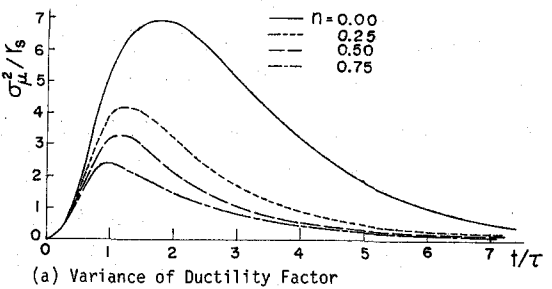
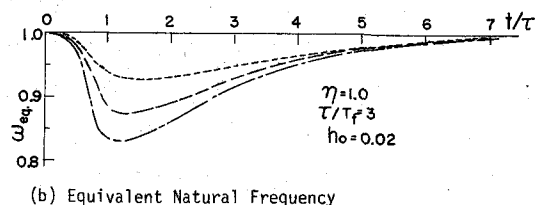


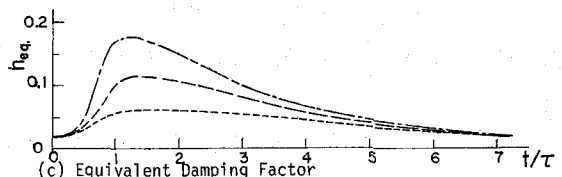
Fig. 2 (b) Comparison between Step-by-Step Method and Theoretical Results



(a) Variance of Ductility Factor



(b) Equivalent Natural Frequency



(c) Equivalent Damping Factor

Fig. 3 Nonstationary Response of Structures With Bi-linear Hysteresis

step-by-stepによる応答評価法とを逐次繰返して履歴構造の非定常応答解析を実施した。図-2において示したと同様の入力に対する bi-linear 系の応答分散値 σ_u^2 と等価減衰定数 h_{eq} ($=\beta_{eq}/2\omega_0$)、等価円振動数 ω_{eq} の時間的变化を図-3に示した。同図 (a) に示した σ_u^2 は弾塑性傾斜率 n が大きくなるほど、つまり履歴特性の非線形性が大きくなるほど応答レベルが低下し、その最大値の起こる時刻は入力の最大値の時刻に近づいて来る。特に降伏後の剛度が弾性領域のその $1/4$ ($n=0.75$) の場合は最大応答分散値が線形系のその約 $1/3$ になり、応答の最大値は入力の最大値とほぼ同時刻に起っている。これは同図 (c) に示した等価減衰定数 h_{eq} の増大がらもわかるように、履歴特性によるエネルギーの減衰作用が大きく、したがって応答レベルを低くまた最大応答時刻が入力の最大時刻により近い所で起こるといふ非保存振動系の特徴をよく表わしているものと考えられる。等価円振動数 ω_{eq} は n が増大するほどより減少の程きが著しい。一般に応答の最大値の起こる時刻は固有周期が増大するほど遅れるのであるが、同図 (a) によると ω_{eq} の減少による効果よりも、 h_{eq} の増大によるそれが大きく作用していることがわかる。 ω_{eq} の減少が応答分散値 σ_u^2 に及ぼす影響については、周波数応答関数の遷移という概念をすでに述べたが、ここでは $\eta = \omega_0/\omega = 1.0$ であることから応答レベルを低下させる作用をしている。

逐次等価線形化解法による応答分散値評価の妥当性を検討するために、すでに報告した数値計算手法に従ってシミュレーションを実施した。図-4にはおのおの50個の人工地震波入力に対する応答変位の2乗平均をプロットしてある。同図 (a), (b) にはおのおの $n=0.50, 0.75$ なる bi-linear 系の応答を比較したが、両者の手法による値はほぼ一致しており、本研究で示した解法の妥当性を裏付けているものと言えよう。同図 (c) には完全弾塑性系 ($n=1.00$) の増大についての値を比較したが、シミュレーションの場合は塑性変形の累積による変形増大の効果が著しく、この履歴系における等価線形化解法の無力なことを示している。地震動による構造物の破壊過程を論ずるためには今後この塑性変形量の解析的評価を追求してゆく必要があると考えられる。最後に有意義な御討議をいただいた京都大学助教授亀田弘行博士に感謝の意を表す。なお数値計算には京都大学大型計算機センター FACOM 230-60 を用いた。

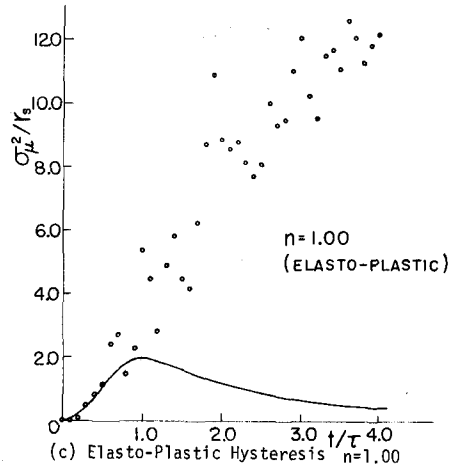
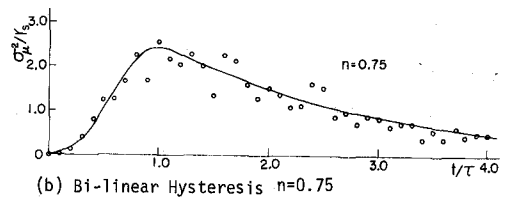
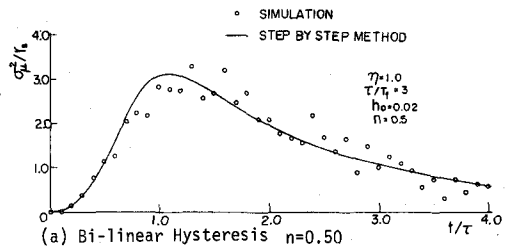


Fig.4 Comparison between Simulated and Theoretical Results

参考文献 1) 亀田・家村: 地震工学シンポジウム(1970)講演概要集, pp.349-356. 2) 後藤・家村; 土木学会第11回地震工学研究発表会講演概要, 1971, pp.83-86. 3) 小堀・南井: 京都大学防災研究所年報第10号A, 1967, pp.1-26. 4) 亀田: 土木学会論文報告集, No.20, 1972.5, pp.1-2. 5) 後藤・家村: 土木学会論文報告集, No.184, 1970.10, pp.57-67.